Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 626-639
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114076

Hans汉斯

超临界分枝过程的大偏差速率

王小娟，王　娟

上海理工大学理学院，上海
Email: 554765462@qq.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月21日；发布日期：2021年4月29日

摘　要

假设 $\{Y(t);t\geq 0\}$ 是带移民的连续时间分枝过程，其中分枝概率是 $\{b_k;k\geq 0\}$，移民概率是 $\{a_j;j\geq 0\}$。令 $b_0=0$，$0<b_k\neq 1$ $(k\geq 1)$，$1<m=\sum_{k=0}^{\infty}kb_k<\infty$，$0<a=\sum_{j=0}^{\infty}jb_j<\infty$ 和 $a=\dfrac{m}{e^m-1}$。首先，我们证明 $K(t)=e^{-\lambda t}\left[Z(t)-\dfrac{e^{\lambda(t+1)}}{e^{\lambda}-1}e^{a+\lambda}\right]$ 是一个上鞅并且收敛到随机变量K。然后，我们在 $\alpha>0$ 和 $\varepsilon>0$ 时，当 $\{b_k;k\geq 0\}$ 和 $\{a_k;k\geq 0\}$ 满足多种矩条件，研究

$$P\left(\left|K(t)-K\right|>\varepsilon\right)$$

在t趋于无穷时的衰减速率。

关键词

Q-矩阵，超临界分枝过程，大偏差

Large Deviation Rates for Supercritical Branching Process

Xiaojuan Wang, Juan Wang

Faculty of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 554765462@qq.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 21st, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

Suppose $\{Y(t);t\geq 0\}$ is the continuous time supercritical branching process with offspring rates

文章引用: 王小娟, 王娟. 超临界分枝过程的大偏差速率[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 626-639.
DOI: 10.12677/pm.2021.114076

$\{b_k;k\ge 0\}$ and immigration rates $\{a_j;j\ge 0\}$. Let $b_0=0$, $0<b_k\ne 1$ $(k\ge 1)$, $1<m=\sum_{k=0}^{\infty}kb_k<\infty$, $0<a=\sum_{j=0}^{\infty}jb_j<\infty$ and $a=\frac{m}{e^m-1}$. Firstly, we suppose that $K(t)=e^{-\lambda t}\left[Z(t)-\frac{e^{\lambda(t+1)}}{e^{\lambda}-1}e^{a+\lambda}\right]$ is a sub-martingale and converges to a random variable *K*. Then we study the decay rates of

$$P(|K(t)-K|>\varepsilon) \text{ as } t\to\infty$$

for $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ under various moment conditions on $\{a_k;k\ge 0\}$ and $\{b_k;k\ge 0\}$.

Keywords

Q-Matrix, Supercritical Branching Process, Large Deviation

1. 引言

假设$\{Z(t);t\ge 0\}$的取值为非负整数，用$Z(t)$表示t时刻超临界分枝过程的粒子数，则从一个祖先出发的过程可以用以下递归关系表示：

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{Z(t-s)}Z_{t-s}^{i}(s)+Y_{t-s}(s),t>0,s\ge 0,Z(0)=1, \tag{1.1}$$

其中$Z_{t-s}^{i}(s)$表示 *t*-*s* 时刻第 *i* 个个体在 *t* 时刻产生的粒子数，$\{Z_{t-s}^{i}(s);t-s>0,i\ge 1\}$是独立同分布的随机变量，并且具有相同的母函数$F(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)s^k$，$s\in[0,1]$；$\{Y_{t-s}(s);s\ge 0\}$也是 i.i.d。并且具有相同的母函数$H(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(t)s^k$，$s\in[0,1]$。此外$\{Y(s);s\ge 0\}$和$\{Z^i(s);s>0,i\ge 1\}$独立。由于我们考虑的是上临界的情况，即是$m:=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k$，其中$p_k=\lim_{t\to\infty}p_k(t)$。根据 Harris 变换[1]，我们可以把$p_0>0$转化为$p_0=0$的情况。所以不失一般性，在之后的文章中我们假设$p_0=0$。

特别地，如果$Y(s)\equiv 0$，即没有移民加入的情形，那么$\{Z(t);t\ge 0\}$退化为上临界分枝过程，记为$\{X(t);t\ge 0\}$，根据[2]可知，存在非负的规范化序列$C(t)$使得

$$W(t):=\frac{X(t)}{C(t)}\xrightarrow{\text{a.s.}}W,\ \text{当}\ t\to\infty \tag{1.2}$$

其中$\{W(t);t\ge 0\}$是一个鞅。

如果考虑加入移民，即存在一些时刻 *s*，使得$Y(s)\ne 0$。根据 Seneta [3]可知，对于(1.2.1)定义的带移民的超临界分枝过程$\{Z(t);t\ge 0\}$，仍存在非负的规范化序列$C(t)$使得

$$V(t):=\frac{Z(t)}{C(t)}\to V\ \text{a.s., 当}\ t\to\infty \tag{1.3}$$

而且，文献[3]中还提出超临界分枝过程和带移民的超临界分枝过程的$C(t)$是相同的，并且满足对$\forall\varepsilon\in(0,\lambda-1)$都存在着与$\varepsilon$相关的整数$N(\varepsilon)>0$，满足

$$C(0)=1,$$
$$C(t)\to\infty,\ \frac{C(t+s)}{C(t)}\to m(s),\ t\to\infty, \tag{1.4}$$
$$c_1\left(\frac{e^{\lambda}}{1+\varepsilon}\right)\le C(t)\le c_2 e^{\lambda t},\ t\ge N(\varepsilon).$$

