Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1067-1075
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116121

带积分边界条件的非线性二阶常微分方程多个正解的存在性

康慧君

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 18409496370@163.com

收稿日期：2021年5月2日；录用日期：2021年6月3日；发布日期：2021年6月11日

摘 要

运用锥上的 Krasnoselskii's 不动点定理, 考虑了二阶积分边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)f(t,u(t)) = 0, & t \in (0,1), \\ u(0) = 0, & u(1) = \lambda \int_0^\eta u(s)ds \end{cases}$$

多个正解的存在性, 其中 $0 < \eta < 1$ 是常数, $0 < \lambda < \frac{2}{\eta^2}$ 是参数, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续函数, $a : [0,1] \to [0,+\infty)$ 是连续函数, 且在 $[0,1]$ 的任一子区间上不恒为零.

关键词

积分边界条件，二阶，多个正解，Krasnoselskii's不动点定理

Existence of Multiple Positive Solutions for Nonlinear Second-Order Ordinary Differential Equations with Integral Boundary Conditions

Huijun Kang

文章引用: 康慧君. 带积分边界条件的非线性二阶常微分方程多个正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1067-1075. DOI: 10.12677/pm.2021.116121

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 18409496370@163.com

Received: May 2^{nd}, 2021; accepted: Jun. 3^{rd}, 2021; published: Jun. 11^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we study existence of multiple positive solutions for second-order ordinary differential equations with integral boundary problem

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)f(t,u(t)) = 0, & t \in (0,1), \\ u(0) = 0, & u(1) = \lambda \int_0^\eta u(s)ds \end{cases}$$

by the Krasnoselskii's fixed point theorem on cones. where $0 < \eta < 1$ is a constant, $0 < \lambda < \frac{2}{\eta^2}$ is a parameter, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ is continuous, $a : [0,1] \to [0,+\infty)$ is continuous, and $a(t) \not\equiv 0$ on any subinterval of [0, 1].

Keywords

Integral Boundary Conditions, Second-Order, Multiple Positive Solutions, Krasnoselskii's Fixed Point Theorem

1. 介绍

1987年, Il'in 和 Moiseev [1]首次提出二阶线性常微分方程多点边值问题, 并讨论了其正解的存在性, 此后, 又有许多学者研究了非线性二阶边值问题, 关于这方面的成果, 可参阅 [2–7]. 比如, Gupta [8], Feng 等 [9]分别运用 Leray-Schauder 不动点定理、 Leray-Schauder 非线性抉择、迭合度等工具讨论了二阶非线性多点边值问题解的存在性, 特别地, 2010年, Tariboon 和 Sitthiwirattham [10]运用 Krasnoselskii's 不动点定理讨论了非线性三点积分边值问题

$$\begin{cases} u'' + a(t)f(u) = 0, & t \in (0,1), \\ u(0) = 0, & u(1) = \alpha \int_0^\eta u(s)ds \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性. 他们得到如下结果:

定理 A 设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数, $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 是连续函数, 且存在 $t_0\in[\eta,1]$ 使得 $a(t_0)>0$, 若 f 满足下列条件之一:

(i) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$;

(ii) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$.

则问题 (1.1) 至少存在一个正解, 这里 $f_0=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}$, $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$.

2015年, Yao [2]运用 Leray-Schauder 不动点定理对问题(1.1)继续进行了讨论, 得到如下结果:

定理 B 设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数, $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 是连续函数, 且存在 $t_0\in[\eta,1]$ 使得 $a(t_0)>0$, 若 f 满足下列条件之一:

(i) $f_0=0$;

(ii) $f_0=\infty$;

(iii) 存在常数 $\rho_1>0$, 使得 $f(y)\le\frac{(2-\alpha\eta^2)\rho_1}{2\beta}$, $0<y\le\rho_1$, 其中 $\beta=\int_0^1(1-s)a(s)ds$;

(iv) 存在常数 $\rho_2>0$, 使得 $f(y)\le\frac{(2-\alpha\eta^2)\rho_2}{2\beta}$, $y\ge\rho_2$, 其中 $\beta=\int_0^1(1-s)a(s)ds$.

则问题 (1.1) 至少存在一个正解.

注意到文献 [2]、 [3]虽然得到了二阶积分边值问题的正解的存在性结果, 但并没有得出是否存在多个正解.

受以上文献启发, 本文考虑带积分边界条件的二阶常微分边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, & t\in(0,1), \\ u(0)=0, & u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)ds \end{cases} \tag{1.2}$$

多个正解的存在性.

本文总假定:

(H1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$是连续函数;

(H2) $a:[0,1]\to[0,+\infty)$ 是连续函数, 且在 $[0,1]$ 的任一子区间上不恒为零.

