Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 954-965
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115109

Hans汉斯

一类Q_p空间及其前对偶空间

刘祉瑞

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: liuzhirui310@163.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月20日；发布日期：2021年5月27日

摘 要

本文主要研究了一新Q型空间——$Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$空间。首先给出了$Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$空间的定义及若干基本性质，并定义新型帐篷空间，进而得到$Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$空间的前对偶空间及其原子分解。

关键词

$Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$空间，前对偶空间，原子分解

A Class of Q_p Spaces and Their Predual Spaces

Zhirui Liu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: liuzhirui310@163.com

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 20th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

In this paper, we introduce a new class of Q type spaces $Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$. We first investigate definition and some basic properties of $Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$, and establish a new type of tent space. Further, we obtain predual space and atomic decomposition of $Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$.

Keywords

$Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ Space, Predual Space, Atomic Decomposition

文章引用: 刘祉瑞. 一类Q_p空间及其前对偶空间[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 954-965.
DOI: 10.12677/pm.2021.115109

1. 引言

近年来，新 Q 型空间在经典调和分析和现代调和分析中扮演着重要的角色，作为经典函数空间 $BMO(\mathbb{R}^n)$，$Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 等空间的推广，被学者们广泛研究。早年间，$Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间就被学者广泛研究，参见[1] [2] [3] [4]。函数空间的对偶性问题很早就得到国内外学者的关注，许多经典空间的对偶空间也陆续建立起来。对偶结果提供了不同函数空间之间的联系，著名的结果 Fefferman [5]将 BMO 与实 Hardy 空间 H_1 的对偶联系起来，而 Lipschitz 空间与 H_p 空间是对偶的。2000 年 Essén-Janson-Peng-Xiao [6]引入了 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间的定义及其基本性质。2004 年 Dafni-Xiao [7]引入了一些帐篷空间，并将其用于解决分数阶 Carleson 测度和 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间的对偶性问题。2008 年 Yang-Yuan [8]引入了一类新的函数空间 $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$，统一和推广了 Triebel-Lizorkin 空间和 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间，通过建立 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间的 Carleson 测度刻画，确定了 Triebel-Lizorkin 空间与 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间之间的关系，从而回答了 Dafni-Xiao [7]提出的一个问题。

这些函数空间被广泛应用于研究流体力学中的基本方程例如不可压缩的 Navier-Stokes 方程、不可压缩磁流体力学方程，相关的研究进展参见文献[9] [10] [11] [12]。

本文的目的是引入新帐篷空间，并用它们来解决新 Q 型空间 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解及其对偶问题。利用 Hausdorff 容量([4] Definition4.0)的概念，我们将 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 定义一个前对偶空间，称之为“Hardy-Hausdorff”空间 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$，作为齐次 Sobolev 空间 $\dot{L}^2_{-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 的分布空间。

本文引入了一种新 Q 型空间，定义如下：

定义 1 令 $\gamma_1 \ge 0$，$\gamma_2 \ge 0$。若

$$\sup\left(l(I)\right)^{\gamma_1-n}\int_I\int_I\frac{\left|f(x)-f(y)\right|^2}{\left|x-y\right|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

则称 f 属于 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 空间，其中 I 为 $\mathbb{R}^n$ 上平行于坐标轴的方体。

2. $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质

在本节当中，我们给出 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 的一些基本性质，以及 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 空间的等价刻画如下：

引理 1 令 $\gamma_1 \ge 0$，$\gamma_2 \ge 0$。若

$$\sup_I\left(l(I)\right)^{\gamma_1-n}\int_{|y|<l(I)}\int_I\left|f(x+y)-f(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y|^{n+\gamma_2}}<\infty$$

则 $f\in Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$。

引理 2 令 $\gamma_1 \ge 0$，$\gamma_2 \ge 0$。

1) 设 $\{\gamma_1,\gamma_2\}$ 和 $\{k_1,k_2\}$ 为两常数对，其中 $\gamma_1-\gamma_2=\gamma_1'-\gamma_2'$。若 $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$，$\gamma_2'>\gamma_2$，则 $Q^{k_2}_{k_1}(\mathbb{R}^n)\subset Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$。

2) 若 $\gamma_2\in(-\infty,0)$，则 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)\subset BMO^{\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$，其中 $BMO^{\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 的定义为：

$$\sup_I\left(l(I)\right)^{\gamma_1-\gamma_2-2n}\int_I\int_I\left|f(x)-f(y)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

I 为 $\mathbb{R}^n$ 上平行于坐标轴的方体。

引理 3 令 $n\ge 2$，$\gamma_1,\gamma_2\ge 0$。

1) 若$1\le q\le 2$，$0<\gamma_1<1$，则$\dot{B}^{\frac{\gamma_2}{2}}_{\frac{n}{\gamma_1/2},q}\left(\mathbb{R}^n\right)\subseteq Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$。

2) 令$1\le q\le\infty$，$\gamma_1,\gamma_2\ge 0$。若$\gamma_1-\gamma_2=\dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{2}$，则$\dot{B}^{\gamma_1}_{\frac{n}{\gamma_2},q}\left(\mathbb{R}^n\right)\subseteq Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$。

引理 4 任取$N\in\mathbb{N}$，则存在一个函数$\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$使得以下条件成立：

1) $\sup p(\phi)\subset\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 1\right\}$；

