Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1076-1083
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116122

Hans汉斯

亚纯函数与其导数分担两个公共值的唯一性

林　薇，谭　艳

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 1440920411@qq.com

收稿日期：2021年5月7日；录用日期：2021年6月8日；发布日期：2021年6月16日

摘　要

本文运用了值分布理论，证明了亚纯函数与其导数分担两个有穷的公共值和一定的限制条件下，它们必恒等。

关键词

亚纯函数，Nevanlinna理论，唯一性

Meromorphic Functions and Their Derivatives Share the Uniqueness of Two Common Values

Wei Lin, Yan Tan

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1440920411@qq.com

Received: May 7th, 2021; accepted: Jun. 8th, 2021; published: Jun. 16th, 2021

Abstract

In this paper, the value distribution theory is used to prove that meromorphic functions and their derivatives share two finite common values and certain limiting conditions, and they must be identical.

文章引用: 林薇, 谭艳. 亚纯函数与其导数分担两个公共值的唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1076-1083.
DOI: 10.12677/pm.2021.116122

Keywords

Meromorphic Functions, Nevanlinna Theory, Uniqueness

1. 引言

本文中，采用了亚纯函数唯一性理论里面的基本符号和结论(参见[1] [2])。若 f 与 g 为非常数亚纯函数，以 1 为 IM 分担值，$\overline{N}_L\left(r,\dfrac{1}{f-1}\right)$ 表示 $f-1$ 与 $g-1$ 的公共零点、但 $f-1$ 的零点重数比 $g-1$ 的零点重数高者所成点列的精简密指量；$\overline{N}_L\left(r,\dfrac{1}{g-1}\right)$ 表示 $f-1$ 与 $g-1$ 的公共零点，但 $g-1$ 的零点重数比 $f-1$ 的零点重数高者所成点列的精简密指量；$N_E^{1)}\left(r,\dfrac{1}{f-1}\right)$ 表示当 $f-1$ 与 $g-1$ 的公共单零点列的密指量；$\overline{N}_E^{(2}\left(r,\dfrac{1}{f-1}\right)$ 表示当 $f-1$ 与 $g-1$ 的重数相同且大于等于 2 的公共重零点者所成点列的精简密指量；$N_0\left(r,\dfrac{1}{f'}\right)$ 表示 f' 的零点，但不是 $f(f-1)$ 的零点，也不是 f 的极点者所成点列的密指量。

