Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1055-1061
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116119

一类与分数阶p-Laplace算子相关的重排优化问题

邱　崇

淮阴工学院数理学院，江苏 淮安
Email: qchsuda@163.com

收稿日期：2021年5月2日；录用日期：2021年6月3日；发布日期：2021年6月10日

摘　要

本文研究了一类与分数阶p-Laplace算子相关的重排优化问题。首先，通过建立合适的变分框架并利用全局极小原理得到了一个分数阶p-Laplace算子方程的全局极小解。然后，利用反证法证明该全局极小解的唯一性。最后，使用重排优化理论证明在一定的参数范围内相应的能量泛函极小重排优化问题的可解性。

关键词

重排优化问题，全局极小解，分数阶p-Laplace算子

An Optimization Problem Involving the p-Fractional Laplacian

Chong Qiu

Faculty of Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huaian Jiangsu
Email: qchsuda@163.com

Received: May 2nd, 2021; accepted: Jun. 3rd, 2021; published: Jun. 10th, 2021

Abstract

This paper focuses on an optimization problem involving the fractional p-Laplacian. Firstly, we use the global minimum principle in the suitable variational framework to obtain a global minimum solution of a fractional p-Laplacian equation. Then, the uniqueness of the solution of the equation can be obtained by using reduction to absurdity. Finally, the solvability of a minimization problem for the energy functional corresponding to the fractional p-Laplace equation will be verified by rearrangement optimization theory.

文章引用: 邱崇. 一类与分数阶 p-Laplace 算子相关的重排优化问题[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1055-1061.
DOI: 10.12677/pm.2021.116119

Keywords

Optimization, Global Minimum Solution, Fractional p-Laplacian

1. 引言

重排优化问题具有丰富的物理背景。著名物理学家 W. Thomson (Lord Kelvin)曾提出求解使得某一区域流体动能达到最值的最优涡量场分布问题。1989 年 Burton 将该问题等价转化为在已知涡量场所有重排函数组成的集合上的重排优化问题。通过建立一系列重排函数理论，Burton 得到了该重排优化问题的可解性，见[1] [2]。之后更多微分方程相关的重排优化问题得到了广泛深入的研究，见参考文献[3]-[9]。

近年来，非局部算子如分数阶 Laplace 算子相关的重排优化问题得到了许多人们的关注。相关研究见文献[10]-[16]。我们注意到尚未有分数阶 p-Laplace 算子相关的能量泛函重排优化问题研究。

本文将考虑分数阶 p-Laplace 算子方程($P_{\lambda,f}$)

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u - \lambda V(x)|u|^{p-2} u = f(x),\ x \in \Omega \\ u = 0, x \in R^N \setminus \Omega \end{cases}$$

引出的重排优化问题，其中 $(-\Delta)_p^s\,(0<s<1, p>1)$ 为分数阶 p-Laplace 算子定义为:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{R^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y,$$

其中 $\lambda>0$ 为一个参数，$V(x)>0$ 为某个可测函数。

可以证明，对 $f(x)\in L^q(\Omega)$ 方程($P_{\lambda,f}$)具有唯一全局极小解，记为 u_f (见第 2 节定理 2.1)。

本文将讨论如下的重排优化问题:

$$(\mathrm{Opt})\quad \inf_{g\in R(f)} \Phi(g)$$

其中 $\Phi(g): R(f) \mapsto R$ 为能量泛函

$$\Phi(g) = \frac{1}{p}\|u_g\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega V(x)|u_g|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g u_g \mathrm{d}x$$

这里 u_g 为方程 $(P_{\lambda,f})$ 中右端项 f 替换为 g 时对应的唯一解，$\|u_g\|^p = \int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。我们将证明在参数 λ 的合适取值范围内上述重排优化问题的可解性。

注意到分数阶 p-Laplace 算子不仅是非局部算子而且是非线性算子，因此，我们的处理需要更多技巧。

2. 预备知识

记 $\Omega \subset R^N$，$(N\ge 3)$ 为一个有界光滑区域。设函数 $f:\Omega\to R$ 可测，我们记 $R(f)$ 为由满足如下条件:

$$meas(\{x\in\Omega : g(x)\ge a\}) = meas(\{x\in\Omega : f(x)\ge a\}),\ \forall a\in R$$