2) ϕ是径向函数；

3) $\phi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$；

4) 若$\gamma\in\mathbb{N}^n$，则$\int_{\mathbb{R}^n}x^\gamma\phi(x)\mathrm{d}x=0$，其中$x^\gamma=x_1^{\gamma^1}x_2^{\gamma^2}\cdots x_n^{\gamma^n}$，$|\gamma|=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$；

5) 若$\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，则$\int_0^\infty\left(\hat{\phi}(t\xi)\right)^2\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=1$。

定理 1 令ϕ为满足上述引理的一个函数，并且满足$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\mathrm{d}x=0$，$0\le\gamma_1<n$，$\gamma_2\ge 0$。若函数$f\in Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$，则$\mathrm{d}\mu_{f,\phi,\gamma_1,\gamma_2}(t,x)=\left|\left(f*\phi_t\right)(x)\right|^2 t^{-1-\gamma_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$是一个$\left(1-\gamma_1/n\right)-$Carleson 测度。

证明 由$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\mathrm{d}x=0$，则有$\left(f*\phi_t\right)(x)=\int_{|y|<t}\left(f(x-y)-f(x)\right)\phi_t(y)\mathrm{d}y$。根据 Minkowski 不等式和 Fubini 定理得：

$$\begin{aligned}\mu_{f,\phi,\gamma_1,\gamma_2}(S(I))&\le\int_0^{l(I)}\left(\int_{|y|<t}\left\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\right\|_{L^2(I)}\left|\phi_t(y)\right|\mathrm{d}y\right)^2 t^{-1-\gamma_2}\mathrm{d}t\\&\le C\int_{|y|<l(I)}\int_I\frac{\left|f(u-y)-f(u)\right|^2}{|y|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}y\\&\le C\int_{3I}\int_{3I}\frac{\left|f(x)-f(y)\right|^2}{|x-y|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中C为任意常数。

定义 2 令$\gamma_1\ge 0$且$\gamma_2\ge 0$，我们定义$T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$为$\mathbb{R}^{n+1}_+$上的全体 Lebesgue 可测函数$f$的类，且满足：

$$\|f\|_{T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}}=\sup_{B\subset\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|^{1-\gamma_1/n}}\int_{T(B)}\left|f(t,y)\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{1+\gamma_2}}\right)^{1/2}<\infty$$

其中B为$\mathbb{R}^n$上的球，$T(B)$为球B上的帐篷，定义为：

$$T(B)=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+:x\in B\left(x_0,r\right),0<t<r_B\right\}。$$

下面我们定义帐篷空间的原子分解：

定义 3 令$\gamma_1\ge 0$且$\gamma_2\ge 0$，在$\mathbb{R}^n$上存在一个函数a，使得a支于帐篷$T(B)$，且满足：

$$\int_{T(B)}\left|a(t,y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\le\frac{1}{|B|^{1-\gamma_1/n}}$$

则称a为$\mathbb{R}^{n+1}_+$上的$T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$原子，其中B为$\mathbb{R}^n$上的球。

下面我们引入$T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$的对偶空间$T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$：

定义 4 令$\gamma_1\ge 0$且$\gamma_2\ge 0$，设f为$\mathbb{R}^{n+1}_+$上的全体 Lebesgue 可测函数，且满足如下条件：

$$\|f\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}=\inf_\omega\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left|f(t,x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}<\infty$$

则称为$f\in T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$。其中，$\omega$为$\mathbb{R}^{n+1}_+$上满足$\int_{\mathbb{R}^n}N\omega\,\mathrm{d}\Lambda^\infty_{n-\gamma_1}\le 1$的全体非负 Borel 可测函数。

引理 5 若 $\sum_j \left|g_j\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} < \infty$，则 $g = \sum_j g_j \in T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 且

$$\left|g\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} \le \sqrt{C_1^{-1}C_2}\sum_j \left|g_j\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}$$

其中 C_1^{-1}, C_2 为常数。

引理 6 令 $\gamma_1 \ge 0$ 且 $\gamma_2 \ge 0$

1) 若 $f \in T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$，当且仅当存在一个 $T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 原子序列 a_j 和一个 l_1 序列使得 $f = \sum_j \lambda_j a_j$。更进一步，

$$\left|f\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} \approx \inf\left\{\sum_j \left|\lambda_j\right| : f = \sum_j \lambda_j a_j\right\},$$

等式右边定义了一个 $T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 空间上的范数，使得 $T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 空间成为 Banach 空间。

2) 若 $f \in T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$，$g \in T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$，则不等式

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left|f(t,y)g(t,y)\right| \frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t} \le C\left\|f\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}\left\|g\right\|_{T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}}$$

成立。

3) $T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 空间的 Banach 对偶可由 $T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$ 空间在如下条件：

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} f(t,y)g(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}$$

成立，来等价定义。

3. $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的前对偶空间

定义 5 令 ϕ 为满足引理 4 的一个函数，且 $\gamma_1 \ge 0$，$\gamma_2 \ge 0$，满足如下条件：

$$\left\|f\right\|_{HH^1_{\gamma_1,\gamma_2}}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\|f * \phi_t(\cdot)\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} < \infty$$

