Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1103-1111
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116124

半群的L-模糊理想

李倩倩

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州
Email: 2953179129@qq.com

收稿日期：2021年5月8日；录用日期：2021年6月9日；发布日期：2021年6月16日

摘 要

设S是半群, L是完全格, 这篇文章研究了半群S的L-模糊理想, 在此基础上, 我们研究了L-模糊理想在普通半群以及几类特殊半群上的性质. 定义了两个L-模糊子集的"$\circ$"运算. 给出了L-模糊理想和几类特殊的L-模糊理想的概念以及他们的等价定义. 证明了半群S的每个L-模糊双边理想都是L-模糊内禀理想, 每个L-模糊左（右）理想都是L-模糊拟理想, 每个L-模糊双理想都是L-模糊广义双理想, 每个L-模糊拟理想都是L-模糊双理想.

关键词

半群，L-模糊子集，L-模糊理想

L-Fuzzy Ideals of Semigroups

Qianqian Li

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 2953179129@qq.com

Received: May 8^{th}, 2021; accepted: Jun. 9^{th}, 2021; published: Jun. 16^{th}, 2021

文章引用: 李倩倩. 半群的L-模糊理想[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1103-1111.
DOI: 10.12677/pm.2021.116124

Abstract

Let S be a semigroup and L be a complete lattice. In this paper, we study L-fuzzy ideals on a semigroup. On this basis, we study properties of L-fuzzy ideals on ordinary semigroups and several types special semigroups are discussed. This article defines the "$\circ$" of two L-fuzzy subsets. The concepts of L-fuzzy ideals and several special L-fuzzy ideals and their equivalent definitions are given. It is proved that every L-fuzzy ideal of the semigroup S is a L-fuzzy interior ideal, and every L-fuzzy left (right) ideal is a L-fuzzy quasi-ideal. Every L-fuzzy bi-ideal is a L-fuzzy generalized bi-ideal, and every L-fuzzy quasi-ideal is a L-fuzzy bi-ideal.

Keywords

Semigroup, L-Fuzzy Subset, L-Fuzzy Ideal

1. 介绍

半群的模糊理想最初是1971年Rosenfeld [1]引入的, 之后Kuroki [2–4]有了进一步的研究成果. 文献 [2]中作者给出了半群的模糊理想和模糊双理想的一些性质, 并用模糊理想和模糊双理想刻画了半群的（左）舵、（左）单和子半群的半格. 文献 [4]中作者在半群中引入模糊半素性的概念, 它是半群中半素性的推广, 并用模糊半素性刻画了半群是单半群的半格. 1993年Kuroki又引入了模糊拟理想的概念 [5]. 1992 年, Mclean和Kummer [6] 注意到半群S 的模糊理想与半群S的格林关系之间的联系, 同时注意到S的任一模糊理想是S的理想的特征函数的适当线性组合逼近而得到的. 2002年, Xie [7] 引入了半群S 的模糊理想扩张性质、强模糊理想扩张性质. 文献 [8–12]进一步研究了模糊理想的相关结论.

这些都给我们提供了很好的研究思路, 为我们的工作做了很好的铺垫.

设S是半群, f是S的模糊子集, 如果对任意的$x, y \in S$, 有$f(xy) \geq f(y)\,(f(x))$, 那么称f是S的模糊左（右）理想. 如果f既是S的模糊左理想又是S的模糊右理想, 那么称f是S的模糊双边理想, 简

称模糊理想. 如果对任意的$x, a, y \in S$有$f(xay) \geq f(a)$, 那么称f是S的模糊内禀理想. 如果对任意的$x, y, z \in S$, 有$f(xyz) \geq min\{f(x), f(z)\}$, 那么称$f$是$S$ 的模糊双理想.

2. 半群的L-模糊理想

$[0,1]$是全序集, 是特殊的格. 假设$(X, \leq)$是偏序集, 且对X中任意一个非空子集Y均存在上确界和下确界, 那么称$(X, \leq)$为完全格. 推广"模糊"的概念就是要把$[0,1]$区间变成完全格. 后文出现的L均指完全格, $0, 1$分别指L的最小元和最大元.

定义2.1 设X是非空集合, 称映射$f: X \to L$为X的L-模糊子集.