的可测函数 g 组成的函数集合，其中 meas$(\cdot)$表示 Lebegue 测度。在本文中，我们将记 $\|u\|_{L^p}$ 为通常的空间 $L^p(\Omega)$ $(1\le p\le\infty)$ 中的范数。记号 C 表示某个正常数。

记可测函数 $u:R^N\to R$ 的 Gagliardo 半范数为

$$[u]_{s,p}=\left(\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

并记

$$W^{s,p}(R^N)=\left\{u\in L^p(R^N):[u]_{s,p}<\infty\right\}$$

为以

$$\|u\|_{s,p}=\left(\int_{R^N}|u|^p\,\mathrm{d}x+[u]_{s,p}^p\right)^{1/p}$$

为范数的分数阶 Sobolev 空间，其中 $0<s<1,\ p\ge2,\ sp<N$。本文的讨论将在其如下的线性闭子空间

$$W_0^{s,p}(\Omega)=\left\{u\in W^{s,p}(R^N):u\equiv0,x\in R^N\setminus\Omega\right\},$$

中进行。可以验证 $\|\cdot\|=[\cdot]_{s,p}$ 为 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 中函数的等价范数，见文献[14]。$W_0^{s,p}(\Omega)$ 为一致凸 Banach 空间。

方程 $(P_{\lambda,f})$ 对应的能量泛函 $I_f:W_0^{s,p}(\Omega)\mapsto R$ 为

$$I_f(u)=\frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{p}\int_\Omega V|u|^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega fu\mathrm{d}x$$

容易验证，$I_f\in C^1(W_0^{s,p}(\Omega),R)$ 且对任意的 $v\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 成立

$$\langle I_f'(u),v\rangle=\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega V|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x-\int_\Omega fv\mathrm{d}x$$

定义 2.1 称 $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 为方程 $(P_{\lambda,f})$ 的一个解，如果对任意的 $v\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 成立

$$\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\int_\Omega V|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x-\int_\Omega fv\mathrm{d}x=0$$

因此，$u\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 为方程 $(P_{\lambda,f})$ 的一个解当且仅当 $\langle I_f'(u),v\rangle=0,\ \forall v\in W_0^{s,p}(\Omega)$。

引理 2.1(见文献[17]定理 6.5)设 $1\le r\le\dfrac{pN}{N-ps}$，则 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 连续嵌入 $L^r(R^N)$ 且当 $1\le r<\dfrac{pN}{N-ps}$ 时该嵌入是紧的。

引理 2.2 (见文献[2]引理 2.1)设 $f\in L^p(\Omega),\ 1\le p<\infty,\ g\in R(f)$ 则一定有 $g\in L^p(\Omega)$ 且 $\|g\|_{L^p}=\|f\|_{L^p}$。

引理 2.3 (见文献[7]引理 2.3)设 $f\in L^r(\Omega)$，$g\in L^{r'}(\Omega)$ 则线性泛函 $\int_\Omega hg\mathrm{d}x$，$h\in\overline{R(f)}$ 存在 $\hat{f}\in R(f)$ 为其最值点。

令

$$\lambda_1=\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)}\left\{\|u\|^p:\int_\Omega V|u|^p\,\mathrm{d}x=1\right\}\tag{2.1}$$

引理 2.4 设 $V(x)>0$ 且 $V(x)\in L^\infty(\Omega)$ 则 $\lambda_1>0$。

证明： 显然，$0\le\lambda_1<\infty$。任取 $\{u_n\}$ 为一列极小化序列，即

$$\int_\Omega V|u_n|^p\,\mathrm{d}x=1,\ \|u_n\|^p\to\lambda_1,$$

则存在子列，不妨仍记为$\{u_n\}$，使得u_n弱收敛于$\bar{u}\in W_0^{s,p}(\Omega)$。由于$W_0^{s,p}(\Omega)$紧嵌入$L^p(\Omega)$，则$u_n$强收敛于$\bar{u}\in L^p(\Omega)$。于是，

$$\int_\Omega V\left|\left(|u_n|^p-|\bar{u}|^p\right)\right|\mathrm{d}x\le\|V\|_{L^\infty}\int_\Omega\left|\left(|u_n|^p-|\bar{u}|^p\right)\right|\mathrm{d}x\to 0$$