其中 c_1， c_2 为非负常数。本文中我们取 $C(t)=e^{\lambda t}$ 。

注 1.1 根据[3]只要移民满足 $E\log Y<\infty$ 总能找到规范化函数 $C(t)$，使其满足式(1.3)，而不用对移民分布做任何限制。所以我们默认本文中所取得 $C(t)$ 都满足式(1.3)。

为了研究方面，我们引入 $Z(t)$ 的 Q-矩阵 $Q=\left(q_{ij};i,j\in Z_+\right)$ 。

$$q_{ij}:=\begin{cases} ib_{j-i+1}+a_{j-i} & \text{if } i\ge 0, j\ge i,\\ ib_0 & \text{if } i\ge 0, j=i-1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中：

$$b_j\ge 0\left(j\ne 1\right),\quad 0<-b_1=\sum_{j\ne 1}b_j<\infty,$$
$$a_j\ge 0\left(j\ne 0\right),\quad 0<-a_0=\sum_{j\ne 0}a_j<\infty。$$

如果用 $G(s,t)$ 来表示带移民的超临界分枝过程 $\{Z(t);t\ge 0\}$ 的母函数，则

$$G(s,t)=G_1(s,t)=F(s,t)H(s,t),t>0,s\in[0,1], \tag{1.5}$$

而且 $G(s,0)=F(s,0)=s$ 。

为了叙述的方便，下面我们回忆 $G(s,t)$ 已知的衰减速率和收敛性质：

命题 1.1 (Liu [4]和 Ney [5])假设 $m>1$，定义

$$R(s,t):=\frac{H(s,t)}{e^{a_0 t}},\quad Q(s,t):=\frac{F(s,t)}{e^{b_1 t}}。$$

当 $t\to\infty$ 时，

$$\varrho(s,t):=\frac{G(s,t)}{e^{(a_0+b_1)t}}=R(s,t)Q(s,t)\nearrow R(s)Q(s)=:\varrho(s), \tag{1.6}$$

上述的收敛对任意的 $s\in K$ 是一致的，K 为 $[0,1)$ 上的任一闭子区间。并且 $R(s)$ 和 $Q(s)$ 分别满足下列泛函方程：

$$G(s)R\left(F(s)\right)=e^{a_0}R(s),\quad 0\le s<1,\quad R(0)=1,\quad R(1)=\infty;$$
$$Q\left(F(s)\right)=e^{b_1}Q(s),\quad 0\le s<1,\quad Q(0)=0,\quad Q(1)=\infty。$$

另外， $R(s)$ 和 $Q(s)$ 可以分别表示为级数 $R(s)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k s^k$ 和 $Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k s^k$ 。

由于直接求 $Z(t+s)/Z(t)$ 的大偏差有些困难，所以在本章的证明中，我们做如下变换：

$$K(t)=e^{-\lambda t}\left[Z(t)-\frac{e^{\lambda(t+1)}-1}{e^{\lambda}-1}e^{a+\lambda}\right], \tag{1.7}$$

其中 $0<a=\dfrac{\lambda}{e^{\lambda}-1}<\infty$ 。

本节我们主要研究 $\{Z(t);t\ge 0\}$ 其中引入的移民不全为 0。我们关心粒子数 $Z(t)$ 的大偏差，即在

$\{b_k;k\ge 0\}$ 和 $\{a_k;k\ge 0\}$ 满足多种矩条件下，对于 $\alpha>0$，和 $\varepsilon>0$ 时研究下列式子的大偏差，

$$P\left(\left|K(t)-K\right|>\varepsilon\right), t\to\infty.$$

下面是本文的主要定理。

定理 1.1 假设对于 $\theta_0>1$，$B(\theta_0)<\infty$ 和 $A(\theta_0)<\infty$。则对于一些 $\varepsilon>0$ 我们有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}P\left(\left|\frac{Z(t+v)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon\mid Z(0)=1\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\phi(v,l,\varepsilon)\rho_l<\infty, \tag{1.8}$$

其中，

$$\phi(v,l,\varepsilon)=P\left(\left|\overline{X_l}(v)+\frac{Y(v)}{l}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon\right),$$

$\overline{X_l}(v)=\sum_{j=1}^{l}\frac{X_j(v)}{l}$，$\{\rho_l\}$ 是引理 2.2 中定义的。

定理 1.2 假设对于固定的 $\varepsilon>0$ 和 $v>0$，存在常数 $C_\varepsilon(v)$，在 $r>0$ 和 $l\ge 1$ 时满足 $\lambda r>-(b_1+a_0)$ 和 $\phi(v,l,\varepsilon)\le l^{-r}\cdot C_\varepsilon(v)$，则(1.8)成立。

推论 1.1 假设对于 $b_1<a_0$ 和 $\delta>0$，$E\left[Z^{2+\delta}(1)\right]<\infty$，则(1.8)成立。

定理 1.3 假设对于 $\theta_0>0$ 和 $v>0$，$E\left(\mathrm{e}^{\theta_0 Z(v)}\mid Z(0)=1\right)<\infty$，则存在 $\theta_1>0$ 满足

$$C_1=\sup_{t\ge 0}E\left[\mathrm{e}^{\theta_1 K(t)}\right]<\infty.$$

定理 1.4 假设对于 $\theta_0>0$ 和 $v>0$，$E\left(\mathrm{e}^{\theta_0 Z(v)}\mid Z(0)=1\right)<\infty$，则存在 C_2 和 $\xi>0$ 满足

$$P\left(\left|K(t)-K\right|>\varepsilon\right)\le C_2\mathrm{e}^{-\xi\varepsilon^{2/3}\mathrm{e}^{\lambda t/3}}.$$