设f, g是半群S上的L-模糊子集, 定义f, g之间的运算如下:

$$(f \cap g)(x) = f(x) \wedge g(x)(\forall x \in S);$$

$$(f \cup g)(x) = f(x) \vee g(x)(\forall x \in S);$$

$$f \subseteq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)\,(\forall x \in S).$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{x=yz} \{f(y) \wedge g(z)\} & (\exists y, z \in S) x = yz; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

定义2.2 设S是半群, f是S的L-模糊子集. 如果$\forall x, y \in S$, 有$f(xy) \geq f(x) \wedge f(y)$, 那么称$f$是$S$的$L$-模糊子半群.

定义2.3 设S是半群, f是S的L-模糊子集. 如果$(\forall x, y \in S)\, f(xy) \geq f(y)\,(f(x))$, 那么称$f$ 是S的L-模糊左（右）理想. 如果f既是S的L-模糊左理想又是S的L-模糊右理想, 那么称f是S的L-模糊双边理想, 简称L-模糊理想.

我们注意到半群S可以作为它自身的L-模糊子集, 即任意的$x \in S$都有$S(x) = 1$. 于是我们得到以下结论.

定理2.4 设S是半群, f是S上的L-模糊子集. 则下列结论成立:

(1)f是S的L-模糊子半群$\Leftrightarrow f \circ f \subseteq f$;

(2)f是S的L-模糊左理想$\Leftrightarrow S \circ f \subseteq f$;

(3)f是S的L-模糊右理想$\Leftrightarrow f \circ S \subseteq f$;

(4)f是S的L-模糊理想$\Leftrightarrow S \circ f \subseteq f$且$f \circ S \subseteq f$.

证明: (1)必要性, 假设f是S的L-模糊子半群, $a \in S$. 若$(f \circ f)(a) = 0$, 则结论显然成立. 否则, 存在$x, y \in S$使得$a = xy$. 于是

$$(f \circ f)(a) = \bigvee_{a=xy} (f(x) \wedge f(y)) \leq \bigvee_{a=xy} f(xy) = f(a).$$

即$f \circ f \subseteq f$.

充分性, 设$x, y, a \in S$, $a = xy$. 若$(f \circ f)(x) \leq f(x)$, 则

$$f(xy) = f(a) \geq (f \circ f)(a) = \bigvee_{a=bc} (f(b) \wedge f(c)) \geq f(x) \wedge f(y)$$

所以f 是S的L-模糊子半群.

(2)必要性, 假设f是S的L-模糊左理想, 任意的$a \in S$. 若$(S \circ f)(a) = 0$则结果显然成立. 否则存在$x, y \in S$使得$a = xy$. 于是

$$(S \circ f)(a) = \bigvee_{a=xy} (S(x) \wedge f(y)) \leq \bigvee_{a=xy} (1 \wedge f(xy)) = f(a).$$

即$S \circ f \subseteq f$.

充分性, 设$x, y, a \in S$, $a = xy$. 若$(S \circ f)(x) \leq f(x)$, 则

$$f(xy) = f(a) \geq (S \circ f)(a) = \bigvee_{a=bc} (S(b) \wedge f(c)) \geq S(x) \wedge f(y) = f(y).$$

所以f 是S 的L-模糊左理想. 根据(2)的证明, (3)和(4)类似可证.

定理2.5 设S是半群. 则下列结论成立:

(1)若f, g是S的L-模糊子半群, 则$f \cap g$也是S的L-模糊子半群;

(2) f, g是S的L-模糊左（右、双边）理想, 则$f \cap g$也是S的L-模糊左（右、双边）理想.

证明: (1)假设f, g是S的L-模糊子半群, 任意的$a, b \in S$. 则$(f \cap g)(ab) = f(ab) \wedge g(ab) \geq (f(a) \wedge f(b)) \wedge (g(a) \wedge g(b))$, 而且

$$\begin{aligned}(f(a) \wedge f(b)) \wedge (g(a) \wedge g(b)) &= (f(a) \wedge g(a)) \wedge (f(b) \wedge g(b)) \\ &\geq (f \cap g)(a) \wedge (f \cap g)(b).\end{aligned}$$

综上所述, $(f \cap g)(ab) \geq (f \cap g)(a) \wedge (f \cap g)(b)$, 即$f \cap g$是$S$的$L$-模糊子半群. (2)可以类似证明, 这里不再赘述.

