Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 720-730
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115087

一阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性

武若飞

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: wuruofei7@163.com

收稿日期：2021年4月6日；录用日期：2021年5月6日；发布日期：2021年5月13日

摘 要

本文考察了一阶非线性常微分边值问题

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t)), \qquad 0\le t\le 1\ , \\ u(0)=\ \ lu(1) \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 均为连续函数, 且 $\int_0^1 a(\theta)d\theta>0$, λ 为正参数, l 为常数且 $0<l<e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}$. 在非线性项 f 满足超线性, 次线性和渐近线性的条件下, 本文运用不动点指数理论获得了该问题正解的存在性。

关键词

正解，多解，不动点，锥

Existence of Positive Solutions for Nonlinear First-Order Ordinary Boudary Value Problems

Ruofei Wu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: wuruofei7@163.com

文章引用: 武若飞. 一阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 720-730.
DOI: 10.12677/pm.2021.115087

Received: Apr. 6^{th}, 2021; accepted: May 6^{th}, 2021; published: May 13^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we consider the existence of positive solutions for the nonlinear first-order ordinary boundary value problems

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = \lambda f(t, u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = lu(1) \end{cases}$$

where $f : [0, 1] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, $a : [0, 1] \to [0, \infty)$ are continuous functions and $\int_0^1 a(\theta)d\theta > 0$, λ is a positive parameter, l is a constant, and $0 < l \le e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}$. Under the assumption that the nonlinear term f satisfies superlinear, sublinear and asymptotic growth conditon, the existence of positive solutions of the problem is obtained by using the fixed-point index theory.

Keywords

Positive Solutions, Multiple Solutions, Fixed-Point, Cone

1. 引言

近年来, 一阶周期边值问题在经济金融领域, 生物种群的数量结构分析, 疾病的控制与防治等诸多方面都有着非常广泛的应用. 因此, 其正解的存在性引起许多国内外学者的关注, 目前已经取得一些成果 [1–12]. 例如, 2004 年, Peng [2] 研究了一阶周期边值问题

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < \omega, \\ x(0) = x(\omega) \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 $f : [0, \omega] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 该文运用锥拉伸与压缩不动点定理获得了如下结果:

定理 A 若

(A1) 存在一个正数 $M > 0$,使得 $Mx - f(t,x) \geq 0, x \geq 0, t \in [0,\omega]$,

(A2) $\underline{f}_{\infty} > 0, \overline{f}_0 < 0$

成立, 则问题 (1.1) 至少存在一个正解.

2016 年, Wang [3]等人运用拓扑度理论研究了一阶周期边值问题

$$\begin{cases} x'(t) + \ a(t)x(t) = f(t,x), & 0 < t < T, \\ x(0) = x(T) \end{cases} \tag{1.2}$$

的正解的存在性, 其中 $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 该文具体结果如下

定理 B 若存在两个正数 $0 < a < b$ 使得

(B1) $f(t, b < 0),\ t \in [0,T]$,

(B2) $f(t,x) > 0,\ (t,x) \in [0,T] \times [0,a]$,

(B3) $f(t,x) \geq -\kappa x,\ (t,x) \in [0,T] \times [0,b]$.

成立, 则问题 (1.2) 至少存在一个正解 $x^*,\ a \leq \|x^*\| \leq b$.

值得注意的是, 在问题 (1.2) 中, 当 $a(t) \equiv 0,\ t \in [0,1]$ 时, 该问题退化为(1.1). 此外, 以上两个问题都是边界条件系数为 1 的情形. 所以, 一个自然的问题是: 对更一般形式的一阶边值问题

$$\begin{cases} u'(t) + \ a(t)u(t) = \lambda f(t,u(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = lu(1) \end{cases} \tag{1.3}$$

是否存在正解. 若存在正解, 参数 λ 需要满足什么条件? 若无正解, 参数 λ 又需要满足什么条件? 基于以上工作, 本文将运用不动点指数理论研究一阶非线性常微分方程边值问题 (1.3) 正解的存在性.

本文总假定:

(H1) $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$为连续函数;

(H2) $a : [0,1] \to [0,\infty)$为连续函数, 且 $\int_0^1 a(\theta)d\theta > 0$;

(H3) $0 < l < e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}$ 为常数. $\lambda > 0$ 为参数;

记

$$f_0 = \lim_{s\to 0} \frac{f(t,s)}{s}, \qquad f_\infty = \lim_{s\to\infty} \frac{f(t,s)}{s}.$$

本文主要结果如下:

定理 1.1 假设 (H1)-(H3) 成立,

(a) 若 $f_0 = 0$ 或 $f_\infty = 0$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 至少存在一个正解.