2. 预备知识

在开始定理证明之前，我们先介绍一些证明过程中用到的引理或性质，这样可以避免证明的繁琐。

引理 2.1 假设 $\eta>0$，$j>0$ 和 $k>0$，如果 $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\eta t}p_{jk}(t)=\phi_{jk}\ge 0$ 存在，则对于 $b>0$，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-bt}\int_0^t\mathrm{e}^{(\eta+b)v}p_{jk}(v)\mathrm{d}v=b^{-1}\phi_{jk}。$$

引理 2.2 对于 $i\ge 1$，$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{1k}(t)=\rho_k$ 存在，并且当 $k\ge 0$ 时，$\rho_k\le\rho_1=1$ 成立。再者 $\varrho(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k w^k$ 满足下式：

$$(b_1+a_0)\varrho(w)=B(w)\varrho'(w)+A(w)\varrho(w), 0\le w\le 1, \tag{2.1}$$

并且 $\varrho(0)=0$。

证明： 根据 Kolmogorov 向前方程，

$$p_{1k}'(t)=\sum_{i=1}^{k}p_{1i}(t)\left(ib_{k-i+1}+a_{k-i}\right), k\ge 1. \tag{2.2}$$

当 $k=1$ 时，

$$p_{11}'(t)=p_{11}(t)(b_1+a_0),$$

也就是

$$p_{11}(t)=\mathrm{e}^{(b_1+a_0)t},$$

因此

$$\rho_1=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{11}(t)=1.$$

当 $k=2$ 时，

$$p_{12}'(t)=p_{11}(t)(b_2+a_1)+p_{12}(t)(2b_1+a_0),$$

也就是

$$\mathrm{e}^{-(2b_1+a_0)t}p_{12}(t)=(b_2+a_1)\int_0^t p_{11}(v)\mathrm{e}^{-(2b_1+a_0)v}\mathrm{d}v,$$

根据引理 2.1 知：

$$\rho_2=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{12}(t)=(b_2+a_1)\int_0^t p_{11}(v)\mathrm{e}^{-(2b_1+a_0)v}\mathrm{d}v=-\frac{\rho_1(b_2+a_1)}{b_1}\le\rho_1.$$

当 $k=k$ 时，

$$p_{1k}'(t)=\sum_{i=1}^{k-1}p_{1i}(t)(ib_{k-i+1}+a_{k-i})+p_{1k}(t)(kb_1+a_0),$$

也就是

$$\mathrm{e}^{-(kb_1+a_0)t}p_{1k}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}(ib_{k-i+1}+a_{k-i})\int_0^t p_{1i}(v)\mathrm{e}^{-(kb_1+a_0)v}\mathrm{d}v,$$

因此

$$\rho_k=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{1k}(t)=-\frac{1}{(k-1)b_1}\sum_{i=1}^{k-1}(ib_{k-i+1}+a_{k-i})\rho_i\le\rho_1.$$

再者，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}'(t)s^k=B(v)\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)kv^{k-1}+A(v)\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)v^k,$$

因此，

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)v^k\right\}_t'+(b_1+a_0)\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)v^k=B(v)\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)kv^{k-1}+A(v)\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}p_{jk}(t)v^k.$$

令 $t\to\infty$，

$$(b_1+a_0)\varrho(v)=B(v)\varrho'(v)+A(v)\varrho(v).$$

注意到，

$$Z(t+v)=\sum_{i=1}^{Z(t)}\xi_{t,i}(v)+Y(v),$$

这里 $\{Y(v);v\ge0\}$ 是独立同分布的并且它的母函数是 $H(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}h_{1j}(t)s^j$，$\{\xi_{t,i}(v);t\ge0,j\ge1\}$ 也是独立同分布的并且它的母函数是 $F(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{1j}(t)s^j$。

性质 2.1 假设 $EM\log M<\infty$ 和 $a=H'(1)<\infty$，ς_t 是通过 $\{Z(t);t\ge0\}$ 生成的 σ 代数。则 $\{K(t);t\ge0\}$ 是一个上鞅并且几乎处处收敛到随机变量 K。

证明：根据 $K(t)$ 的定义可知，对于 $0<v\le 1$，

$$E\left(K(t+v)\mid K(t)\right)=E\left\{\mathrm{e}^{-\lambda(t+v)}\left[Z(t+v)-\frac{\mathrm{e}^{m(t+v+1)}-1}{\mathrm{e}^{m}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\right]\mid Z(t)\right\}$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda(t+v)}E\left[\sum_{j=1}^{Z(t)}\xi_{t,j}(v)+Y(v)-\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+v+1)}-1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\mid Z(t)\right]$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda(t+v)}\left(\mathrm{e}^{\lambda v}Z(t)+\mathrm{e}^{(a+\lambda)v}-\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+v+1)}-1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(Z(t)+\frac{\mathrm{e}^{av+\lambda}-\mathrm{e}^{av}-\mathrm{e}^{\lambda t+a+2\lambda}+\mathrm{e}^{a+\lambda-\lambda v}}{\mathrm{e}^{m}-1}\right)$$
$$\ge\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(Z(t)-\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+1)}-1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\right)=K(t).$$

因此 $K(t)$ 是上鞅。我们知道 $E\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}Z(t)\right]<\infty$ 当且仅当 $E\{M\log M\}<\infty$ 和 $a<\infty$，所以 $E\left[K(t)\right]<\infty$，则 $K(t)$ 是一个可积的上鞅，并且几乎肯定收敛到 r.v.K。