因此，

$$\int_\Omega V|u_n|^p\,\mathrm{d}x\to\int_\Omega V|\bar{u}|^p\,\mathrm{d}x=1$$

结合范数的弱下半连续性可得

$$\lambda_1\le\|\bar{u}\|^p\le\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^p=\lambda_1$$

由此即得$\lambda_1=\|\bar{u}\|^p>0$。

3. 方程$(P_{\lambda,f})$全局极小解的存在唯一性

定理 3.1 设$0<V(x)\in L^\infty(\Omega)$，$f\in L^q(\Omega)$，$q>\dfrac{pN}{(p-1)N+ps}$，$0<\lambda<\lambda_1$，其中$\lambda_1$如(2.1)中所定义，则方程$(P_{\lambda,f})$存在唯一全局极小解$u_f\in W_0^{s,p}(\Omega)$，即

$$\langle I_f'(u_f),v\rangle=0,\ \forall v\in W_0^{s,p}(\Omega)$$

且

$$I(u_f)=\inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)}I(v)$$

证明：我们先证明方程$(P_{\lambda,f})$存在全局极小解。任取$u\in W_0^{s,p}(\Omega)$，利用 Holder 不等式及引理 2.1

$$\left|\int_\Omega fu\mathrm{d}x\right|\le\|f\|_{L^q}\|u\|_{L_{q'}}\le C\|u\|$$

其中$1<q':=q/(q-1)<pN/(N-ps)$。

再由(2.1)可得

$$I_f(u)\ge\frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^p-C\|u\|\to\infty,\ 若\|u\|\to\infty$$

即泛函I_f是强制的。

易知，I_f为一个弱下半连续泛函。所以，一定存在$u_f\in W_0^{s,p}(\Omega)$为泛函I_f的全局极小点，即$I_f(u_f)=\inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)}I_f(v)$。容易验证$I_f\in C^1(W_0^{s,p}(\Omega),R)$，则由全局极小原理即可得到$u_f$为方程$(P_{\lambda,f})$的解，即

$$\langle I_f'(u_f),v\rangle=0,\forall v\in W_0^{s,p}(\Omega)$$

下面我们证明方程$(P_{\lambda,f})$有且仅有一个全局极小解u_f。

记$m:=\inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)}I_f(v)$，则$I_f(u_f)=m$。由于$0<\lambda<\lambda_1$，则

$$\|u\|^p\ge\|u\|^p-\lambda\int_\Omega V|u|^p\,\mathrm{d}x\ge\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1}\|u\|^p$$

因此，$\|u\|_\lambda := \left(\|u\|^p - \lambda\int_\Omega V|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 是与 $\|u\|$ 等价的范数。由范数的三角不等式可得，对任意的 $t\in(0,1)$, $u,v\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 成立

$$\|tu+(1-t)v\|_\lambda \le t\|u\|_\lambda + (1-t)\|v\|_\lambda$$

利用 p 次幂函数的严格凸性可得

$$\begin{aligned}
& I_f\left(tu+(1-t)v\right) \\
&= \frac{1}{p}\|tu+(1-t)v\|_\lambda^p - \int_\Omega f(x)\left(tu+(1-t)v\right)\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{p}\left(t\|u\|_\lambda + (1-t)\|v\|_\lambda\right)^p - \int_\Omega f(x)\left(tu+(1-t)v\right)\mathrm{d}x \\
&< \frac{t}{p}\|u\|_\lambda^p + \frac{1-t}{p}\|v\|_\lambda^p - \int_\Omega f(x)\left(tu+(1-t)v\right)\mathrm{d}x \\
&= tI_f(u) + (1-t)I_f(v)
\end{aligned}$$

假设存在 $w_f\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 也是方程 $\left(P_{\lambda,f}\right)$ 的全局极小解且 $w_f\ne u_f$ 则 $I_f\left(w_f\right)=m$。任取 $t\in(0,1)$，则 $tu_f+(1-t)w_f\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 且 $I_f\left(tu_f+(1-t)w_f\right)<tI_f\left(u_f\right)+(1-t)I_f\left(w_f\right)=m$，矛盾。因此，$u_f$ 是方程 $\left(P_{\lambda,f}\right)$ 的唯一全局极小解。证毕。