的全体分布类 $f \in L^2_{-\frac{n}{2}}\left(\mathbb{R}^n\right)$，我们称之为 Hardy-Hausdorff 空间，记作 $HH^1_{\gamma_1,\gamma_2}\left(\mathbb{R}^n\right)$。

定理 2 $\left\|\cdot\right\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}}$ 是一个准范数，更确切来讲在这个范数下 $HH^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 是完备的。

证明 根据 $\left\|\cdot\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}$ 的相应性质和 $\rho_\phi(t,x) = f * \phi_t(x)$ 的线性，我们可得 $\left\|\cdot\right\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}}$ 是一个准范数。

设 $\left\{f_j\right\}$ 是一个 Cauchy 列，由引理 3 和 Calderon 再生公式[13]可得 $L^2_{-\frac{n}{2}}\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$。对任意 $\psi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$，

$$\begin{aligned}\left|f_j - f_k,\psi\right| &\le C\left\|\rho_\phi\left(f_j - f_k\right)\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}\left\|\phi_t * \psi\right\|_{T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}} \\ &\le C\left\|\rho_\phi\left(f_j - f_k\right)\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}\left\|\psi\right\|_{L^2_{\frac{n}{2}}\left(\mathbb{R}^n\right)}\end{aligned}$$

所以 $\left\{f_j\right\}$ 在 $\dot{L}^2_{-\frac{n}{2}+\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上是一个 Cauchy 列。由完备性可知，在 $\dot{L}^2_{-\frac{n}{2}+\gamma_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 空间中，$f = \lim f_n$。故存在一个子列使得在 $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中，$f = f_1 + \sum_{j\ge 1}\left(f_{j+1} - f_j\right)$ 且满足 $\sum\left\|f_{j+1} - f_j\right\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}\left(\mathbb{R}^n\right)} < \infty$，那么

$$\left|\rho_\phi(f)\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} \le C\left(\left|\rho_\phi\left(f_1\right)\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}} + \sum\left|\rho_\phi\left(f_{j+1} - f_j\right)\right|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}\right) < \infty$$

且 $f \in HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}\left(R^n\right)$。

定义 6 令 $\gamma_1 \ge 0$ 且 $\gamma_2 \ge 0$，存在一缓增分布 a 支于方体 I，且满足如下两个条件：

1) 对任意 $\psi \in \mathcal{S}(R^n)$，有 $|a,\psi| \le diam(I)^{-\frac{n}{2}+\gamma_1}\left(\int_I\int_I \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^{n+\gamma_1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$；

2) 对任意 $\psi \in \mathcal{S}(R^n)$，有 $\langle a,\psi\rangle = 0$。

则称分布 a 为一个 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 原子。

定理 3 令 $\gamma_1 \ge 0$ 且 $\gamma_2 \ge 0$，$\mathbb{R}^n$ 上的缓增分布 $f \in HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 原子 $\{a_j\}$ 和 l_1 序列 $\{\lambda_j\}$，使得 $f=\sum_j \lambda_j a_j$ 在分布意义下成立。更确切地说，

$$\|f\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)} \approx \inf\left\{\sum_j|\lambda_j| : f=\sum_j\lambda_j a_j\right\}$$

证明 1) 充分性。对任意 $\varepsilon\in(0,2)$，令 $\omega(t,x)=\kappa(l(I))^{-n+\gamma_1}\min\left\{1,\left(\frac{l(I)}{\sqrt{(x-x_I)^2+t^2}}\right)^{n-\gamma_1+\varepsilon}\right\}$，其中 κ 为常数，I 为 a 的支集，x_I 为 I 的中心。

所以，

$$N\omega(x)\le\kappa(l(I))^{-n+\gamma_1}\min\left\{1,\left(\frac{\sqrt{2}l(I)}{|x-x_I|}\right)^{n-\gamma_1+\varepsilon}\right\}$$

令 $B_I=B(x_I,diam(I))$，$E_I=(0,diam(I))\times B_I$ 且 $E_I^c=\mathbb{R}^{n+1}_+\setminus E_I$。

假设 S_a 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 $a*\phi_t(x)$ 的支集，所以

$$\int_{R^{1+n}_+}|a*\phi_t(x)|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}=\left(\int_{E_I}+\int_{E_I^c\cap S_a}\right)|a*\phi_t(x)|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}$$

因此，存在一个中心为 $(0,x_I)$ 的半球覆盖 E_I，由此可得 $\omega^{-1}\le C(l(I))^{n-\gamma_1}$。

所以，

$$\begin{aligned}\int_{E_I}|a*\phi_t(x)|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}&\le(l(I))^{n-\gamma_1}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{a}(\xi)|^2|\hat{\phi}(t\xi)|^2\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le(l(I))^{n-\gamma_1}\|a\|_{\dot{L}^2_{-\gamma_2/2}}(\mathbb{R}^n)\le 1\end{aligned}$$

对 $E_I^c\cap S_a$ 上的积分，有

$$|x-z|\ge|x-x_I|-diam(I)/2\ge t$$

且 $a*\phi_t(x)=\int a(z)\phi_t(x-z)\mathrm{d}z=0$。

因此，

$$\begin{aligned}|a*\phi_t(x)|&\le\|a\|_{\dot{L}^2_{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}-1}(\mathbb{R}^n)}\|\phi_t^x\|_{\dot{L}^2_{\frac{n}{2}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}+1}(\mathbb{R}^n)}\\&\le diam(I)t^{-\left(n+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}+1\right)}\end{aligned}$$