命题2.6 设S是半群, f是S的L-模糊右（左）理想. 则$f \cup (S \circ f)$ $(f \cup (f \circ S))$是S的L-模糊双边理想.

证明: 假设f是S的L-模糊右理想, 则

$$\begin{aligned}S \circ (f \cup (S \circ f)) &= (S \circ f) \cup (S \circ (S \circ f)) = (S \circ f) \cup (S \circ S) \circ f \\ &\subseteq (S \circ f) \cup (S \circ f) = S \circ f \subseteq f \cup (S \circ f).\end{aligned}$$

因此$f \cup (S \circ f)$是S的L-模糊左理想. 而$(f \cup (S \circ f)) \circ S = (f \circ S) \cup (S \circ f \circ S) \subseteq (f \circ S) \cup (S \circ f) \subseteq f \cup (S \circ f)$. 所以$f \cup (S \circ f)$ 是S的L-模糊双边理想.

3. 半群的L-模糊双理想

定义3.1 设S是半群, f是S的L-模糊子半群. 如果任意的$x, y, z \in S$有$f(xyz) \geq f(x) \wedge f(z)$, 那么称$f$ 是S 的L-模糊双理想.

定理3.2 设S是半群, f是S的L-模糊子半群, 则f是S的L-模糊双理想当且仅当$f \circ S \circ f \subseteq f$.

证明: 必要性, 假设f是S的L-模糊双理想, 任意的$a \in S$. 若$(f \circ S \circ f)(a) = 0$则结论显然成立, 否则$\exists x, y, p, q \in S$使得$a = xy, x = pq$. 由于$f$是$S$ 的L-模糊子半群, 所以$f(pqy) \geq f(p) \wedge f(q)$. 因此,

$$\begin{aligned}(f \circ S \circ f)(a) &= \bigvee_{a=xy} ((f \circ S)(x) \wedge f(y)) = \bigvee_{a=xy} (\bigvee_{x=pq} ((f(p) \wedge S(q)) \wedge f(y))) \\ &= \bigvee_{a=xy} (\bigvee_{x=pq} ((f(p) \wedge 1) \wedge f(y))) = \bigvee_{a=pqy} (f(p) \wedge f(y)) \\ &\leq \bigvee_{a=pqy} f(pqy) = f(a).\end{aligned}$$

即$f \circ S \circ f \subseteq f$.

充分性, 设$x, y, z \in S$, $a = xyz$. 若$(f \circ S \circ f)(x) \leq f(x)$则有

$$\begin{aligned}f(xyz) = f(a) \geq (f \circ S \circ f)(a) &= \bigvee_{a=bc} ((f \circ S)(b) \wedge f(c)) \\ &\geq \bigvee_{x=pq} ((f(p) \wedge S(q)) \wedge f(z))) \\ &\geq f(x) \wedge (y) \wedge f(z) = f(x) \wedge 1 \wedge f(z) = f(x) \wedge f(z).\end{aligned}$$

即f 是S 的L- 模糊双理想. 证毕.

命题3.3 设S是半群, f是S的L-模糊子集, g是S的L-模糊双理想. 则$f \circ g$和$g \circ f$都是S的L-模糊双理想.

证明: 由于g是S的L-模糊双理想, 根据上面的定理, 可以推得

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ (g \circ f) &= f \circ g \circ (f \circ g) \\ &\subseteq f \circ g \circ S \circ g \subseteq f \circ g.\end{aligned}$$

所以$f \circ g$是S的L-模糊子半群. 因此

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ S \circ (f \circ g) &= f \circ g \circ (S \circ f) \circ g \\ &\subseteq f \circ (g \circ S \circ g) \subseteq f \circ g\end{aligned}$$

故$f \circ g$是S的L-模糊双理想. 同理可证$g \circ f$是S的L-模糊双理想.

命题3.4 设S是半群, f, g是S的L-模糊双理想. 则$f \cap g$是S的L-模糊双理想.

证明： 显然, $f\cap g$是L-模糊子半群. 设$\forall a,b,x\in S$, 则$(f\cap g)(axb)=f(axb)\wedge g(axb)$. 而$f(axb)\wedge g(axb)\geq(f(a)\wedge f(b))\wedge(g(a)\wedge g(b))$. 又因为

$$(f(a)\wedge f(b))\wedge(g(a)\wedge g(b))=f(a)\wedge g(a)\wedge f(b)\wedge g(b)$$

$$=(f\cap g)(a)\wedge(f\cap g)(b)$$

所以$(f\cap g)(axb)\geq(f\cap g)(a)\wedge(f\cap g)(b)$, 即$f\cap g$是$S$的$L$-模糊双理想.