(b) 若 $f_0 = \infty$ 或 $f_\infty = \infty$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 至少存在一个正解.

(c) 若 $f_0 = 0$ 且 $f_\infty = 0$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 至少存在两个正解.

(d) 若 $f_0 = \infty$ 且 $f_\infty = \infty$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 至少存在两个正解.

(e) 若 $f_0 < \infty$ 且 $f_\infty < \infty$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 无正解.

(f) 若 $f_0 > 0$ 且 $f_\infty > 0$, 则存在一个 $\lambda_0 > 0$,当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 无正解.

注 1 常数 l 的取值范围是为了保证算子的正性.

本文余下内容安排如下: 在第 2 部分, 我们给出相关引理及其证明; 在第 3 部分, 给出主要结果的证明及例子.

2. 预备知识

引理2.1 [4] 设 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 是一个锥. 对于$p > 0$, 定义 $K_p = \{u \in K : \|u\| = p\}$, 假设 $T : K_p \to K$ 是一个紧算子, 当 $u \in \partial K_p = \{u \in K : \|x\| = p\}$ 时, $Tx \neq x$.

(i) $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in \partial K_p$, 则

$$i(T, K_p, K) = 0,$$

(ii) $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in \partial K_p$, 则

$$i(T, K_p, K) = 1.$$

引理 2.2 假设 (H1)-(H3) 成立, 边值问题

$$\begin{cases} u'(t) + \ a(t)u(t) = \lambda h(t), \qquad 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = \ lu(1) \end{cases} \tag{1.4}$$

等价于积分方程

$$u(t) = \lambda \int_0^t h(s) e^{\int_t^s a(\theta)d\theta} ds + \lambda \frac{l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 h(s) e^{\int_t^s a(\theta)d\theta} ds.$$

证明 由 (1.4) 式得

$$e^{\int_0^t a(\theta)d\theta}(u'(t) + a(t)u(t)) = \lambda e^{\int_0^t a(\theta)d\theta} h(t),$$

$$(e^{\int_0^t a(\theta)d\theta} u(t))|_0^t = \lambda \int_0^t e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} h(s) ds,$$

则有

$$e^{\int_0^t a(\theta)d\theta} u(t) - u(0) = \lambda \int_0^t e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} h(s) ds,$$

带入边界条件可得

$$u(1)=\frac{\lambda\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}h(s)ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l},\ u(0)=\frac{\lambda l\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}h(s)ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l},$$

所以

$$u(t)=\lambda\int_0^t h(s)e^{\int_t^s a(\theta)d\theta}ds+\lambda\frac{l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 h(s)e^{\int_t^s a(\theta)d\theta}ds.$$

设 $X=C[0,1]$, 其在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. 设

$$K=\{u\in C[0,1]:\ u(t)\geq 0,\quad \min_{0\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\}$$

是 X 中的锥, 其中 $\sigma=le^{-\int_0^1 a(\theta)d\theta}$. 定义算子 $T_\lambda:\ K\to X$

$$T_\lambda u(t)=\lambda\int_0^t h(s)e^{\int_t^s a(\theta)d\theta}ds+\lambda\frac{l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 h(s)e^{\int_t^s a(\theta)d\theta}ds. \tag{1.5}$$

易见

$$\frac{\lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta-l}}\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}h(s)ds\leq T_\lambda u(t)\leq\frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds.$$

引理 2.3 假定 (H1)-(H3) 成立, 则 $T_\lambda(K)\subset K$, 且 $T_\lambda:K\to K$ 是一个紧算子.

证明 假设 $u\in K$, 则 $T_\lambda u(t)\geqslant 0$, $t\in[0,1]$, 且

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1}T_\lambda u(t)\geqslant\frac{\lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta-l}}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds\geq\sigma\|Tu(t)\|,$$

即$T_\lambda(K)\subset K$. 显然$T_\lambda:K\to K$是一个紧算子, 则问题(1.1)的解等价于算子方程$T_\lambda u=u$的不动点.