易知 $t\approx\sqrt{|x-x_I|^2+t^2}:=r(t,x)>diam(I)$，所以

$$\omega^{-1}(t,x)\approx\kappa^{-1}(l(I))^{n+\gamma_1}\frac{t^{n-\gamma_1+\varepsilon}}{(l(I))^{n-\gamma_1+2+\varepsilon}}\le C(l(I))^{-\varepsilon}t^{n-\gamma_1+\varepsilon}$$

综上所述，

$$\begin{aligned}\int_{E_I^c\cap S_a}\left|a*\phi_t(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}} &\le C\left(l(I)\right)^{2-\varepsilon}\int_{E_I^c\cap S_a}t^{\varepsilon-n-3}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &\le C\left(l(I)\right)^{2-\varepsilon}\int_{r(t,x)\ge diam(I)}r(t,x)^{\varepsilon-n-3}\mathrm{d}t\\ &\le C\left(l(I)\right)^{2-\varepsilon+\varepsilon-2}\le 1\end{aligned}$$

2) 必要性。假设 $f\in HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}\left(\mathbb{R}^n\right)$，则 $f^{\varepsilon,N}(x)=\int_{S^{\varepsilon,N}}F(t,y)\phi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}$，其中 $S^{\varepsilon,N}$ 定义为：

$$\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^n:\varepsilon\le t\le N\right\}。$$

存在一个 $\omega\ge 0$，使得 $\int_{\mathbb{R}^n}N\omega\,\mathrm{d}\Lambda^{(\infty)}_{n-\gamma_1}\le 1$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\left|F(t,x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\le 2\left\|F\right\|_{T^1_{\gamma_1,\gamma_2}}$$

其中 $F=\sum F\chi_{T_{j,k}}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 几乎处处成立。

设 $T_{j,k}=S^*\left(I_{j,k}\right)\bigcup_{m>k}\bigcup_l S^*\left(I_{l,m}\right)$，令 $T_{j,k}$ 覆盖 $E_k=\left\{N\omega>2^k\right\}$，其中 $S^*\left(I_{j,k}\right)=\left\{(t,y)\in\mathbb{R}^{n+1}_+:y\in I_{j,k},t<2diam\left(I_{j,k}\right)\right\}$，$T_{j,k}$ 有至多个不相交的内部。

令 $g^{\varepsilon,N}_{j,k}(x)=\int_{S^{\varepsilon,N}\cap T_{j,k}}F(t,y)\phi_t(x-y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}$，我们需证分布 $g_{j,k}$ 使得当 $\varepsilon\to 0$ 时，$g^{\varepsilon,N}_{j,k}\to g_{j,k}$，当 $N\to\infty$ 时，$f=\sum_{j,k}g_{j,k}$。

因此，

$$\begin{aligned}\left|g^{\varepsilon,N}_{j,k},\psi\right| &=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{S^{\varepsilon,N}\cap T_{j,k}}F(t,y)\phi_t(t-y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}\right)\psi(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\le 2^{(k+1)/2}\left(\int_{S^{\varepsilon,N}\cap T_{j,k}}\left|F(t,y)\right|^2\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\times\left(\int_{3I^*_{j,k}}\int_{3I^*_{j,k}}\frac{\left|\psi(x)-\phi(y)\right|^2}{\left|x-y\right|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\right)^{1/2}\end{aligned}$$

同样地，对于 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 和 $N_1>N_2$，可得

$$\left|g^{\varepsilon_1,N_1}_{j,k}-g^{\varepsilon_2,N_2}_{j,k},\psi\right|\le C_k\left(\int_{\left(S^{\varepsilon_1,N_1}\setminus S^{\varepsilon_2,N_2}\right)\cap T_{j,k}}\left|F(t,y)\right|^2\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\left\|\psi\right\|_{\dot{L}^2_{\gamma_2/2}\left(\mathbb{R}^n\right)}$$

综上所述，当 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ 且 $N_1,N_2\to\infty$ 时，$\left\|g^{\varepsilon_1,N_1}_{j,k}-g^{\varepsilon_2,N_2}_{j,k}\right\|_{\dot{L}^2_{\gamma_2/2}\left(\mathbb{R}^n\right)}\to 0$。

所以，在分布意义下 $g^{\varepsilon,N}_{j,k}\to g_{j,k}\in\dot{L}^2_{\gamma_2/2}\left(\mathbb{R}^n\right)$，$g_{j,k}$ 支于 $I^*_{j,k}=5\sqrt{n}I_{j,k}$ 且满足

$$\left\|g_{j,k}\right\|_{\dot{L}^2_{\gamma_2/2}\left(3I^*_{j,k}\right)}\le C2^{(k+1)/2}\left(\int_{T_{j,k}}\left|F(t,y)\right|^2\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}$$

令 $a_{j,k}=g_{j,k}\left\|g_{j,k}\right\|^{-1}_{\dot{L}^2_{-\gamma_2/2}\left(3I^*_{j,k}\right)}\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{\frac{\gamma_1-n}{2}}$，$\lambda_{j,k}=\left\|g_{j,k}\right\|_{\dot{L}^2_{-\gamma_2/2}\left(3I^*_{j,k}\right)}\times\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{\frac{\gamma_1-n}{2}}\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{\frac{n-\gamma_1}{2}}$，