近百年来，亚纯函数在涉及分担值的研究，前人已经获得了许多研究成果。

1977 年，L.A. Rubel 和 C.C. Yang 首先研究了整函数与其一阶导数具有分担值时的关系，得到了以下结果：

定理 A [3] 若非常数整函数 f 与 f' 具有两个有穷的 CM 分担值，则 $f \equiv f'$。

1979 年，E. Mues 和 N. Steinmetz 把定理 A 中的 CM 分担值的条件弱化为 IM 分担值，得到了下述结果：

定理 B [4] 若非常数整函数 f 与 f' 具有两个有穷的 IM 分担值，则 $f \equiv f'$。

1980 年，G.G. Gundersen 把定理 A 中的整函数推广到亚纯函数，得到下述结果：

定理 C [5] 若非常数亚纯函数 f 与 f' 以 0，a 为 CM 分担值，其中 a 为非 0 的有穷复数，则 $f \equiv f'$。

1983 年，Mues 和 Steinmetz 与 Gundersen 分别独立地把定理 A 扩展到亚纯函数，并且得到：

定理 D [6] [7] 若非常数亚纯函数 f 与 f' 具有两个有穷的 CM 分担值，则 $f \equiv f'$。

1986 年，G. Frank 和 G. Weissenborn 将定理 D 中 f 的一阶导数变更为它的高阶导数并加强分担值条件，得到如下结果：

定理 E [8] 若非常数亚纯函数 f 与 $f^{(k)}$ 具有两个判别的异于零的有穷的 CM 分担值，则 $f \equiv f^{(k)}$。

同年，Frank 和 Weissenborn 将定理 E 进一步推广，得到：

定理 F [9] 若非常数亚纯函数 f 与 $f^{(k)}$ 具有两个判别的有穷的 CM 分担值，则 $f \equiv f^{(k)}$。

1990 年，杨连中推广了定理 A，得到下述结果：

定理 G [10] 若非常数整函数 f 与 $f^{(k)}$ 具有两个判别的有穷的 CM 分担值，则 $f \equiv f^{(k)}$。

2000 年，Li，P.和 Yang 把定理 G 中的 CM 分担值的条件改进为 IM 分担值，得到：

定理 H [11] 若非常数整函数 f 与 $f^{(k)}$ 具有两个有穷的 IM 分担值，则 $f\equiv f^{(k)}$。

在本文中，我们考虑将定理 H 中的整函数扩展到亚纯函数，并且在一定的约束条件下，证明了以下结果：

定理 1 若 f 为非常数亚纯函数，若 f 与 $f^{(k)}$ （k 为正整数)以 0 为 CM 分担值，以异于零的有穷复数 a 为 IM 分担值，$\Theta(\infty,f)+\delta(0,f)>2-\dfrac{1}{10k+16}$，则 $f\equiv f^{(k)}$。

定理 2 若 f 与 g 是超越亚纯函数，$f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 以 1 为 IM 分担值，$\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1$，$3\delta(0,f)+5\delta(0,g)>7$，则 $f\equiv g$ 或者 $f^{(k)}g^{(k)}\equiv1$。

2. 引理

为了证明上述定理，需要做以下的准备：

引理 1 [1] 若 f 为非常数亚纯函数，k 为正整数，则

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2 [12] 若 f 和 g 为非常数亚纯函数，1 为 f 与 g 的 IM 分担值，则有

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)$$

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}(r,g)+S(r,g).$$

引理 3 [1] 设 $f_j(z)$ $(j=1,2,3)$ 都是亚纯函数，$f_1(z)$ 不为常数。如果 $\sum_{j=1}^{3}f_j(z)\equiv1$，且

$\sum_{j=1}^{3}N\left(r,\dfrac{1}{f_j}\right)+2\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)<(\lambda+o(1))T(r)$ $(r\in I)$，

其中 $\lambda<1$，$T(r)=\max\limits_{1\le j\le3}\{T(r,f_j)\}$，$I$ 是 $(0,\infty)$ 中具有无穷线性测度的一个集合，则 $f_2(z)\equiv1$ 或 $f_3(z)\equiv1$。

引理 4 [1] 设 f 与 g 为两个非常数亚纯函数，若 z_0 为 f 与 g 的公共单重极点，则 $\left.\left(\dfrac{f''}{f'}-\dfrac{g''}{g'}\right)\right|_{z_0}=0$。

3. 定理的证明

定理 1 的证明

不失一般性，不妨设 $a=1$，假设 $f\not\equiv f^{(k)}$。

令 $H=\dfrac{f''}{f'}-\dfrac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}-2\left(\dfrac{f'}{f-1}-\dfrac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$，则

$$\begin{aligned}&m(r,H)\\&\le m\left(r,\frac{f''}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+O(1)\\&=S(r,f).\end{aligned}$$

我们断言 $H\equiv0$。事实上，若 $H\not\equiv0$，注意到如果 z_0 都为 $f-1$ 与 $f^{(k)}-1$ 的单重零点，由引理 4 得，

$H(z_0)=0$，从而有

$$
\begin{aligned}
N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right) &\le N\left(r,\frac{1}{H}\right) \le T(r,H)+O(1)\\
&= m(r,H)+N(r,H)+O(1)\\
&\le N(r,H)+S(r,f).
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

由于 H 的极点只可能产生在 f 的极点、f' 与 $f^{(k+1)}$ 的零点和 $f-1$ 与 $f^{(k)}-1$ 的重级不同的公共零点处，则

$$
\begin{aligned}
N(r,H) \le{}& \overline{N}(r,f)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

因为 f 与 $f^{(k)}$ 以 1 为 IM 分担值，所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&\le N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right).
\end{aligned}
$$