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明

(a). 假设 H(1)-H(3) 成立, 取 $p_1>0$, 当$u\in\partial K_{p_1}$时, 就有

$$\|T_\lambda u\|\geq\frac{\hat m_{p_1}\lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds.$$

其中 $\hat m_{p_1}=\min\limits_{\sigma p_1\leq u\leq p_1}\{f(t,u)\}$, 取

$$\lambda_0\geq\frac{p_1(e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l)}{\hat m_{p_1}l\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds},$$

当 $\lambda>\lambda_0$ 时,

$$\|T_\lambda u\|\geq\|u\|.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{p_1}, K) = 0.$$

若 $f_0 = 0$, 则存在一个 $0 < r_1 < \sigma p_1$, 当 $0 \le u \le r_1$ 时, $f(t,u) \le \varepsilon_1 u$, 其中

$$\frac{\varepsilon_1 \lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \le 1,$$

当 $u \in \partial K_{r_1}$时, 则有

$$\|T_\lambda u\| \le \frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds \le \|u\|.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{r_1}, K) = 1,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{p_1}/\mathring{K}_{r_1}, K) = -1.$$

若 $f_\infty = 0$, 则存在一个 $R_1 > p_1$,当 $u \ge R_1$ 时, $f(t,u) \le \varepsilon_1 u$, $u \in \partial K_{R_1}$, 则有

$$\|T_\lambda u\| \le \frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds \le \|u\|.$$

其中

$$\frac{R_1 \lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \le 1,$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{R_1}, K) = 0,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{R_1}/\mathring{K}_{p_1}, K) = -1,$$

则 T_λ 在 $K_{R_1}/\mathring{K}_{p_1}$ 或 $K_{p_1}/\mathring{K}_{r_1}$ 里有一个不动点,即 $T_\lambda u = u$. 问题 (1.1) 至少存在一个正解.

(b). 假设 (H1)-(H3) 成立, 取 $p_2 > 0$, 当$u \in \partial K_{p_2}$时, 就有

$$\|T_\lambda u\| \le \frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \hat{M}_{p_2}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds,$$

其中 $\hat{M}_{p_2} = 1 + \max\limits_{\sigma p_2 \le u \le p_2} \{f(t,u)\}$. 令

$$0 < \lambda_0 \le \frac{p_2 (e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l)}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \hat{M}_{p_2} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds},$$

当 $\lambda < \lambda_0$时,

$$\|T_\lambda u\| \le \|u\|,$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{p_2}, K) = 1.$$

若 $f_0 = \infty$, 则存在 $0 < r_2 < \sigma p_2$, 使得 $f(t,u) \geq M_1 u, 0 \leq u \leq r_2$, 其中

$$\frac{M_1 \lambda l \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \geq 1,$$

当 $u \in \partial K_{r_2}$ 时, 则有

$$\|T_\lambda u\| \geq \frac{\lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds \geq \|u\|.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{r_2}, K) = 0,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{p_2}/\mathring{K}_{r_2}, K) = -1.$$

若 $f_\infty = \infty$, 则存在 $\hat{R}_2 > p_2$ 使得 $f(t,u) \geq M_1 u, u \geq \hat{R}_2$, 取 $R_2 = \max\{2p_2, \hat{R}_2/\sigma\}$, $u \in \partial K_{R_2}$ 时

$$\min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \sigma \|u\| \geq \hat{R}_2,$$

所以

$$\|T_\lambda u\| \geq \|u\|, \quad u \in \partial K_{R_2}.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{R_2}, K) = 0,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{R_2}/\mathring{K}_{p_2}, K) = -1,$$

则 T_λ 在 $K_{R_2}/\mathring{K}_{p_2}$或 $K_{p_2}/\mathring{K}_{r_2}$ 里有一个不动点,即 $T_\lambda u = u$. 问题 (1.1) 至少存在一个正解.

(c). 假设 (H1)-(H3) 成立, 取 $p_3 > 0$, 当$u \in \partial K_{p_3}$时, 就有

$$\|T_\lambda u\| \geq \frac{\hat{m}_{p_3} \lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds,$$

其中 $\hat{m}_{p_3} = \min\limits_{\sigma p_3 \leq u \leq p_3} \{f(u)\}$, 取

$$\lambda_0 \geq \frac{p_3 (e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l)}{\hat{m}_{p_3} l \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}.$$

当 $\lambda > \lambda_0$ 时,

$$\|T_\lambda u\| \geq \|u\|,$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{p_3}, K) = 0.$$

若 $f_0 = 0$, 则存在 $0 < r_3 < \sigma p_3$, 使得 $f(t,u) \le \varepsilon_2 u$, $0 \le u \le r_3$, 其中

$$\frac{\varepsilon_2 \lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \le 1,$$

当 $u \in \partial K_{r_3}$时, 则有

$$\|T_\lambda u\| \le \frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 h(s) e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds \le \|u\|.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{r_3}, K) = 1,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{p_3}/\mathring{K}_{r_3}, K) = -1.$$