4. 能量泛函重排优化问题(Opt)极小点的存在性

定理 4.1 设 $0<V(x)\in L^\infty(\Omega)$，$f\in L^q(\Omega)$，$q>pN/(pN-N+ps)$，$0<\lambda<\lambda_1$，则存在 $\hat f\in R(f)$，为问题(Opt)的解，即

$$\Phi\left(\hat f\right) = I_{\hat f}(\hat u) = \inf_{g\in R(f)} I_g\left(u_g\right) = \inf_{g\in R(f)} \Phi(g)$$

这里 $\hat u = u_{\hat f}$ 是方程 $\left(P_{\lambda,\hat f}\right)$ 的唯一全局极小解。

证明： 由定理 3.1，方程 $\left(P_{\lambda,f}\right)$ 存在唯一解 $u_f\in W_0^{s,p}(\Omega)$。令 $A=\inf_{g\in R(f)} I_g\left(u_g\right)$，则 A 为有限数。事实上，对任一个 $g\in R(f)$，我们有

$$\begin{aligned}
I_g\left(u_g\right) &= \frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{\left|u_g(x)-u_g(y)\right|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega V\left|u_g\right|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega g u_g\,\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left\|u_g\right\|^p - C\|g\|_{L_q}\left\|u_g\right\|。
\end{aligned} \tag{4.1}$$

根据引理 2.2，$\|g\|_{L_q}=\|f\|_{L_q}$，我们由上式可推知 A 一定是有限数。设 $\{g_i\}$ 为某个极小化序列，即 $g_i\in R(f)$，$\forall i\in N$ 且

$$A=\lim_{i\to\infty} I(u_i)$$

其中 $u_i=u_{g_i}$, $I(u_i)=I_{g_i}\left(u_{g_i}\right)$。由(4.1)可知 $\{u_i\}$ 为 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 中有界序列，则一定存在子序列(不失一般性，仍记为 $\{u_i\}$)在空间 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 中弱收敛于某个函数 $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$ 并且由于 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^{q'}(\Omega)\left(1<q'=q/(q-1)<pN/(N-ps)\right)$ 可知其在 $L^{q'}(\Omega)$ 中强收敛于 u。令 $\overline{R(f)}^{q,w}$ 为 $R(f)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中的弱闭包。注意到 $\|g_i\|_{L_q}\equiv\|f\|_{L_q}$，则 $\{g_i\}$ 也为空间 $L^q(\Omega)$ 中有界序列，因此一定存在子序列(不失一般性，仍记为 $\{g_i\}$)在 $L^q(\Omega)$ 中弱收敛于 $\overline{g}\in\overline{R(f)}^{q,w}$。利用 $L^q(\Omega)$ 中序列弱收敛的定义并结合 $u\in L^{q'}(\Omega)$，我们

有

$$\left|\int_{\Omega}(g_i-\bar{g})u\mathrm{d}x\right|\to 0,\ i\to\infty$$

再结合 Holder 不等式可推出

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega}(g_iu_i-\bar{g}u)\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_{\Omega}g_i(u_i-u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\Omega}(g_i-\bar{g})u\mathrm{d}x\right| \\ &\le \|g_i\|_{L^q}\|u_i-u\|_{L^{q'}}+\left|\int_{\Omega}(g_i-\bar{g})u\mathrm{d}x\right|\to 0, i\to\infty。\end{aligned}$$

由于 $W_0^{s,p}(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^p(\Omega)$，所以 $\{u_i\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛于 u 。结合 $0<V(x)\in L^{\infty}(\Omega)$ 即可得到

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega}V\left(|u_i|^p-|u|^p\right)\mathrm{d}x=0$$

由以上两式我们即可推得

$$A=\lim_{i\to\infty}I(u_i)\ge\frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}V|u|^p\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\bar{g}u\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

根据引理 2.3，线性泛函 $l:\overline{R(f)}^{q,w}\mapsto R,\ l(g)=\int_{\Omega}gu\mathrm{d}x$ 一定存在一个极大点 $\hat{f}\in R(f)$，即

$$\int_{\Omega}\bar{g}u\mathrm{d}x\le\int_{\Omega}\hat{f}u\mathrm{d}x$$

由(4.2)，即可推出

$$A\ge\frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}V|u|^p\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\hat{f}u\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