由(3.1)及(3.2)得

$$
\begin{aligned}
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&\le 2N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&\le N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+3\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+3\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+N_0(r,\frac{1}{f'})+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f).
\end{aligned}
$$

而且

$$
\begin{aligned}
&N_E^{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_E^{(2}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left\{N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right\}\le\frac{1}{2}\left\{T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)\right\}+O(1).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\
&\le 2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+\overline{N}(r,f)+\frac{1}{2}\left\{T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)\right\}\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f).
\end{aligned}
$$

由上式及 Nevanlinna 第二基本定理得：

$$
\begin{aligned}
&T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)\\
&<\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}\left(r,f^{(k)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f)\\
&<(2+k)\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\\
&+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+2\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+\frac{1}{2}\left\{T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)\right\}+S(r,f).
\end{aligned}
$$

由引理 1，2 得：

$$
\begin{aligned}
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f),\\
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f),\\
&\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f).
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)&\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,f^{(k)}\right)+S(r,f)\\
&\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{T(r,f)+T\left(r,f^{(k)}\right)\right\}\\
&\le(5k+8)\overline{N}(r,f)+8N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\\
&\le(5k+8)\left\{\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)\right\}+S(r,f).\\
&\le(5k+8)\left\{(1-\theta(\infty,f))T(r,f)+(1-\delta(0,f))T(r,f)\right\}+S(r,f)
\end{aligned}
$$

可得 $\frac{1}{2}\le(5k+8)\{2-\theta(\infty,f)-\delta(0,f)\}$，即

$$
\theta(\infty,f)+\delta(0,f)\le 2-\frac{1}{10k+16},
$$

与已知 $\Theta(\infty,f)+\delta(0,f)>2-\frac{1}{10k+16}$ 矛盾。

所以 $H\equiv 0$。

由于 1 为 f 与 $f^{(k)}$ 的 IM 分担值可知，1 为 f 与 $f^{(k)}$ 的 CM 分担值。

即 f 与 $f^{(k)}$ 以 0，1 为 CM 分担值，由定理 F 可知，结论得证。

定理 2 的证明

令 $h=\dfrac{f^{(k)}-1}{g^{(k)}-1}$，即 $f^{(k)}-hg^{(k)}+h\equiv 1$，

则 $f_1=f^{(k)}, f_2=-hg^{(k)}, f_3=h$。

由引理 1，2 得:

$$\begin{aligned}N(r,h)&\le \overline{N}(r,f)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-1}\right)\\&\le \overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,g^{(k)}\right)+o\{T(r)\}\\&\le \overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+(k+1)\overline{N}(r,g)+o\{T(r)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N\left(r,\frac{1}{h}\right)&\le \overline{N}(r,g)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\\&\le \overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\overline{N}\left(r,f^{(k)}\right)+o\{T(r)\}\\&\le \overline{N}(r,g)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+1)\overline{N}(r,f)+o\{T(r)\}.\end{aligned}$$

其中 $T(r)=\max\left\{T(r,f),T(r,g),T\left(r,f^{(k)}\right),T\left(r,g^{(k)}\right)\right\}$。

因为 $\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1$，所以

$$N(r,h)\le N\left(r,\frac{1}{g}\right)+o\{T(r)\}. \tag{3.6}$$

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\{T(r)\}. \tag{3.7}$$

由(3.6)得

$$\begin{aligned}&\overline{N}\left(r,f^{(k)}\right)+\overline{N}\left(r,hg^{(k)}\right)+\overline{N}(r,h)\\&\le \overline{N}\left(r,f^{(k)}\right)+2\overline{N}(r,h)+\overline{N}\left(r,g^{(k)}\right)\\&\le \overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)+2N\left(r,\frac{1}{g}\right)+o\{T(r)\}\\&\le 2N\left(r,\frac{1}{g}\right)+o\{T(r)\}.\end{aligned}$$

由(3.7)得

$$\begin{aligned}&N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{hg^{(k)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right)\\&\le N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+2N\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^{(k)}}\right)\\&\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+k\overline{N}(r,g)+2N\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\{T(r)\}\\&\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+2N\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\{T(r)\}.\end{aligned}$$