根据 $G(v,t)$ 的定义可知，$G(v,0)=v$。定义

$$G(v)=G(v,1)=E\left[v^{Z(1)}\mid Z(0)=0\right]=H(v,1)F(v,1)=H(v)F(v)\text{ 和 }k\left(F(v)\right)=v.$$

为了计算的方便，我们将研究 $k(v)$ 和 $G(v)$ 之间的关系。假设

$$w(v)=\sup\left\{w\ge 0;G(v)<\infty\right\}.$$

显然，$G(v)$ 在上增加 $\left(0,w(v)\right)$ 并且 $w_v\ge 1$。此外，对于 $0\le w\le 1$，因为 $F(v)\le v$，我们有 $k(v)\ge v$；对于 $1\le v\le w_v$，因为 $F(v)\ge v$，我们有 $k(v)\le v$。因此，k 的迭代 $k(v,n)$ 在 $[1,w_v]$ 中不增，在 $[0,1]$ 中不减(相对于 n)。

性质 2.2 如果 $v_0>1$ 和 $w_0>1$，假设 $G(w_0,v_0)<\infty$，则对于 $1\le v\le F(w_0,v_0)$，当 $t\uparrow\infty$，$k(w,t)\downarrow 1$ 并且

$$R(w,t)\equiv\mathrm{e}^{\lambda t}\left(k(w,t)-1\right)\downarrow R(w),\tag{2.3}$$

这里的 $R(w)$ 是下式的单根，

$$R\left(F(w,v_0)\right)=\mathrm{e}^{\lambda v_0}R(w),\tag{2.4}$$

$$0<R(w)<\infty,1<w\le F(w_0,v_0).\tag{2.5}$$

证明：因为 $w\ge 1$ 时 $F(w,t)\ge w$。我们知道对于 $w\ge 1$ 和 $t\ge 0$，

$$F(w,v_0+t)=F\left(F(w,t),v_0\right)\ge F(w,v_0),$$

因此 $k(\cdot,v_0+t)$ 的定义是在 $\left[0,F(w_0,v_0)\right]$，并且当 $w\ge 1$ 时 $k(w,v_0+t)\ge 1$。当 $1\le w\le F(w_0,v_0)$ 时，因为

$$w=F\left(k(w,v_0+t),v_0+t\right)=F\left(F\left(k(w,v_0+t),t\right),v_0\right)\ge F\left(k(w,v_0+t),v_0\right),$$

所以

$$k(w,v_0+t)\le k(w,v_0).$$

这就意味着当 $v_0\le t\uparrow$ 时 $k(w,t)\downarrow$。定义 $c=\lim_{t\to\infty}k(w,t)$。再者当 $v_0\le t$ 时，

$$w=F\left(k\left(w,v_0+t\right),v_0+t\right)=F\left(F\left(k\left(w,v_0+t\right),v_0\right),t\right),$$

因此

$$F\left(k\left(w,v_0+t\right),v_0\right)=k\left(w,t\right)\ \text{a.s.},\ \ k\left(w,v_0+t\right)=k\left(k\left(w,t\right),v_0\right),$$

当 $t\uparrow\infty$ 时，$c=k\left(c,v_0\right)$。因此我们可知 $c=1$ 也就是当 $t\uparrow\infty$ 时 $k\left(w,t\right)\downarrow 1$。现在，对于 $v,t>0$ 时，存在 $a\in\left(k\left(w,t\right),1\right)$ 使得

$$\frac{R\left(w,v+t\right)}{R\left(w,t\right)}=\frac{\mathrm{e}^{\lambda v}\left(k\left(k\left(w,t\right),v\right)-1\right)}{k\left(w,t\right)-1}=\mathrm{e}^{\lambda v}k_w'\left(a,v\right)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda v}}{F_{w'}\left(a,v\right)}<1$$

因此，$R\left(w\right)=\lim\limits_{t\to\infty}R\left(w,t\right)$ 存在。

再者，$R\left(w\right)$ 满足(2.3)~(2.5)。所以当 $w\in\left[F\left(w_0,v_0\right),1\right]$

$$\begin{aligned}R\left(F\left(w,v_0\right),t+v_0\right)&=\mathrm{e}^{\lambda(t+v_0)}\left(k\left(F\left(w,v_0\right),t+v_0\right)-1\right)\\&=\mathrm{e}^{\lambda(t+v_0)}\left(k\left(k\left(F\left(w,v_0\right),v_0\right),t\right)-1\right)\\&=\mathrm{e}^{\lambda(t+v_0)}\left(k\left(w,t\right)-1\right).\end{aligned}$$

当 $t\uparrow\infty$ 时

$$R\left(F\left(w,v_0\right)\right)=\mathrm{e}^{\lambda(t+v_0)}R\left(w\right),$$

再者

$$R\left(1\right)=\lim_{t\to\infty}R\left(1,t\right)=0\ 和\ R'\left(1\right)=1。$$

因为当 $t>v_0$ 时 $R_w'\left(1,t\right)=1$。因此 $0<R\left(w\right)<\infty$。最后，我们很容易看出(2.3)~(2.5)解的唯一性。

性质 2.3 假设 $w_0=\mathrm{e}^{\theta_0}>1$ 时 $l\equiv G\left(w_0\right)<\infty$。则

$$G\left(k\left(w_0\right),t\right)\le G\left(w_0\right)\prod_{l=1}^{[t-1]}h\left(k\left(w_0,l\right)\right),\ t\ge 2,\tag{2.6}$$