由于 $\hat{u}$ 为方程 $\left(P_{\lambda,\hat{f}}\right)$ 的全局极小解，则

$$\begin{aligned}I(\hat{u})&=\inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)}\frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}V|v|^p\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\hat{f}v\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{p}\int_{R^N}\int_{R^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}V|u|^p\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\hat{f}u\mathrm{d}x。\end{aligned} \tag{4.4}$$

结合(4.3)和(4.4)显然可以看出 $I(\hat{u})\le A$ 。

另一方面，由定义 $A=\inf_{g\in R(f)}I_g(u_g)$，而 $\hat{f}\in R(f)$ 则必有 $I(\hat{u})\ge A$ 。这样我们就立刻得到，

$$I(\hat{u})=A$$

证毕。

基金项目

本文得到江苏省自然科学基金青年基金(BK20170590)及江苏省政府留学奖学金的支持。

参考文献

[1] Burton, G.R. (1987) Rearrangements of Functions, Maximization of Convex Functionals and Vortex Rings. *Mathematische Annalen*, **276**, 225-253. https://doi.org/10.1007/BF01450739

[2] Burton, G.R. (1989) Variational Problems on Classes of Rearrangements and Multiple Configurations for Steady Vortices. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **6**, 295-319. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30320-1

[3] Cuccu, F., Emamizadeh, B. and Porru, G. (2006) Nonlinear Elastic Membrane Involving the p-Laplacian Operator. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006**, 1-10.

[4] Cuccu, F., Emamizadeh, B. and Porru, G. (2009) Optimization of the First Eigenvalue in Problems Involving the *p*-Laplacian. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137**, 1677-1687. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09769-4

[5] Cuccu, F., Porru, G. and Sakaguchi, S. (2011) Optimization Problems on General Classes of Rearrangements. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 5554-5565. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.05.039

[6] Emamizadeh, B. and Zivari-Rezapour, M. (2007) Rearrangement Optimization for Some Elliptic Equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **135**, 367-379. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9269-y

[7] Emamizadeh, B. and Prajapat, J.V. (2009) Symmetry in Rearrangemet Optimization Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2009**, 1-10.

[8] Marras, M. (2010) Optimization in Problems Involving the *p*-Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2010**, 1-10.

[9] Qiu, C., Huang, Y.S. and Zhou, Y.Y. (2015) A Class of Rearrangement Optimization Problems Involving the *p*-Laplacian. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **112**, 30-42. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.09.008

[10] Qiu, C., Huang, Y.S. and Zhou, Y.Y. (2016) Optimization Problems Involving the Fractional Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1-15.

[11] Dalibard, A.L. and Gerard-Varet, D. (2013) On Shape Optimization Problems Involving the Fractional Laplacian. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation and Calculus of Variations*, **19**, 976-1013. https://doi.org/10.1051/cocv/2012041

[12] Biswas, A. and Jarohs, S. (2020) On Over-Determined Problems for a General Class of Nonlocal Operators. *Journal of Differential Equations*, **268**, 2368-2393. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.09.010

[13] Bonder, J.F., Ritorto, A. and Salort, A.M. (2018) A Class of Shape Optimization Problems for Nonlocal Operators. *Advances in Calculus of Variations*, **11**, 373-386. https://doi.org/10.1515/acv-2016-0065

[14] Bonder, J.F., Rossi, J.D. and Spedaletti, J.F. (2018) Optimal Design Problems for the First *p*-Fractional Eigenvalue with Mixed Boundary Conditions. *Advanced Nonlinear Studies*, **18**, 323-335. https://doi.org/10.1515/ans-2018-0001

[15] Pezzo, L.D., Bonder, J.F. and Rios, L.L. (2018) An Optimization Problem for the First Eigenvalue of the *p*-Fractional Laplacian. *Mathematische Nachrichten*, **291**, 632-651. https://doi.org/10.1002/mana.201600110

[16] Bonder, J.F. and Spedaletti, J.F. (2018) Some Nonlocal Optimal Design Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **459**, 906-931. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.015

[17] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004