则

$$\begin{aligned}\left|a_{j,k},\psi\right| &\le C\frac{1}{\left\|g_{j,k}\right\|_{\dot{L}^2_{-\gamma_2/2}\left(3I^*_{j,k}\right)}}\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{\frac{\gamma_1-n}{2}}\times\left(\int_{S^{\varepsilon,N}\cap T_{j,k}}\left|F(t,y)\right|^2\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\ &\times\left(\int_{3I^*_{j,k}}\int_{3I^*_{j,k}}\frac{\left|\psi(x)-\phi(y)\right|^2}{\left|x-y\right|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\end{aligned}$$

所以 $a_{j,k}$ 为 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 原子。

由 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}|\lambda_{j,k}| &\le C\left(\sum_{j,k}2^{k+1}\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{n-\gamma_1}\right)^{1/2}\left(\sum_{j,k}\int_{T_{j,k}}|F(t,y)|^2\,\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\ &\le C\left(\sum_{j,k}2^{k+1}\Lambda^{(\infty)}_{n-\gamma_1}\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{1/2}\left(\sum_{j,k}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|F(t,y)|^2\,\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\ &\le C\left(\sum_k\int_{E_k}N\omega(x)\mathrm{d}\Lambda^{(\infty)}_{n-\gamma_1}\right)^{1/2}\|f\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

所以 $\sum g_{j,k}=\sum\lambda_{j,k}a_{j,k}$。

任意 $0<\varepsilon<N$， $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，

$$\begin{aligned}\left|\left\langle g^{\varepsilon,N}_{j,k}\right\rangle\right| &\le C2^{(k+1)/2}\left(\int_{T_{j,k}}|F(t,y)|^2\,\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\left(\int_{3I^*_{j,k}}\int_{3I^*_{j,k}}\frac{|\psi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\right)^{1/2}\\ &\le C2^{(k+1)/2}\left(l\left(3I^*_{j,k}\right)\right)^{\frac{n-\gamma_1}{2}}\left(\int_{T_{j,k}}|F(t,y)|^2\,\omega^{-1}(t,y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\|\psi\|_{Q_{\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C\|f\|_{HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}}\|\psi\|_{Q_{\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

所以 $g=f$， $\lim_{\varepsilon\to0,N\to\infty}\sum_{j,k}g^{\varepsilon,N}=\sum_{j,k}g_{j,k}=g$。

另外，

$$\sum_{j,k}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}1_{S^{\varepsilon,N}\cap T_{j,k}}F(t,y)\phi_t*\psi(y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}\int_{S^{\varepsilon,N}}F(t,y)\phi_t*\psi(y)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}y}{t}=\left\langle f^{\varepsilon,N},\psi\right\rangle$$

所以在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上， $\sum_{j,k}g^{\varepsilon,N}_{j,k}=f^{\varepsilon,N}$ 且 $g=f$。这就完成了定理 3 的证明。

定理 4 1) $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的一个非负可测函数 ω，满足条件 $\int_{\mathbb{R}^n}N\omega\mathrm{d}\Lambda^{(\infty)}_{n-\gamma_1}\le1$，若

$$\sigma_\delta(a,\omega)=\sup_{|y|\le\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|a*\psi_t(x-y)-a*\psi_t(x)|^2\,\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\to0$$

成立，则称 a 是一个 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 原子。

2) $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty_0$ 在 $HH^1_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的。

证明 1) 对任意 $\varepsilon\in(0,2)$， ω 的定义与定理 3 相同， $y\in B(0,\delta)$， $x\in\mathbb{R}^n$，可得 $a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)=\left\langle a,\phi^{x-y}_t-\phi^x_t\right\rangle$，且

$$\left|\left(\widehat{\phi^{x-y}_t}-\widehat{\phi^x_t}\right)(\xi)\right|=\left|1-e^{2\pi iy\cdot\xi}\right|\left|\widehat{\phi}_t(\xi)\right|\le C\min\langle2,\delta|\xi|\rangle\left|\widehat{\phi}_t(\xi)\right| \tag{1}$$

另外，

$$\begin{aligned}&\sup_{|y|<\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)|^2\,\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\ &\le\left(\left(\sup_{|y|<\delta}\int_{E_I}+\sup_{|y|<\delta}\int_{E^c_I\cap S_{a,\delta}}\right)|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)|^2\,\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

其中， $B_I=B(x_I,2diamI)$， $E_I=(0,2diam(I))\times B_I$。

由 Fourier 变换，当 $\delta \to 0$ 时，第一部分积分可得

$$\begin{aligned}&\sup_{|y|<\delta}\int_{E_I}\left|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le C\left(l(I)\right)^{n-\gamma_1}\sup_{|y|<\delta}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|a*\left(\phi_t^y-\phi_t\right)(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le C\left(l(I)\right)^{n-\gamma_1}\sup_{|y|<\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{a}(\xi)\right|^2\delta^2|\xi|^2|\xi|^{-\gamma_2}\int_0^\infty\left|\hat{\psi}(t)\right|^2\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi}{t^{1-\gamma_2}}\to 0\end{aligned}$$