其中 $[t]$ 表示对 t 取整。

证明： 当 $t=2$ 时，由于 $k\left(w_0\right)>1$，则

$$G\left(k\left(w_0\right),2\right)=G\left(F\left(k\left(w_0\right)\right)\right)H\left(k\left(w_0\right)\right)=G\left(w_0\right)H\left(k\left(w_0\right)\right),$$

假设 $t-1$ 时成立，

$$G\left(k\left(w_0,t-2\right),t-1\right)\le G\left(w_0\right)\prod_{l=1}^{(t-2)}H\left(k\left(w_0,l\right)\right)。$$

然后，对于 $t\ge 2$，

$$\begin{aligned}G\left(k\left(w_0,t-1\right),t\right)&=G\left(F\left(k\left(w_0,t-1\right)\right),t-1\right)H\left(k\left(w_0,t-1\right)\right)\\&=G\left(k\left(w_0,t-2\right),t-1\right)H\left(k\left(w_0,t-1\right)\right)\\&\le G\left(w_0\right)\prod_{l=1}^{[t-1]}H\left(k\left(w_0,l\right)\right).\end{aligned}$$

因此(2.6)得证。

3. 定理证明

定理 1.1 的证明： 由于 $Z(t+v)$ 可以定义为：

$$Z(t+v)=\sum_{j=1}^{Z(t)}\xi_{t,j}(v)+Y(v), \tag{3.1}$$

其中 $\{\xi_{t,j}(v);t\geq 0,j\geq 1\}$ 和 $Y(v)$ 时独立同分布的，因此

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|\frac{Z(t+v)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon \mid Z(0)=1\right)\\
&=P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{Z(t)}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{Z(t)}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon \mid Z(0)=1\right)\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}P\big(Z(t)=l \mid Z(0)=1\big)P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{l}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon \mid Z(0)=1\right)\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}P\big(Z(t)=l \mid Z(0)=1\big)P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{l}-\mathrm{e}^{\lambda v}\right|>\varepsilon\right)\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}P\big(Z(t)=l \mid Z(0)=1\big)\phi(v,l,\varepsilon),
\end{aligned}$$

对于固定的 $v>0$，

$$\begin{aligned}
\phi(v,l,\varepsilon)&=P\left(\frac{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{l}-\mathrm{e}^{\lambda v}>\varepsilon\right)+P\left(\frac{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{l}-\mathrm{e}^{\lambda v}<-\varepsilon\right)\\
&\leq P\left(\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)>l\left(\mathrm{e}^{\lambda v}+\varepsilon/2\right)\right)+P\left(\frac{Y(v)}{l}>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)<l\left(\mathrm{e}^{\lambda v}-\varepsilon\right)\right)\\
&\leq P\left(\alpha^{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)}>\alpha^{l\left(\mathrm{e}^{\lambda v}+\varepsilon/2\right)}\right)+P\left(\frac{Y(v)}{l}>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(\beta^{\sum_{j=1}^{l}\xi_{t,j}(v)}>\beta^{l\left(\mathrm{e}^{\lambda v}-\varepsilon\right)}\right)\\
&=I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha\in(1,\theta_0)$ 和 $\beta\in(0,1)$ 是任意常数。因此

$$\phi(v,l,\varepsilon)\leq\left[F(\alpha,v)\alpha^{-\left(\mathrm{e}^{\lambda v}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]^{l}+I_2+\left[F(\beta,v)\beta^{-\left(\mathrm{e}^{\lambda v}-\varepsilon\right)}\right]^{l},$$

因为 $A(\theta_0)<\infty$ 和 $B(\theta_0)<\infty$，所以 $F(\alpha,v)<\infty$。我们可以得出当 $v>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$ 时，存在 $\alpha_0\in(1,\theta_0)$ 和 $\beta_0\in(0,1)$ 使得

$$0<F\left(\alpha_0,v\right)\alpha_0^{-\left(e^{\lambda v}+\varepsilon/2\right)}<1\text{和}0<F\left(\beta_0,v\right)\beta_0^{-\left(e^{\lambda v}-\varepsilon\right)}<1.$$

因此存在 c_j 和 $\lambda_j\in(0,1)$ $(j=1,3)$ 使得 $l\ge1$ 时，$I_j\le c_j\lambda_j(v,\varepsilon)^l$。根据马尔科夫不等式，我们知道存在 $c_2>0$ 和 $\lambda_2\in(0,1)$，使得 $I_2\le c_2\lambda_2(v,\varepsilon)^l$ 根据引理(2.2)，

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}e^{-(b_1+a_0)t}P\left(\left|\frac{Z(t+v)}{Z(t)}-e^{\lambda v}\right|>\varepsilon\mid Z(0)=1\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-(b_1+a_0)t}P\left(Z(t)=1\mid Z(0)=1\right)\phi(v,l,\varepsilon)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\phi(v,l,\varepsilon)\rho_l\\&<\infty.\end{aligned}$$

证毕。

定理 1.2 的证明： 当 $l\to\infty$ 时，l^{-r} 等价于 $(l+1)^{-r}$。基于这个事实和定理的假设，对于 $l>0$ 存在另外的 $\tilde{C}_\varepsilon>0$ 使得 $\phi(v,l,\varepsilon)\le\tilde{C}_\varepsilon(l+1)^{-r}$。不失一般性，我们用 C_ε 定义 $\tilde{C}_\varepsilon$，因此

$$k(l,t):=\frac{\phi(v,l,\varepsilon)}{e^{(b_1+a_0)t}}P\left(Z(t)=l\right)\le\frac{C_\varepsilon}{(l+1)^r}\frac{P\left(Z(t)=l\right)}{e^{(b_1+a_0)t}}=:\tilde{k}(l,t).$$