若 $f_\infty = 0$, 则存在 R_3 使得 $f(t,u) \le \varepsilon_2 u$, $u \ge R_3$, $u \in \partial K_{R_3}$, 则有

$$\|T_\lambda u\| \le \|u\|.$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{R_3}, K) = 1,$$

所以

$$i(T_\lambda, K_{R_3}/\mathring{K}_{p_3}, K) = 1,$$

则 T_λ 在 $K_{p_3}/\mathring{K}_{r_3}$, $K_{R_3}/\mathring{K}_{p_3}$ 里各有一个不动点, 即 $T_\lambda u = u$. 问题 (1.1) 至少存在两个正解.

(d). 假设 (H1)-(H3) 成立, 取 $p_4 > 0$, 当$u \in \partial K_{p_4}$时, 就有

$$\|T_\lambda u\| \le \frac{\lambda e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \hat{M}_{p_4}}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds,$$

其中 $\hat{M}_{p_4} = 1 + \max\limits_{\sigma p_4 \le u \le p_4} \{f(u)\}$,令

$$0 < \lambda_0 \le \frac{p_4 (e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l)}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} \hat{M}_{p_4} \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds}.$$

当 $\lambda < \lambda_0$时,

$$\|T_\lambda u\| \le \|u\|,$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda, K_{p_4}, K) = 1.$$

若 $f_0=\infty$, 则存在 $0<r_4<\sigma p_4$, 使得 $f(t,u)\geq M_2u, 0\leq u\leq r_4$, 其中

$$\frac{M_2\lambda l\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\geq 1,$$

当 $u\in\partial K_{r_4}$时, 则有

$$\|T_\lambda u\|\geq\frac{\lambda l}{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 h(s)e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds\geq\|u\|,$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda,K_{r_4},K)=0.$$

若 $f_\infty=\infty$, 则存在 $\hat{R}_4>p_4$, 使得 $f(t,u)\geq M_2u, u\geq R_4$. 取 $R_4=max\{2p_2,\hat{R}_4/\sigma\}$, $u\in\partial K_{R_4}$ 时

$$\min_{0\leq t\leq 1}u(t)\geq\sigma\|u\|\geq\hat{R}_4,$$

所以

$$\|T_\lambda u\|\geq\|u\|,\quad u\in\partial K_{R_4},$$

由引理 2.1 可得

$$i(T_\lambda,K_{R_4},K)=0,$$

所以

$$i(T_\lambda,K_{p_4}/\mathring{K}_{r_4},K)=1,\ i(T_\lambda,K_{R_4}/\mathring{K}_{p_4},K)=-1,$$

则 T_λ 在 $K_{p_4}/\mathring{K}_{r_4}$, $K_{R_4}/\mathring{K}_{p_4}$ 里各有一个不动点, 即 $T_\lambda u=u$. 问题 (1.1) 至少存在两个正解.

(e) 若 $f_0<\infty$ 且 $f_\infty<\infty$, 那么存在两个正数 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*$, 以及 $r_1^*<R_1^*$, 使得

$$f(t,u)\leq\varepsilon_1^*u,\quad u\in[0,r_1^*],$$

$$f(t,u)\leq\varepsilon_2^*u,\quad u\in[R_1^*,\infty).$$

令

$$\varepsilon_3^*=\{\max\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\ \max_{r_1^*\leq u\leq R_1^*}\frac{f(t,u)}{u}\},$$

所以

$$f(t,u)\leq\varepsilon_3^*u\quad u\in[0,\infty).$$

假设 $v(t)$ 是问题 (1.1) 的一个正解. 所以当 $t\in[0,1]$ 时, 就有 $v(t)=T_\lambda v(t)$, 令

$$\lambda_0=\frac{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}-l}{\varepsilon_3^* e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta}\int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta}ds},$$

当 $\lambda<\lambda_0$ 时,

$$\|v\|=\|T_\lambda v\|\leq\frac{\lambda e^{\int_0 1a(\theta)d\theta}\varepsilon_3^*}{e^{\int_0 1a(\theta)d\theta}-l}\int_0^1 e^{\int_0 sa(\theta)d\theta}ds\|v\|<\|v\|.$$

这是一个矛盾, 因此存在一个 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 无正解.