当 $x\notin B_I$，$t\le|x-x_I|/4$ 时，$|y|<diam(I)<\frac{1}{2}|x-x_I|$，

因此，

$$|x-y-z|\ge\frac{3}{4}|x-x_I|\ge t$$

所以，$|x-z|\ge\frac{3}{4}|x-x_I|>t$，且 $a*\left[\phi_t(x-y)-\phi_t(x)\right]=0$。

另外，

$$\begin{aligned}\left|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)\right|&\le C\|a\|_{\dot{L}^2_{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}-1}(\mathbb{R}^n)}\left\|\phi_t^{x-y}-\phi_t^x\right\|_{\dot{L}^2_{\frac{n}{2}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}+1}(\mathbb{R}^n)}\\&\le Cdiam(I)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{\phi_t}(\xi)\right|^2|\xi|^{n+\gamma_2-\gamma_1+4}\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}\\&\le Cdiam(I)\delta t^{-\left(n+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}+2\right)}\end{aligned}$$

由上式和 $\omega^{-1}\lesssim t^{n-\gamma_1+\varepsilon}$ 可得，当 $\delta\to 0$ 时

$$\begin{aligned}&\int_{E_I^c\cap S_{a,\delta}}\left|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le C\delta^2\left(l(I)\right)^{2-\varepsilon}\int_{E_I^c\cap S_{a,\delta}}t^{-n-5+\varepsilon}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&\le C\delta^2\left(l(I)\right)^{2-\varepsilon}\int_{l(I)}^\infty\lambda^{\varepsilon-5}\mathrm{d}\lambda\to 0\end{aligned}$$

所以，当 $\delta\to 0$ 时，$\sigma_\delta(a,\omega)\to 0$。

2) 任取 $\eta\in C^\infty(R^n)$，支集在球 $B(0,1)$ 上，且满足 $\int\eta=1$。可知在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中，当 $j\to\infty$ 时，$a*\eta_j\to a$。对 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的任意非负可测函数 ω，其满足条件 $\int_{(\mathbb{R}^n)}N\omega\,\mathrm{d}\Lambda_{n-\gamma_1}^{(\infty)}\le 1$，可得

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|a*\eta_j*\phi_t(x)-a*\phi_t(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\&\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\eta_j(y)\right|\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|a*\phi_t(x-y)-a*\phi_t(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\\&\le C\sigma_{\frac{1}{j}}(a,\omega)\end{aligned}$$

由 1)可知当 j 足够大时，对任意 $\varepsilon>0$，存在一个 ω，使得 $\sigma_{\frac{1}{j}}(a,\omega)<\varepsilon$。

取下确界可得 $\left\|a*\eta_j-a\right\|_{HH_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$，也就是在 $HH_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$ 中，$a*\eta_j\to a$。

因此，对任意 $f\in HH_{-\gamma_1,\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$，可以用原子的有限和来近似。这就完成了定理 4 的证明。

定理 5 将算子 π_ψ 定义为

$$\pi_\psi(F)=\int_0^\infty F(t,\cdot)*\psi_t\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{2}$$

1) 算子 π_ψ 是从 $T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$ 到 $Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}$ 的有界且满射算子。更确切地，若 $F\in T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}$，则(2)式右边积分收敛于一个函数 $f\in Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f\|_{Q^{\gamma_2}_{\gamma_1}}\lesssim\|F\|_{T^\infty_{\gamma_1,\gamma_2}}$，任意 f 都可以这样表示。

2) 算子 π_ψ 最初定义为一个函数 $F\in T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$，从 $T^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 到 $HH^1_{\gamma_1,\gamma_2}$ 延拓为一个有界且满射算子。F 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上具有紧支集。

证明 1) 令 $f=\pi_\psi(F)$，定义

$$D_{f,\gamma_1,\gamma_2}(I)=\left[l(I)\right]^{\gamma_1-n}\int_{|y|<l(I)}\int_I\left|f(x+y)-f(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y|^{n+\gamma_2}}$$

下证 $\sup_I D_{f,\gamma_1,\gamma_2}(I)<\infty$。

令 $f_y=x\to f(x+y)$，可得 $f_y-f=\int_0^\infty\left[\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)_y-\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上成立。

取方体 I， $y\in B(0,l(I))$，对 $g\in C^0_\infty(I)$，可得

$$\begin{aligned}\left|\langle f_y-f,g\rangle\right|&\le\int_0^{|y|}\int_{\mathbb{R}^n}\left|F(t,x)\right|\left|\psi_t*(g_{-y}-g)(x)\right|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t}\\&=\int_{|y|}^{l(I)}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)(x+y)-\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)(x)\right|\left|g(x)\right|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t}\\&\quad+\int_{l(I)}^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|F(t,x)\right|\left|\psi_t(g_{-y}-g)(x)\right|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t}\\&:=A_1(g,y)+A_2(g,y)+A_3(g,y)\end{aligned}$$

所以，对于 A_1，若 $|y|<l(I)$

$$\begin{aligned}A_1(g,y)&=\int_0^{|y|}\int_{5I}\left|F(t,x)\right|\left|\psi_t*(g_{-y}-g)(x)\right|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t}\\&\le\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(I)}\int_0^{|y|}\left(\int_J\left|F(t,x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