4. L-模糊内禀理想

定义4.1 设S是半群, f是S的L-模糊子半群. 如果任意的$x,y,z\in S$, $(xyz)\geq f(y)$, 那么称f 是S的L-模糊内禀理想.

定理4.2 设S是半群, f是S的L-模糊子半群. 则f是S的L-模糊内禀理想当且仅当$S\circ f\circ S\subseteq f$.

证明： 必要性, 假设f是S的L-模糊内禀理想, 任意的$x\in S$. 若$(S\circ f\circ S)(x)=0\leq f(x)$, 结论显然成立. 否则, 存在$y,z,u,v\in S$使得$x=yz,y=uv$. 由于$f$是$S$ 的广义模糊内禀理想, 所以$f(uvz)\geq f(v)$. 于是

$$(S\circ f\circ S)(x)=\bigvee_{x=yz}\{(S\circ f)(y)\wedge S(z)\}$$

$$=\bigvee_{x=yz}\{\bigvee_{y=uv}(S(u)\wedge f(v))\wedge S(z)\}$$

$$\leq\bigvee_{x=yz}\{\bigvee_{y=uv}(1\wedge f(v))\wedge 1\}\leq f(x).$$

所以$S\circ f\circ S\subseteq f$.

充分性, 设$S\circ f\circ S\subseteq f$, $x,a,y\in S$. 即$f(xay)\geq(S\circ f\circ S)(xay)$. 而

$$(S\circ f\circ S)(x)=\bigvee_{xay=pq}\{(S\circ f)(p)\wedge S(q)\}$$

$$\geq(S\circ f(xa))\wedge S(y)=(S\circ f)(xa)\wedge 1$$

$$=\bigvee_{xa=pq}\{S(p)\wedge f(q)\}\geq S(x)\wedge f(a)=f(a).$$

所以, $f(xay)\geq f(a)$, 即f是S的L-模糊内禀理想.

显然半群S的每个L-模糊双边理想都是S的L-模糊内禀理想. 但是S的L-模糊内禀理想不一定是S的L-模糊双边理想. 下面是L-模糊内禀理想不是L-模糊双边理想的一个例子.

例4.3： 设$S=\{a,b,c,d\}$是半群. 它的乘法运算如下:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

设f是S的L-模糊子集, $f(a)=a,f(b)=b,f(c)=c,f(d)=d$, 且$a,b,c,d\in L$有$a\geq c\geq b\geq d$. 事实上$\forall x,y,z\in S$, 都有$f(xyz)=f(a)=a\geq f(y)$. 因此$f$是$S$的$L$-模糊内熏理想. 但是, $f(dc)=f(b)=b\leq c=f(c)$, 所以f 不是S的L-模糊左理想, 即f不是S的L-模糊双边理想.

定理4.4 设S是正则半群, f是S的L-模糊子集. 则下列叙述等价:

(1) f是S的L-模糊理想,

(2) f是S的L-模糊内熏理想.

证明： $(1)\Rightarrow(2)$是显然的, 下面证明$(2)\Rightarrow(1)$.

假设f是S的L-模糊内熏理想, $\forall a,b\in S$. 由于S是正则半群, 所以$\exists x,y\in S$, 使得$a=axa,b=byb$, 于是

$$f(ab)=f(axab)=f((ax)ab)\geq f(a),$$

$$f(ab)=f(abyb)=f((ab(yb))\geq f(b).$$

因此, f是S的L-模糊理想.

5. L-模糊拟理想

定义5.1 设S是半群, f是S的L-模糊子集. 若$(f\circ S)\cap(S\circ f)\subseteq f$, 则称$f$是$S$的$L$-模糊拟理想.

显然, S的任意一个L-模糊左理想（$S\circ f\subseteq f$）, L-模糊右理想（$f\circ S\subseteq f$）都是S的L-模糊拟理想. 而且, S的任意一个L- 模糊拟理想都是S 的L-模糊双理想（$f\circ S\circ f\subseteq f$）. 但是结论反过来未必成立, 下面是两个具体的例子.

