Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1156-1165
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116130

Hans汉斯

无限滞后测度泛函微分方程的Φ有界变差解

丁利波*，李宝麟

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: *395305034@qq.com

收稿日期：2021年5月10日；录用日期：2021年6月11日；发布日期：2021年6月18日

摘 要

本文主要研究了无限滞后测度泛函微分方程的Φ有界变差解的存在性，借助Kurzweil积分和Φ有界变差函数理论，建立了无限滞后测度泛函微分方程的Φ有界变差解的存在性定理，这是对无限滞后测度泛函微分方程和Kurzweil积分相关结果的推广。

关键词

无限滞后测度泛函微分方程，Φ有界变差解，Kurzweil积分

Bounded Φ-Variation Solutions for Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay

Libo Ding*, Baolin Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: *395305034@qq.com

Received: May 10th, 2021; accepted: Jun. 11th, 2021; published: Jun. 18th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly research the existence theorem of bounded Φ-variation solution for measure functional differential equations with infinite delay. The existence theorem of bounded Φ-variation solution to measure functional differential equations with infinite delay is established by using Kurzweil integral and the function of bounded Φ-variation. The result is a generalization

*通讯作者。

文章引用: 丁利波, 李宝麟. 无限滞后测度泛函微分方程的 Φ 有界变差解[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1156-1165.
DOI: 10.12677/pm.2021.116130

of the existence theorem of the measure functional differential equations with infinite delay and Kurzweil integral.

Keywords

Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay, Bounded Φ-Variation Solution, Kurzweil Integral

1. 引言

20 世纪 50 年代末，为了解决高度振动函数的积分问题，Kurzweil 和 Henstock 分别运用积分和的形式定义了各自的非绝对积分，虽然他们定义积分的出发点和背景不同，但是思想十分吻合，它包括 Newton 积分、Riemann 积分和 Lebesgue 积分[1]。Kurzweil 积分是解决非线性分析中高度振动函数的有力工具，在文献[2] [3] [4] [5] [6]中有广泛使用。1959 年，Musielak 及 Orlicz 等人[7] [8]提出了 Φ 有界变差函数理论，这种理论是一般意义下的有界变差函数理论的发展与推广。文献[9]首次将 Φ 有界变差函数理论与 Kurzweil 方程理论结合起来，建立了 Kurzweil 方程的 Φ 有界变差解的存在性定理。Slavik 在文献[10]中介绍了一类无限滞后测度泛函微分方程

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s) \tag{1}$$

并证明了在一定条件下此方程与广义常微分方程的等价关系，方程(1)是测度微分方程

$$Dx=f(x_s,s)Dg$$

的积分形式，其中 Dx,Dg 分别是函数 x 和 g 的分布导数。

本文考虑无限滞后测度泛函微分方程初值问题

$$\begin{cases} x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s),\ t\in[t_0,t_0+\sigma] \\ x_{t_0}=\varphi \end{cases} \tag{2}$$

Φ 有界变差解的存在性，其中 x 是取值在 R^n 上的函数，$x_s(\tau)=x(s+\tau),\tau\in(-\infty,0]$ 表示滞后的长度。

2. 预备知识

以下主要介绍 Kurzweil 积分和 Φ 有界变差函数的相关概念：

定义 1 [11]函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to R^n$ 称为在 $[a,b]$ 上是 Kurzweil 可积的，如果存在 $I\in R^n$，使得对任意 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta:[a,b]\to R^+$，使得对 $[a,b]$ 上的任何 δ -精细分划

$$D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),i=1,2,\cdots,k\},$$

其中 $\tau_i\in[\alpha_{i-1},\alpha_i]\subset(\tau_i-\delta(\tau_i),\tau_i+\delta(\tau_i))$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\left[U(\tau_i,\alpha_i)-U(\tau_i,\alpha_{i-1})\right]-I\right\|<\varepsilon,$$

称 I 为 U 在 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分，记作 $I=\int_a^b DU(\tau,t)$，如果 $\int_a^b DU(\tau,t)$ 存在，那么定义 $\int_b^a DU(\tau,t)=-\int_a^b DU(\tau,t)$，且规定当 $a=b$ 时，$\int_a^b DU(\tau,t)=0$。

特别地，当 $f:[a,b]\to R^n$，$g:[a,b]\to R$，$U(\tau,t)=f(\tau)g(t)$ 时，上面定义的积分称为Kurzweil-Stieltjes 积分，记为

$$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$$

设 G 是 R^{n+1} 中的开集，$F:G\to R^n$ 是对 $(x,t)\in G, x\in R^n, t\in R$ 定义的 R^n 值函数.

定义 2 [11]函数 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$ 称为广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t)$$

在区间 $[\alpha,\beta]\subset R$ 上的解是指对所有的 $t\in[\alpha,\beta]$，$(x(t),t)\in G$，且对每个 $s_1,s_2\in[\alpha,\beta]$，有

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t)$$

成立。

设 $\Phi(u)$ 是对 $u\ge 0$ 定义的连续不减函数，且满足 $\Phi(0)=0$，对 $u>0$，$\Phi(u)>0$，本文假定 $\Phi(u)$ 满足下列条件：

(C1) 存在 $u_0>0$ 及 $L>0$，使得对 $0<u\le u_0$，$\Phi(2u)\le L\Phi(u)$。

(C2) $\Phi(u)$ 是凸函数，即

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\le\frac{\Phi(u)+\Phi(v)}{2},\ (u,v>0).$$