注意到

$$e^{-(b_1+a_0)t}P\left(\left|\frac{Z(t+v)}{Z(t)}-e^{\lambda v}\right|>\varepsilon\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\phi(v,l,\varepsilon)P\left(Z(t)=l\right)}{e^{(b_1+a_0)t}},$$

通过对收敛定理的简单修改，可以证明

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{k}(l,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{C_\varepsilon}{e^{(b_1+a_0)t}}E\left(\left(Z(t)+1\right)^{-r}\right)<\infty.$$

当 $Z\ge0$ 时，

$$E\left(Z^{-r}\right)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty E\left(e^{-tZ}\right)t^{r-1}dt,$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{E\left(\left(Z(t)+1\right)^{-r}\right)}{e^{(b_1+a_0)t}}&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty\frac{E\left(e^{-t(Z(t)+1)}\right)t^{r-1}}{e^{(b_1+a_0)t}}dt\\&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^1\frac{G(v,t)(-\log v)^{r-1}}{e^{(b_1+a_0)t}}dv.\end{aligned}$$

因为 $\varrho(v,t)=\dfrac{G(v,t)}{e^{(b_1+a_0)t}}\uparrow\varrho(v)$，如果下式成立则证明将是完整的。

$$\int_0^1\varrho(v)k(v)dv<\infty,\tag{3.2}$$

其中 $k(v)=(-\log v)^{r-1}$。

对于固定的 $v_0\in(0,1)$，令 $v(t)$ 是 $F(v_0,t)$ 关于 v_0 的反函数。可以明显看出当 $t\uparrow\infty$ 时 $v(t)\uparrow1$。注意到 $H(v,1)\varrho\left(F(v,1)\right)=e^{b_1+a_0}\varrho(v)$，所以，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{v_n}^{v_{n+1}} \varrho(v) k(v) \mathrm{d}v \\
&= \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{\varrho(F(v,1)) H(v,1)}{\mathrm{e}^{b_1+a_0}} k(v) \mathrm{d}v \\
&= \int_{v_{n-1}}^{v_n} \varrho(w) k(w) \frac{H(F^{-1}(w)) k(F^{-1}(w)) (F^{-1}(w))'}{k(w)\mathrm{e}^{b_1+a_0}} \mathrm{d}w \\
&= \int_{v_{n-1}}^{v_n} \varrho(w) k(w) D(w) \mathrm{d}w,
\end{aligned}
$$

其中

$$
D(w) = \frac{H(F^{-1}(w)) k(F^{-1}(w)) (F^{-1}(w))'}{k(w)\mathrm{e}^{b_1+a_0}}.
$$

由于 $\lim\limits_{w\to 1}(F^{-1}(w))' = \lambda^{-1}$，而且 $D(w)$ 满足

$$
\lim_{w\to 1} D(w) = \mathrm{e}^{-(b_1+a_0+\lambda r)}.
$$

根据假设 $\mathrm{e}^{b_1+a_0+\lambda r} > 1$，则对于 $w \ge t_{n_0}$ 和 $\zeta \in (\mathrm{e}^{-(b_1+a_0+\lambda r)}, 1)$，我们能够找到 n_0 满足 $D(w) < \zeta$。因此对于 $n \ge n_0$，

$$
I_n \le \zeta I_{n-1},
$$

这意味着

$$
\sum_{n=n_0}^{\infty} I_n \le I_{n_0} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j < \infty,
$$

所以

$$
\int_{t_{n_0}}^{1} \varrho(v) k(v) \mathrm{d}v < \infty, \tag{3.3}
$$

当 $0 < t < 1$时，有

$$
\int_0^t \varrho(v) k(v) \mathrm{d}v < \infty. \tag{3.4}
$$

我们可以看出(3.3)和(3.4)暗示着(3.2)，证毕。

推论 1.1 的证明：由于 $E\left[Z^{2+\delta}(1)\right] < \infty$，对于任意 $v>0$ 有 $E\left[Z^{2+\delta}(v)\right] < \infty$。因此对于 $v>0$，存在 $\delta_0 > 0$ 和 $r > 2$ 使得 $E\left[Z^{2r+\delta_0}(v)\right] < \infty$。根据马尔科夫不等式，可得

$$
\phi(v,l,\varepsilon) = P\left(\left|\bar{Z}_l(v) + \frac{Y(v)}{l} - \mathrm{e}^{\lambda v}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{E\left(\sqrt{l}\left(\bar{Z}_l(v) + \frac{Y(v)}{l} - \mathrm{e}^{\lambda v}\right)\right)^{2r}}{\varepsilon^{2r} l^r}.
$$

根据假设，

$$
\tilde{C}_\varepsilon = \sup_l E\left(\sqrt{l}\left(\bar{Z}_l(v) + \frac{Y(v)}{l} - \mathrm{e}^{\lambda v}\right)\right)^{2r} < \infty,
$$

而且对于任意的 $l > 1$，存在常数 C_ε 使得 $\phi(v,l,\varepsilon) \le C_\varepsilon l^{-r}$。另外

$$\lambda r+b_1+a_0=r\sum_{k=1}^{\infty}kb_k+b_1+a_0$$
$$=r\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)b_k+b_1+a_0>0.$$