(f) 若 $f_0 > 0$ 且 $f_\infty > 0$, 那么存在两个正数 η_1^*, η_2^*, 以及 $r_2^* < R_2^*$, 使得

$$f(t,u) \geq \eta_1^* u \quad u \in [0, r_2^*],$$

$$f(t,u) \geq \eta_2^* u \quad u \in [R_2^*, \infty),$$

令

$$\eta_3^* = \max\{\eta_1^*, \eta_2^*, \max_{r_2^* \leq u \leq R_2^*} \frac{f(t,u)}{u}\},$$

所以

$$f(t,u) \geq \eta_3^* u \quad u \in [0, \infty).$$

假设 $v(t)$ 是 问题(1.1) 的一个正解, 所以当 $t \in [0,1]$ 时, 就有 $v(t) = T_\lambda v(t)$, 令

$$\lambda_0 = \frac{e^{\int_0^1 a(\theta)d\theta} - l}{\eta_3^* l \int_0^1 e^{\int_0^s a(\theta)d\theta} ds},$$

当 $\lambda > \lambda_0$ 时,

$$\|v\| = \|T_\lambda v\| \geq \frac{\lambda l \eta_3^*}{e^{\int_0 1 a(\theta)d\theta} - l} \int_0^1 e^{\int_0 s a(\theta)d\theta} ds \|v\| > \|v\|.$$

这是一个矛盾, 因此存在一个 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 问题 (1.1) 无正解, 证毕.

例 1 令问题 (1.3) 中常数 $l = \frac{1}{2}$, 线性项 $a(t) \equiv 1$, 线性项 $a(t) \equiv 1$, 非线性项 $f(t, u(t)) = t(u^2 + u^{\frac{1}{2}})$, 其中 λ 是一个正参数, 即

$$\begin{cases} u'(t) + \ u(t) = \lambda t(u^2 + u^{\frac{1}{2}}), \qquad 0 \leq t \leq 1, \\ \\ u(0) = \frac{1}{2} e u(1) \end{cases}$$

证明 对于 $f(t, u(t)) = t(u^2 + u^{\frac{1}{2}})$, $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, 故条件 (H1) 成立. 显然, $a(t) \equiv 1$ 且 $l = \frac{1}{2}e$ 满足条件 (H2) 与 (H3), 易得 $f_0 = \infty$, $f_\infty = \infty$. 取

$$\lambda_0 = \frac{p_2}{2\hat{M}_{p_2}(e-1)},$$

由定理 1.1 得, 当 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ 时, 问题 (1.3) 至少存在两个正解.

□

4. 基金项目

国家自然科学基金资助项目(12061064).

参考文献

[1] Lakshmikantham, V. (2008) Periodic Boundary Value Problems of First and Second Order Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, No. 3, 131-138.

[2] Peng, S.G. (2004) Positive Solutions for First Order Periodic Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **158**, 345-351. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.090

[3] Wang, F., Zhang, F., Zhu, H. L. and Li, S.J. (2016) Periodic Orbits of Nonlinear First-Order General Periodic Boundary Value Problem. *Filomat*, **30**, 3427-3434. https://doi.org/10.2298/FIL1613427W

[4] Wu, X.R. and Wang, F. (2008) Existence of Positive Solutions of Singular Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Mathematics in Practice and Theory*, No. 23, 227-232.

[5] Ma, R.Y., Chen, R.P. and He, Z.Q. (2014) Positive Periodic Solutions of Second-Order Differential Equations with Weak Singularities. *Applied Mathematics and Computation*, **232**, 97-103. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.142

[6] Torres, P.J. (2003) Existence of One-Signed Periodic Solutions of Some Second-Order Differential Equations via a Krasnoselskii Fixed Point Theorem. *Journal of Differential Equations*, **190**, 643-662. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00152-3

[7] Ma, R.Y., Gao, C.H. and Chen, R.P. (2010) Existence of Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Boundary Value Problems*, **2010**, Article No. 626054. https://doi.org/10.1155/2010/626054

[8] Jiang, D.Q., Chu, J.F. and Zhang, M.R. (2005) Multiplicity of Positive Periodic Solutions to Superlinear Repulsive Singular Equations. *Journal of Differential Equations*, **211**, 282-302. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.031

[9] Zhang, Z.X. and Wang, J.Y. (2003) On Existence and Multiplicity of Positive Solutions to Periodic Boundary Value Problems for Singular Nonlinear Second-Order Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 99-107. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00538-3

[10] Ma, R.Y., Xie, C.J. and Ahmed, A. (2013) Positive Solutions of the One-Dimensional p-Laplacian with Nonlinearity Defined on a Finite Interval. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 492026. https://doi.org/10.1155/2013/492026

[11] Wang, H.Y. (2003) On the Number of Positive Solutions of Nonlinear Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 287-306. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00100-8

[12] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.