对于 A_2，若 $|y|<t$，由变量替换可得

$$\begin{aligned}\left|\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)(x+y)-\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)(x)\right|&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_t(y+z)-\psi_t(z)\right|\left|F(t,x-tz)\right|\mathrm{d}z\\&\le t^{-1}|y|\sup_{|\xi|\le1}\left|\nabla\psi(\xi)\right|\int_{|z|\le2}\left|F(t,x-tz)\right|\mathrm{d}z\\&\le C_\psi t^{-1}|y|\int_{|z|\le2}\left|F(t,x-tz)\right|\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，$C_\psi=\sup|\nabla\psi|<\infty$。

由 Fubinis 定理可得

$$\begin{aligned}A_2(g,y)&\le C_\psi|y|\int_{|y|}^{l(I)}\int_{|z|\le2}\int_I\left|F(t,x-tz)\right|\left|g(x)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\&\le CC_\psi|g|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|y|\int_{|y|}^{l(I)}\int_{|z|\le2}\left(\int_I\left|F(t,x-tz)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\&=CC_\psi|g|_{L^2(\mathbb{R}^n)}|y|\int_{|y|}^{l(I)}\left(\int_I\left|F(t,x-tz_t)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\end{aligned}$$

其中 $|z_t|\le2$， $C=Vol(B(0,2))$。

对于 A_3，令 $G_y(t,x)=\psi_t*(g_{-y}-g)(x)1_{(t,x):t\ge|y|}$，根据([4], Theorem5.4)

$$A_3=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|F(t,x)G_y(t,x)\right|\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}{t}\le\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}\|G_y\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{1}}$$

下证 $G_y\in T_{\gamma_1,\gamma_2}^{1}$，参见([9] Lemma3.17)。

对任意 $\varepsilon\in(0,2)$，令

$$\omega(t,x)=\kappa\left(l(I)\right)^{-n+\gamma_1}\min\left\{1,\left(\frac{l(I)}{\sqrt{(x-x_I)^2+t^2}}\right)^{n-\gamma_1+\varepsilon}\right\}$$

其中 $0<\gamma_1<\varepsilon<2$，κ 是常数。

若 $S_y:=\sup p(G_y)$，则 $\omega^{-1}(x)\approx l(I)^{-\varepsilon}t^{n-\gamma_1+\varepsilon}$。

由此可得，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|G_y(t,x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}&=\int_{l(I)}^{\infty}\int_{S_y}\left|\psi_t*(g_{-y}-g)(x)\right|^2\omega^{-1}(t,x)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le l(I)^{-\varepsilon}\int_{l(I)}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_t*(g_{-y}-g)(x)\right|^2\mathrm{d}x t^{n-\gamma_1+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}\\&\le l(I)^{n-\varepsilon}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|1-e^{2\pi iy\cdot\xi}\right|^2}{|\xi|^{n-\gamma_1+\gamma_2+\varepsilon}}\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\left|\widehat{\psi(t)}\right|^2t^{n-\gamma_1+\gamma_2+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&\le C_\psi l(I)^{n-\varepsilon}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2|y|^{-\gamma_1+\gamma_2+\varepsilon}\end{aligned}$$

所以 $\|G_y\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{1}}\le\|g\|_{L^2(I)}\sqrt{l(I)^n-\varepsilon|y|^{-\gamma_1+\gamma_2+\varepsilon}}$，则

$$\begin{aligned}\|f_y-f\|_{L^2(I)}&\le\sup_{g\in C_0^\infty(I),\|g\|_2\le1}\left|\langle f_y-f,g\rangle\right|\\&\le\int_0^{|y|}\left(\left|F(t,x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}+|y|\int_{|y|}^{l(I)}\left(\int_I\left|F(t,x-tz_t)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\&+|F|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}l(I)^{(n-\varepsilon)/2}|y|^{\frac{-\gamma_1+\gamma_2+\varepsilon}{2}}\end{aligned}$$

由 Hardy 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{|y|<l(I)}\int_I\left|f(x+y)-f(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y|^{n+\gamma_2}}\\&\le\int_0^{l(I)}\int_{5I}\left|F(t,x)\right|^2t^{-1-\gamma_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\int_I\left|F(t,x-tz_t)\right|^2t^{-1-\gamma_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}^2l(I)^{n-\varepsilon}l(I)^{\varepsilon-\gamma_1}\\&\le l(I)^{n-\gamma_1}\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}^2\end{aligned}$$

所以对每一 $t\le l(I)$，$|z_t|\le2$ 说明 $I-tz_t\subset5I$，则 $\sup_I D_{f,\gamma_1,\gamma_2}(I)\le\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}^2<\infty$，即 $f\in Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)$，$\|f\|_{Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\le\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^{\infty}}^2$。

2) 设 $a(x,t)$ 支于 $T(B)$，任意 $\varepsilon>0$，令

$$\pi_\psi^\varepsilon(a)=\int_0^\infty a(t,\cdot)*\psi_t(x)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}.$$

$$T^\varepsilon(B)\text{为}T(B)\cap\{(t,x):t>\varepsilon\}\text{。}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和([9] Lemma3.18)可得，对任意 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left|\left\langle \pi_\psi^\varepsilon(a),\phi\right\rangle\right| \le \left(\int_{T^\varepsilon(B)}\left|a(t,x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t^{-\gamma_2}}\right)^{1/2}\left(\int_{T^\varepsilon(B)}\left|\phi*\psi_t(x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}$$
$$\le\left(l\left(\tilde{B}\right)^{\gamma_1-n}\int_{\tilde{B}}\int_{\tilde{B}}\frac{\left|\phi(x)-\phi(y)\right|^2}{t^{n+\gamma_2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