定理 1.3 的证明：不失一般性，我们假设对任意的 $w_0=\mathrm{e}^{\theta_0}>1$ 有 $K=G(w_0)<\infty$。首先我们证明

$$L=\prod_{l=1}^{\infty}\left[H\left(k\left(w_0,l\right)\right)\right]<\infty. \tag{3.5}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty}\left[H\left(k\left(w_0,l\right)\right)-1\right]<\infty$ 等价于 $\prod_{l=1}^{\infty}\left[H\left(k\left(w_0,l\right)\right)\right]<\infty$，而且

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left[H\left(k\left(w_0,l\right)\right)-1\right]\le\sum_{l=1}^{\infty}\left[h'\left(k\left(w_0\right)\right)\left(k\left(w_0,l\right)-1\right)\right]$$
$$=h'\left(k\left(w_0\right)\right)\sum_{l=1}^{\infty}\left(k\left(w_0,l\right)-1\right)=C_5<\infty,$$

上式中用到 $k\left(w_0,l\right)-1\sim\dfrac{R\left(w_0\right)}{\mathrm{e}^{\lambda l}}$。因此(3.5)成立。根据性质 2.3，当 $t\ge1$ 时，

$$G(v,t)\le KL，\quad 0\le v\le k\left(w_0,t-1\right).$$

再者，当 $0\le v\le k\left(w_0,t-1\right)$ 根据性质 2.3

$$G(v,t)\le G\left(k\left(w_0,t-1\right),t\right)$$
$$\le G\left(w_0\right)\prod_{l=1}^{[t-1]}\left[h\left(k\left(w_0,l\right)\right)\right]\le KL,$$

由于

$$K(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[Z(t)-\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t+1)-1}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\right],$$

$$E\left[\mathrm{e}^{\theta K(t)}\mid Z(0)=1\right]=E\left[\mathrm{e}^{\theta\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[Y(t)-\frac{\mathrm{e}^{\lambda}(t+1)-1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\mathrm{e}^{a+\lambda}\right]}\mid Z(0)=1\right]\le G\left(\mathrm{e}^{\theta\mathrm{e}^{-\lambda t}},t\right).$$

因此当 $\theta\le\mathrm{e}^{\lambda t}\log k\left(w_0,t-1\right)$ 时，

$$E\left[\mathrm{e}^{\theta K(t)}\mid Z(0)=1\right]\le KL.$$

对于 $w_0>1$，当 $t\uparrow\infty$ 时我们可得 $k\left(w_0,t\right)\downarrow1$。根据性质 2.2

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda t}\log k\left(w_0,t-1\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda t}\left(k\left(w_0,t-1\right)-1\right)=\mathrm{e}^{\lambda}R\left(w_0\right),$$

并且上式是正的和有限的。因此我们能找到 $\theta_1>0$ 使得

$$C_1=\sup_{t\ge0}E\left[\mathrm{e}^{\theta_1K(t)}\right]<\infty.$$

定理 1.4 的证明：根据定理 1.3，我们先给出一个估计。假设当 $\theta\le\theta_1$ 时 $\phi(\theta)=E\left[\mathrm{e}^{\theta K}\right]=E\left[\mathrm{e}^{\theta(U+I)}\right]$。因此对于 $\theta\le\theta_1$，$\phi_1(\theta)=E\left[\mathrm{e}^{\theta U}\right]<\infty$ 和 $\phi_2(\theta)=E\left[\mathrm{e}^{\theta I}\right]<\infty$。如果 $\left\{U^{(i)};i\ge1\right\}$ 是 U 的独立同分布副本并且 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\left[U^{(i)}-1\right]$，$I$ 和 $I^{(1)}$ 是同分布的变量，则当 $\theta\le\theta_1$ 时，

$$
\begin{aligned}
E\left[\mathrm{e}^{\theta\frac{S_n+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{n}}}\right] &= E\left[\mathrm{e}^{\theta\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[U^{(i)}-1\right]+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \left(\phi_1\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\right)^n E\left[\mathrm{e}^{\theta\frac{I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\frac{\phi_1\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{\theta^2}{n}}\theta^2\right)^n E\left[\mathrm{e}^{\theta\frac{I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{n}}}\right],
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\lim_{w\to 0}\frac{\phi_1(w)\mathrm{e}^{-w}-1}{w^2}=\frac{1}{2}Var(U)<\infty,
$$

我们有

$$
\lim_{|w|\le 1}\left|\left(\phi_1(w)\mathrm{e}^{-w}-1\right)/w^2\right| =: c,
$$

$$
E\left[\mathrm{e}^{\theta\left(I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}\right)/\sqrt{n}}\right]\le E\left[\mathrm{e}^{\theta\left(I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}\right)}\right] =: C,
$$

令 $\theta_2=\min(\theta_1,1)$，则

$$
\sup_{|\theta_1|\le\theta_2}\left[\phi_1\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\sqrt{n}}}\right]^n \le \mathrm{e}^c =: L<\infty,
$$