因为$3\delta(0,f)+5\delta(0,g)>7$，所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3}N\left(r,\frac{1}{f_j}\right)+2\sum_{j=1}^{3}\overline{N}\left(r,f_j\right)\\
&\le 5N\left(r,\frac{1}{g}\right)+3N\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\{T(r)\}\\
&\le 5\big(1-\delta(0,g)\big)T(r,g)+3\big(1-\delta(0,f)\big)T(r,f)+o\{T(r)\}\\
&\le \Big(5\big(1-\delta(0,g)\big)+3\big(1-\delta(0,f)\big)+o(1)\Big)T(r)\\
&\le \big(8-5\delta(0,g)-3\delta(0,f)+o(1)\big)T(r)\\
&< \big(\lambda+o(1)\big)T(r) \qquad (\text{其中}\lambda<1).
\end{aligned}$$

所以$h\equiv1$或者$-hg^{(k)}\equiv1$。

若$-hg^{(k)}\equiv1$，则$f^{(k)}g^{(k)}\equiv1$。

若$h\equiv1$，则$f^{(k)}\equiv g^{(k)}$。假设$f\not\equiv g$，

则令$f=g+p$，p是一个至多为$k-1$次的多项式。

因为f与g是超越亚纯函数，由 Nevanlinna 第二基本定理得：

$$\begin{aligned}
T(r,f)&<\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-p}\right)+S(r,f)\\
&=\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,f)\\
&\le 3N\left(r,\frac{1}{f}\right)+5N\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,f)\\
&<\{8-3\delta(0,f)-5\delta(0,g)+o(1)\}T(r,f).
\end{aligned}$$

所以

$$1\le 8-3\delta(0,f)-5\delta(0,g).$$

可得$3\delta(0,f)+5\delta(0,g)\le7$与已知$3\delta(0,f)+5\delta(0,g)>7$矛盾，于是$f\equiv g$。

参考文献

[1] Yi, H.X. and Yang, C.C. (1995) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Spring-Verlag, Berlin.

[3] Rubel, L.A. and Yang, C.C. (1977) Values Shared by an Entire Function and Its Derivative. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 101-103. https://doi.org/10.1007/BFb0096830

[4] Mues, E. and Steinmetz, N. (1979) Meromorphe funktionen, die mir ohrer ableitung zwei werte teilen. *Manuscripta Mathematica*, **29**, 195-206. https://doi.org/10.1007/BF01303627

[5] Gundersen, G.G. (1987) Meromorphic Functions That Share Finite Values with Their Derivative. *Journal of the Mathematical Society*, **304**, 847-850. https://doi.org/10.2307/2000745

[6] Mues, E. and Steinmetz, N. (1983) Meromorphe funktionen, die mirohrer ableitung werte teilen. *Results in Mathematics*, **6**, 48-55. https://doi.org/10.1007/BF03323323

[7] Gundersen, G.G. (1983) Meromorphic Functions That Share Two Finite Values with Their Derivative. *Pacific Journal of Mathematics*, **105**, 299-309. https://doi.org/10.2140/pjm.1983.105.299

[8] Frank, G. and Ohlenroth, W. (1986) Meromorphe Funktionen,die mit einer ihrer Ableitungen Werte teilen. *Complex Variables*, **6**, 23-37. https://doi.org/10.1080/17476938608814156

[9] Frank, G. and Weissenborn, G. (1986) Meromorphe Funktionen, die mit einer ihrer Ableitungen Werte teilen. *Complex*

Variables, **7**, 33-43. https://doi.org/10.1080/17476938608814184

[10] Yang, L.Z. (1990) Entire Functions That Share Finite Values with Their Derivatives. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **41**, 337-342. https://doi.org/10.1017/S0004972700018190

[11] Li, P. and Yang, C.C. (2000) When an Entire Function and Its Linear Differential Polynomial Share Two Values. *Illinois Journal of Mathematics*, **44**, 349-361. https://doi.org/10.1215/ijm/1255984845

[12] Yi, H.X. (1972) Mcromorphic Functions That Share One or Two Values II. *Mathematische Zeitschrift*, **125**, 107-112.