其中 $\tilde{B}$ 是球 B 的固定扩张。

因此，$\|\phi\|_{Q_{\gamma_1}^{\gamma_2}(\mathbb{R}^n)}\le\|\phi\|_{\dot{L}_{n/2}^2(\mathbb{R}^n)}$。

另外，对 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$，有

$$\left|\left\langle \pi_\psi^{\varepsilon_1}(a)-\pi_\psi^{\varepsilon_2}(a),\phi\right\rangle\right| \le \left(\int_{T^{\varepsilon_1}(B)\setminus T^{\varepsilon_2}(B)}\left|a(t,x)\right|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t^{1-\gamma_2}}\right)^{1/2}\|\phi\|_{\dot{L}_{n/2}^2(\mathbb{R}^n)}$$

因此 $\pi_\psi(a)=\lim_{\varepsilon\to0}\pi_\psi^\varepsilon(a)$ 在 $\dot{L}_{n/2}^2(\mathbb{R}^n)$ 上成立。

这一分布支于 $\tilde{B}$ 且 ψ 满足条件([9] Definition3.13)中相同条件，所以 $\pi_\psi(a)$ 是一个 $HH_{\gamma_1,\gamma_2}^1(\mathbb{R}^n)$ 原子。由([9] Theorem3.9(ii))知在 T_{γ_1,γ_2}^1 中函数 $F=\sum_j\lambda_j a_j$ 和测试函数 $\phi\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(F(t,\cdot)*\psi_t\right)(x)\phi(x)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}=\sum_j\lambda_j\left\langle\pi_\psi a_j,\phi\right\rangle=\left\langle\sum_j\lambda_j\pi_\psi a_j,\phi\right\rangle$$

因此 $\rho_\psi(\phi)(t,x)=(\psi_t*\phi)(x)$ 为 $T_{\gamma_1,\gamma_2}^\infty$ 中的函数。

所以 $\pi_\psi(F)=\sum_j\pi_\psi a_j\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|\pi_\psi(F)\|_{HH_{\gamma_1,\gamma_2}^{-1}(\mathbb{R}^n)}\le\inf\sum_j|\lambda_j|\approx\|F\|_{T_{\gamma_1,\gamma_2}^1}$。

这就完成了定理 5 的证明。

致 谢

作者衷心感谢李澎涛教授对此课题的指导与建议。

参考文献

[1] Ailaskari, R., Xiao, J. and Zhao, R.H. (1995) On Subspaces and Subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, **15**, 101-121. https://doi.org/10.1524/anly.1995.15.2.101

[2] Dafni, G. and Xiao, J. (2005) The Dyadic Structure and Atomic Decomposition of Q Spaces in Several Real Variables. *Tohoku Mathematical Journal*, **57**, 119-145. https://doi.org/10.2748/tmj/1113234836

[3] Wu, Z. and Xie, C. (2002) Decomposition Theorems for Q_p Spaces. *Arkiv för Matematik*, **40**, 383-401. https://doi.org/10.1007/BF02384542

[4] Wu, Z. and Xie, C. (2003) Q Spaces and Morrey Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **2012**, 82-297. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00020-X

[5] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1972) H^p Spaces of Several Variables. *Acta Mathematica*, **129**, 137-193. https://doi.org/10.1007/BF02392215

[6] Essén, M., Janson, S., Peng, L. and Xiao, J. (2000) Q Space of Several Real Variables. *Indiana University Mathematics Journal*, **49**, 575-615. https://doi.org/10.1512/iumj.2000.49.1732

[7] Dafni, G. and Xiao, J. (2004) Some New Tent Spaces and Duality Theorem for Fractional Carleson Measures and $Q_\alpha(R^n)$. *Journal of Functional Analysis*, **208**, 377-422. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00181-2

[8] Yang, D. and Yuan, W. (2008) A New Class of Function Spaces Connecting Triebel-Lizorkin Spaces and Q Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **255**, 2760-2809. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.09.005

[9] Cannone, M. (2004) Harmonic Analysis Tools for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations. In: Friedlander, S. and Serre, D., Eds., *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Vol. 3, Elsevier, Amsterdam, 161-244. https://doi.org/10.1016/S1874-5792(05)80006-0

[10] Chen, Q., Miao, C. and Zhang, Z. (2007) A New Bernsteins Inequality and the 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **271**, 821-838. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0193-7

[11] Koch, H. and Tataru, D. (2001) Well-Posedness for the Navier-Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, **157**, 22-35. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1937

[12] Miao, C., Yuan, B. and Zhang, B. (2007) Well-Posedness for the Incompressible Magnetohydrodynamic System. *Mathematical Methods in the Applied Science*, **30**, 961-976. https://doi.org/10.1002/mma.820

[13] Li, P. and Zhai, Z. (2010) Well-Posedness and Regularity of Fractional Naiver-Stokes Equations in Some Critical Q-Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 2457-2519. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.07.013