对于 $x>0$，我们知道 $(1+x/n)^n\le\mathrm{e}^x$。因此

$$
E\left[\mathrm{e}^{\theta\frac{S_n+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{n}}}\right]\le CL =: Q<\infty,
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&K-K(t) \\
&=\lim_{v\to\infty}\left(K(t+v)-K(t)\right) \\
&=\lim_{v\to\infty}\left[\frac{Z(t+v)}{\mathrm{e}^{\lambda(t+v)}}-\frac{Z(t)}{\mathrm{e}^{\lambda t}}-\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t+1)}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t+2)}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t+v)}}\right)\right] \\
&=\lim_{v\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\frac{Z(t+v)}{\mathrm{e}^{\lambda v}}-Z(t)-\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{v\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{(v+1)\lambda}}+\cdots\right)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(v+1)}}+\cdots\right)\right] \\
&=\lim_{v\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\frac{Z(t+v)}{\mathrm{e}^{\lambda v}}+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(v+1)}}+\cdots\right)\right] \\
&\quad+\lim_{v\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[-Z(t)-\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda v}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(v+1)}}+\cdots\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$=\lim_{v\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\frac{\sum_{j=1}^{Z(t)}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{\mathrm{e}^{\lambda v}}+\frac{\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\mathrm{e}^{v\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)}\right]+\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[-Z(t)-\frac{\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\right]$$

$$=\lim_{v\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\frac{\sum_{j=1}^{Z(t)}\xi_{t,j}(v)+Y(v)}{\mathrm{e}^{\lambda v}}-\frac{\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda(v+1)}-1\right)}{\mathrm{e}^{v\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)}\right]+\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[-Z(t)-\frac{\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}+\frac{\mathrm{e}^{a+\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\sum_{j=1}^{Z(t)}U^{(j)}+I^{(1)}-Z(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\right),$$

其中 $\xi_{t,j}(v)$ 是 $Z(t)$ 粒子中第 j 种粒子在 $s+t$ 时刻的种群大小，$U^{(j)}$ 是第 j 个原始父变量在 t 时刻下降线上的极限随机变量，$I^{(1)}$ 和 I 是同分布变量。根据独立性可知，

$$P\left(\left|K-K(t)\right|\geq\varepsilon\mid\xi_t\right)=\psi\left(Z(t),\mathrm{e}^{\lambda t}\varepsilon\right),$$

其中，

$$\psi(l,r)=P\left(\sum_{j=1}^{l}\left(U^{(j)}-1\right)+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}\geq r\right).$$

另外，

$$P\left(S_l+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}\geq r\right)=P\left(\frac{S_l+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{l}}\geq\frac{r}{\sqrt{l}}\right)\leq E\left[\mathrm{e}^{\theta_2\frac{S_k+I^{(1)}+\mathrm{e}^{a+\lambda}}{\sqrt{l}}}\right]\mathrm{e}^{-\theta_2\frac{r}{\sqrt{l}}}\leq C_5\mathrm{e}^{-\theta_2\frac{r}{\sqrt{l}}},$$

因此，

$$P\left(K-K(t)\geq\varepsilon\right)=E\left[\psi\left(Z(t),\mathrm{e}^{\lambda t}\varepsilon\right)\right]\leq C_5E\left[\mathrm{e}^{-\theta_2\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\varepsilon}{\sqrt{Z(t)}}}\right]=C_5E\left[\mathrm{e}^{-\theta_2\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{2}\varepsilon\frac{1}{\sqrt{K(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\right)}}}}\right],$$

当 $\xi>0$，

$$E\left[\mathrm{e}^{-\xi\frac{1}{\sqrt{K(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\right)}}}\right]=\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi y}P\left(\frac{1}{\sqrt{K(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\right)}}\leq y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi y}P\left(K(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\right)\geq y^{-2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi y}P\left(\mathrm{e}^{\theta_1\left[K(t)+\mathrm{e}^{a+\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\right)\right]}\geq\mathrm{e}^{\theta_1y^{-2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$\leq\lambda C_6\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi y}\mathrm{e}^{-\theta_1y^{-2}}\mathrm{d}y=C_6\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{-\theta_1\xi^2z^{-2}}\mathrm{d}z,$$

因此，

$$P\left(K-K(t)\geq\varepsilon\right)\leq C_5C_6\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{-\theta_1\xi_t^2z^{-2}}\mathrm{d}z,$$

其中 $\xi_t=\theta_2\varepsilon\mathrm{e}^{\lambda t/2}$。对于任意的 $\xi>0$，

$$I(\xi)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{-\xi^2z^{-2}}\mathrm{d}z=\int_0^{l(\xi)}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{-\xi^2z^{-2}}\mathrm{d}z+\int_{l(\xi)}^{\infty}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{-\xi^2z^{-2}}\mathrm{d}z\leq\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{l(\xi)}}+\mathrm{e}^{-l(\xi)}.$$

选择 $l(\xi)=\xi^{2/3}$，则 $I(\xi)\leq 2\mathrm{e}^{-\xi^{2/3}}$。因此

$$P\left(\left|K-K(t)\right|\geq\varepsilon\right)\leq 2C_5C_6\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\theta_1}\theta_2\varepsilon\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}=C_7\mathrm{e}^{-\xi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{3}}},$$

其中 $\lambda=\left(\sqrt{\theta_1}\theta_2\right)^{2/3}$。类似的方法可以证明 $P\left(K-K(t)\leq\varepsilon\right)$ 的成立，证毕。

参考文献

[1] Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) Branching Processes. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65371-1

[2] Athreya, K.B. (1994) Large Deviation Rates for Branching Process—I. Single Type Case. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 779-790. https://doi.org/10.1214/aoap/1177004971

[3] Seneta, E. (1970) On the Supercritical Galton-Watson Process with Immigration. *Mathematical Biosciences*, **7**, 9-14. https://doi.org/10.1016/0025-5564(70)90038-6

[4] Liu, J. and Zhang, M. (2016) Large Deviation for Supercritical Branching Processes. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **32**, 893-900. https://doi.org/10.1007/s10114-016-5437-z

[5] Ney, P.E. and Vidyashankar, A.N. (2003) Harmonic Moments and Large Deviation Rates for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **13**, 475-489. https://doi.org/10.1214/aoap/1050689589