2. 预备知识

定义 2.1 设 E 是实 Banach 空间, 如果 K 是 E 中的非空凸闭集, 并且满足下面两个条件:

(i) $x\in K$, $\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda x\in K$;

(ii) $x\in K$, $-x\in K\Rightarrow x=\theta$, θ 表示 E 中零元素.

则称 K 是 E 中一个锥.

工作空间是 $C[0,1]$, 定义 $C[0,1]$ 上的范数为 $\| u \|=\max\limits_{0\le t\le 1}|u(t)|$.

引理 2.2 [10] 设 K 是实 Banach 空间 E 上的锥, $T:K\to K$ 是全连续算子, 且存在常数

$0 < r < R$, 如果满足如下条件之一：

(A1) $u \in K$, $\| u \| = r$ 时, 有 $\| Tu \| \leq \| u \|$; $\| u \| = R$ 时, 有 $\| Tu \| \geq \| u \|$;

(A2) $u \in K$, $\| u \| = r$ 时, 有 $\| Tu \| \geq \| u \|$; $\| u \| = R$ 时, 有 $\| Tu \| \leq \| u \|$.
那么算子 T 在 K 上有一个不动点 x, 满足 $r \leq \| x \| \leq R$.

引理 2.3 设 $\lambda\eta^2 \neq 2$, $y \in C[0,1]$, 则问题

$$\begin{cases} u''(t) + y(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \lambda \int_0^\eta u(s)ds \end{cases} \tag{2.1}$$

有唯一解

$$u(t) = \frac{2t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\lambda t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds - \int_0^t (t-s)y(s)ds.$$

证明 由式(2.1)得

$$u''(t) = -y(t),$$

对 $t \in [0,1]$, 从 0 到 t 积分, 得

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t y(s)ds,$$

对 $t \in [0,1]$, 再从 0 到 t 积分, 得

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t (\int_0^x y(s)ds)dx, \tag{2.2}$$

式(2.2)右边的第二项可以看作一个 sx 平面上的二重积分, 交换积分次序, 并计算得

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds, \tag{2.3}$$

所以

$$u(1) = u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

式(2.3)两边从 0 到 η 积分, $\eta \in (0,1)$, 就有

$$\begin{aligned}\int_0^\eta u(s)ds &= u'(0)\frac{\eta^2}{2} - \int_0^\eta (\int_0^x (x-s)y(s)ds)dx \\ &= u'(0)\frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds.\end{aligned}$$

由式(2.1)得到

$$u'(0)-\int_0^1(1-s)y(s)ds=u'(0)\frac{\lambda\eta^2}{2}-\frac{\lambda}{2}\int_0^\eta(\eta-s)^2y(s)ds,$$

即

$$u'(0)=\frac{2}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)y(s)ds-\frac{\lambda}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s)^2y(s)ds.$$

因此, 问题(2.1)有唯一解

$$u(t)=\frac{2t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)y(s)ds-\frac{\lambda t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta(\eta-s)^2y(s)ds-\int_0^t(t-s)y(s)ds.$$

引理 2.4 设 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$. 若 $y\in C[0,1]$, 且 $y(t)\geq 0$, 则问题(2.1)的唯一解 u 满足 $u\geq 0,\ t\in[0,1]$.

证明 若 $u(1)\geq 0$, 由 u 的凸性, $u(0)=0$, 得出 $u(t)\geq 0$, 此外, 由于 $u(t)$ 的图像在(0,1)上是上凸的, 于是

$$\int_0^\eta u(s)ds\geq\frac{1}{2}\eta u(\eta), \tag{2.4}$$

其中 $\frac{1}{2}\eta u(\eta)$ 是曲线 $u(t)$ 从 $t=0$ 到 $t=\eta,\ \eta\in(0,1)$ 积分下三角形的面积.

假设 $u(1)<0$, 由式(2.1), 就有

$$\int_0^\eta u(s)ds<0.$$

由 u 的凸性和 $\int_0^\eta u(s)ds<0$, 得到 $u(\eta)<0$. 因此

$$\frac{u(1)}{1}=\lambda\int_0^\eta u(s)ds\geq\frac{\lambda\eta}{2}u(\eta)=\frac{\lambda\eta^2}{2}\frac{u(\eta)}{\eta}>\frac{u(\eta)}{\eta},$$

与 u 是凸的相矛盾.

引理 2.5 设 $\lambda\eta^2>2$. 若 $y\in C[0,1]$, 且 $y(t)\geq 0$, 则问题(2.1)没有正解.

证明 反设(2.1)有一个正解 u, 如果 $u(1)>0$, 那么 $\int_0^\eta u(s)ds\geq 0$, 就有 $u(\eta)>0$, 并且

$$\frac{u(1)}{1}=\lambda\int_0^\eta u(s)ds\geq\frac{\lambda\eta}{2}u(\eta)=\frac{\lambda\eta^2}{2}\frac{u(\eta)}{\eta}>\frac{u(\eta)}{\eta},$$

与 u 是凸的相矛盾.