例5.2： 设$S=\{0,a,b,c\}$是半群. 它的乘法运算如下:

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	0
b	0	0	0	0
c	0	c	0	0

定义S的L-模糊子集如下: $f(0)=f(a)=a,f(b)=f(c)=b$, 且$a,b\in L$有$a\geq b$. . 则f是S的L-模糊拟理想, 而不是S的L-模糊左（右）理想.

例5.3：设$S = \{0, a, b, c\}$是半群. 它的乘法运算如下:

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	0	a
c	0	0	a	b

定义S的L-模糊子集如下: $f(0) = f(b) = b, f(a) = f(c) = a$, 且$a, b \in L$有$b \geq a.$. 则$f$是$S$的$L$-模糊双理想, 而不是$S$的$L$-模糊拟理想.

命题5.4 半群S的每个L-模糊拟理想都是S的L-模糊子半群.

证明：设f是S的L-模糊拟理想. 由$f \subseteq S$可得$f \circ f \subseteq S \circ f$且$f \circ f \subseteq f \circ S$. 因此

$$f \circ f \subseteq (S \circ f) \cap (f \circ S) \subseteq f.$$

即f是S的L-模糊子半群.

命题5.5 设S是半群, f, g分别是S的L-模糊右、左理想. 则$f \cap g$是S的L-模糊拟理想.

证明：假设f, g分别是S的L-模糊右、左理想. 所以$f \circ S \subseteq f$, $S \circ g \subseteq g$. 于是有

$$\begin{aligned}((f \cap g) \circ S) \cap (S \circ (f \cap g)) &\subseteq (f \circ S) \cap (S \circ g) \\ &\subseteq f \cap g.\end{aligned}$$

所以$f \cap g$是S的L-模糊拟理想.

命题5.6 设S是半群, f, g是S的L-模糊子集. 若f, g其中一个是L-模糊拟理想, 则$f \circ g$是S的L-模糊双理想.

证明：不妨设f是S的L-模糊拟理想, 则$f \circ S \circ f \subseteq f$. 因此

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g \subseteq (f \circ S \circ f) \circ g \subseteq f \circ g.$$

故$f \circ g$是S的L-模糊子半群. 而且

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ S \circ (f \circ g) &= (f \circ (g \circ S) \circ f) \circ g \subseteq (f \circ (S \circ S) \circ f) \circ g \\ &\subseteq (f \circ S \circ f) \circ g \subseteq f \circ g.\end{aligned}$$

所以$f \circ g$是S的L-模糊双理想.

参考文献

[1] Rosenfeld, A. (1971) Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **35**, 512-517. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5

[2] Kuroki, N. (1979) Fuzzy Bi-Ideals in Semigroups. *Commentarii Mathematici Universitatis*

Sancti Pauli, **28**, 17-21.

[3] Kuroki, N. (1981) On Fuzzy Ideals and Fuzzy Bi-Ideals in Semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, **5**, 203-215. https://doi.org/10.1016/0165-0114(81)90018-X

[4] Kuroki, N. (1982) Fuzzy Semiprime Ideals in Semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, **8**, 71-79. https://doi.org/10.1016/0165-0114(82)90031-8

[5] Kuroki, N. (1993) Fuzzy Semiprime Quasi-Ideals in Semigroups. *Information Sciences*, **75**, 201-211. https://doi.org/10.1016/0020-0255(93)90054-P

[6] Mclean, R.G. and Kummer, H. (1992) Fuzzy Ideals in Semigroups. *Fuzzy Sets and Systems*, **48**, 137-140. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90258-6

[7] Xie, X.Y. (2002) Fuzzy Ideals Extensions in Semigroups. *Kyungpook Mathematical Journal*, **42**, 39-49.

[8] Xie, X.Y. (2001) Fuzzy Ideals Extensions of Semigroups. *Soochow Journal of Mathematics*, **27**, 125-138.

[9] 吴明芬. 半群的正规模糊理想[J]. 五邑大学学报(自然科学版), 1999, 13(3): 48-51.

[10] 王宇光, 罗敏霞. 半群的模糊左理想[J]. 宁波教育学院学报, 2010, 12(3): 80-82.

[11] 詹建明, 马学玲. 半群的模糊内理想(英文) [J]. 数学研究与评论, 2008, 28(1): 103-110.

[12] 朱天民. 半群的模糊理想及生成模糊理想[J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(5): 42-45.