如果 $u(1)=0$, 则 $\int_0^\eta u(s)ds=0$, 即 $u(t)\equiv 0,\ t\in[0,\eta]$. 如果存在 $\tau\in(\eta,1)$, 使得 $u(\tau)>0$, 那么 $u(0)=u(\eta)<u(\tau)$, 这与 u 是凸的相矛盾, 因此, (2.1) 不存在正解.

引理 2.6 设 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$. 若 $y\in C[0,1]$, 且 $y\geq 0$, 那么问题(2.1)的唯一解 u 满足

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t)\geq \gamma \parallel u \parallel,$$

其中

$$\gamma:=\min\{\eta,\ \frac{\lambda\eta^2}{2},\ \frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\}. \tag{2.5}$$

证明 设 $u(\tau)=\parallel u\parallel$, 我们分三种情况证明.

情形1 若 $\eta\leq\tau\leq 1$, $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u(t)=u(\eta)$, 那么由 u 的凸性就有

$$\frac{u(\eta)}{\eta}\geq\frac{u(\tau)}{\tau}\geq u(\tau),$$

因此

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t)\geq \eta \parallel u \parallel.$$

情形2 若 $\eta\leq\tau\leq 1$, $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u(t)=u(1)$, 那么由式(2.1), (2.4), 以及 u 的凸性就有

$$u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)ds\geq\frac{\lambda\eta^2}{2}\frac{u(\eta)}{\eta}\geq\frac{\lambda\eta^2}{2}\frac{u(\tau)}{\tau}\geq\frac{\lambda\eta^2}{2}u(\tau),$$

因此

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t)\geq \frac{\lambda\eta^2}{2} \parallel u \parallel.$$

情形3 若 $\tau\leq\eta<1$, $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u(t)=u(1)$, 那么由式(2.1), (2.4), u 的凸性就有

$$\begin{aligned}u(\sigma)&\leq u(1)+\frac{u(1)-u(\eta)}{1-\eta}(0-1)\\&\leq u(1)(1-\frac{1-2/\lambda\eta}{1-\eta})\\&=u(1)\frac{2-\lambda\eta^2}{\lambda\eta(1-\eta)},\end{aligned}$$

因此

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t)\geq \frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2} \parallel u \parallel.$$

定义 $T:K\rightarrow K$ 为

$$\begin{aligned} Tu(t) =& \frac{2t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds - \frac{\lambda t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(s,u(s))ds \\ &- \int_0^t (t-s)a(s)f(s,u(s))ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

假设 f 满足条件(H1), $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$, 由引理2.3, u 是边值问题(1.2)的一个解, 当且仅当 u 是算子 T 的不动点.

定义

$$K = \{u \in C[0,1], u \geq 0, \inf_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \gamma \parallel u \parallel\},$$

显然 K 是 $C[0,1]$ 中的一个锥, 由引理2.6知: $TK \subset K$. 容易验证 $T: K \to K$ 是全连续算子.

因为 $a(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 所以设 $M = \max_{t\in[0,1]} a(t)$, $m = \min_{t\in[\eta,1]} a(t)$, 我们介绍如下的常数:

$$\Phi_1 = \frac{2-\lambda\eta^2}{m\eta(\eta-1)^2}, \qquad \Phi_2 = \frac{2-\lambda\eta^2}{M}.$$

3. 主要结果

定理 3.1 假设(H1)-(H2)成立, 设 $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\{r_k\}_{k=1}^m$, $\{R_k\}_{k=1}^m$ 满足 $r_{k+1} < R_{k+1} < r_k < R_k, k = 1,2,3,\cdots,m-1$. 若 f 满足:

(C1) $f(t,u) \geq Br_k$, 对所有的 $\gamma r_k \leq u \leq r_k$, $t \in [\eta,1]$,

(C2) $f(t,u) \leq AR_k$, 对所有的 $0 \leq u \leq R_k$, $t \in [0,1]$.

其中 $A \in (0,\Phi_2)$, $B \in (\Phi_1,+\infty)$.

则边值问题(1.2)存在 $2m-1$ 个正解 $\{u_k\}_{k=1}^m$ 和 $\{v_k\}_{k=1}^{m-1}$, 其中 $\{u_k\}_{k=1}^m$ 满足

$$r_k < \parallel u_k \parallel < R_k, \ k = 1,2,3,\cdots,m,$$

$\{v_k\}_{k=1}^{m-1}$ 满足

$$R_{k+1} < \parallel v_k \parallel < r_k, \ k = 1,2,3,\cdots,m-1.$$

证明 注意到如果 $u \in K$, 那么在区间 (0,1] 上 $u > 0$.

定义 E 的开子集序列 $\{\Omega_{1,k}\}_{k=1}^m$ 和 $\{\Omega_{2,k}\}_{k=1}^m$ 如下

$$\Omega_{1,k} = \{u \in K : \parallel u \parallel < R_k\}, k = 1,2,\ldots,m,$$

$$\Omega_{2,k} = \{u \in K : \parallel u \parallel < r_k\}, k = 1,2,\ldots,m.$$

若 $u \in K \cap \partial\Omega_{1,k}$, 显然, 当 $s \in (0,1)$, $u(s) \leq \parallel u \parallel = R_k$ 时, 由(C2)和式(2.5)得到

$$\begin{aligned}
Tu(t) &\leq \frac{2t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds \\
&\leq \frac{2tAR_k}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 a(s)(1-s)ds \\
&\leq \frac{MAR_k}{2-\lambda\eta^2} < \frac{M\Phi_2 R_k}{2-\lambda\eta^2} < R_k = \| u \| .
\end{aligned}$$

若 $u \in K \cap \partial\Omega_{2,k}$, 当 $s \in [\eta,1]$ 时, 就有 $\gamma r_k = \gamma \| u \| \leq \min\limits_{t\in[\eta,1]} | u(t) | \leq u(s) \leq \| u \| = r_k$, 由(C1)和式(2.5), 得到

$$\begin{aligned}
Tu(\eta) &= \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds - \frac{\lambda\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(s,u(s))ds \\
&\quad - \int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(s,u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds - \frac{\lambda\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta (\eta^2-2\eta s+s^2)a(s)f(s,u(s))ds \\
&\quad - \frac{1}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta (2-\lambda\eta^2)(\eta-s)a(s)f(s,u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds + \frac{\lambda\eta^2}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(s,u(s))ds \\
&\quad - \frac{\lambda\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta s^2 a(s)f(s,u(s))ds - \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))ds \\
&\quad + \frac{2}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(s,u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds + \frac{2(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(s,u(s))ds \\
&\quad + \frac{\lambda\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta s(\eta-s)a(s)f(s,u(s))ds \\
&\geq \frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)f(s,u(s))ds \\
&\geq \frac{2\eta Br_k}{2-\lambda\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \\
&\geq \frac{m\eta Br_k(\eta-1)^2}{2-\lambda\eta^2} \\
&> \frac{m\eta\Phi_1 r_k(\eta-1)^2}{2-\lambda\eta^2} \\
&> r_k = \| u \| .
\end{aligned}$$

由引理2.2得到, 当 $r_k < R_k$ 时, 对每个 $k = 1, 2, \cdots, m$, T 存在不动点, 满足 $r_k < \| u_k \| < R_k$, 则算子 T 有 m 个不动点; 当 $R_{k+1} < r_k$, 对每个 $k = 1, 2, \cdots, m-1$, T 存在不动点, 满足 $R_{k+1} < \| v_k \| < r_k$, 则算子 T 有 $m-1$ 个不动点, 证毕. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12061064).

参考文献

[1] I1'in, M. (1987) Nonlocal Boundary-Value Problem of the First Kind for a Sturm-Liouville Operator in Its Differential and Finite Difference Aspects. *Differential Equations*, **23**, 803-810.

[2] Yao, Z.J. (2015) New Results of Positive Solutions for Second-Order Nonlinear Three-Point Integral Boundary Value Problems. *Journal of Nonlinear Science Applications*, **8**, 93-98.

[3] Zhai, C.B. (2009) Positive Solution for Semi-Positone Three-Point Boundary Value Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**, 279-286. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.09.019

[4] Han, X.L. (2007) Positive Solution for a Three-Point Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **66**, 679-688. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.12.009

[5] Li, J.L. and Shen, J.H. (2006) Multiple Positive Solutions for a Second-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 258-268. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.095

[6] Ma, R.Y. (2001) Positive Solutions for Second-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, **14**, 1-5. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00102-6

[7] Xu, X. (2004) Multiplicity Results for Positive Solutions of Some Semi-Positone Three-Point Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **291**, 673-689. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.11.037

[8] Gupta, C.P. (1992) Solvability of a Three-Point Nonlinear Boundary Value Problem for a Second Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **168**, 540-551. https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90179-H

[9] Feng, W.Y. and Wdbb, J.R.L. (1997) Solvability of an m-Point Nonlinear Boundary Value Problem with Nonlinear Growth. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **212**, 467-480. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5520

[10] Jessada, T. (2010) Positive Solutions of a Nonlinear Three-Point Integral Boundary Value Problem. *Boundary Value Problem*, **519**, 210-221.