定义 3 [8]设 $[a,b]\subset R$，$-\infty<a<b<+\infty$，考虑函数 $x:[a,b]\to R^n$，$x(t)$ 称为 $[a,b]$ 上的 Φ 有界变差函数，是指对 $[a,b]$ 的任何分划

$$\tau: a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b,$$

有

$$V_\Phi(x;[a,b])=\sup_\tau\sum_{i=1}^m\Phi\left(\left\|x(t_i)-x(t_{i-1})\right\|\right)<+\infty$$

并称 $V_\Phi(x;[a,b])$ 为函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Φ-变差。

以 $BV_\Phi([a,b],R^n)$ 表示定义在 $[a,b]$ 上的所有 Φ 有界变差函数 x 满足 $x(a)=0$ 且按范数 $\|x\|_\Phi=\inf\left\{\varepsilon>0;V_\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon};[a,b]\right)\le 1\right\}$ 构成的集合，其中 R^n 表示 n 维欧氏空间. 如果 $\Phi(u)$ 满足(C1)和(C2)，则 $\left(BV_\Phi,\|\cdot\|_\Phi\right)$ 在通常意义元素的加法和纯量乘法是一个 Banach 空间. 范数 $\|x\|_\Phi$ 的定义见文献[1]定义 3。

$BV_\Phi^-([a,b],R^n)$ 表示 $[a,b]$ 上所有 Φ 有界变差左连续函数的全体，它是 BV_Φ 的子空间.

设集合 $O\subset BV_\Phi^-((-\infty,t_0+\sigma],R^n)$ $(t_0>0,\sigma>0)$，称 O 具有延拓性质，是指对于每个 $x\in O$，$\bar{t}\in[t_0,t_0+\sigma]$，都有 $\bar{x}(t)\in O$，其中 $\bar{x}(t)$ 定义如下

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}x(t), & -\infty<t\le\bar{t}\\ x(\bar{t}), & \bar{t}<t\le t_0+\sigma\end{cases}$$

$f:P\times[t_0,t_0+\sigma]\to R^n$，其中 $P=\left\{x_t\,\middle|\,t\in[t_0,t_0+\sigma],x\in O\right\}$。$\Omega=O\times[t_0,t_0+\sigma]$。

DOI: 10.12677/pm.2021.116130

并且假设函数 f 满足以下条件

(A) 对于每一个 $x\in O,\sigma>0$，积分 $\int_{t_0}^{t_0+\sigma} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在。

(B) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Stieltjes 可积函数 $M:[t_0,t_0+\sigma]\to R^+$，满足

$$\left\|\int_a^b f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)\right\|\le\int_a^b M(s)\mathrm{d}g(s),$$

其中 $x\in O,[a,b]\subset[t_0,t_0+\sigma]$。

(C) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Stieltjes 可积函数 $L:[t_0,t_0+\sigma]\to R^+$，满足

$$\left\|\int_a^b\left[f(x_s,s)-f(y_s,s)\right]\mathrm{d}g(s)\right\|\le\int_a^b L(s)\|x_s-y_s\|_*\mathrm{d}g(s),$$

其中 $x,y\in O,[a,b]\subset[t_0,t_0+\sigma]$。

3. 无限滞后测度泛函微分方程 Φ 有界变差解

下面主要介绍无限滞后测度泛函微分方程的 Φ 有界变差解及其相关结果：

定义 4 设 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$，称 $x(t,t_0,\varphi)$ 是无限滞后测度泛函微分方程初值问题(2)的 Φ 有界变差解是指

(1) $\dot{x}(t)=f(x_t,t)$ 几乎处处成立；

(2) $x_{t_0}=\varphi$；

(3) x 在 $[t_0,t_0+\sigma]$ 的任何紧子区间上是 Φ 有界变差函数；

(4) 当 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ 时，$(x_t,t)\in\Omega$。

定义 5 对所有的 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$，$f(x_t,t)$ 满足条件(A)，(B)和(C)，$g:[t_0,t_0+\sigma]\to R^n$ 则函数 $f(x_t,t):\Omega\to R^n$，$\Omega=O\times[t_0,t_0+\sigma]$ 属于函数族 $F_\Phi(\Omega,h,\omega)$，如果满足下列条件

(H1) 存在正值函数 $\delta(\tau):[t_0,t_0+\sigma]\to R^+$，使得对每个区间 $[u,v]$ 满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset[t_0,t_0+\sigma]$，及 $x\in O$，有

$$\|f(x_\tau,\tau)(g(v)-g(u))\|\le\Phi(|h(v)-h(u)|).\tag{3}$$

(H2) 对每个区间 $[u,v]$ 满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset[t_0,t_0+\sigma]$，及 $x,y\in O$，有

$$\|f(x_\tau,\tau)-f(y_\tau,\tau)\|(g(v)-g(u))\le\omega(\|x_\tau-y_\tau\|)\Phi(|h(v)-h(u)|).\tag{4}$$

其中 $h:[t_0,t_0+\sigma]\to R$ 是一个不减函数，$\omega:[0,+\infty)\to R$ 是连续的增函数且

$$\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset[t_0,t_0+\sigma],\quad \omega(r)>0,r>0,\omega(0)=0。$$

定理 1 假设 $f\in F_\Phi(\Omega,h,\omega)$ 满足条件(A),(B)，(C)，(H1)和(H2)，如果 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$，$[\alpha,\beta]\subset(-\infty,t_0+\sigma]$ 是方程(2)的一个解并且 $\int_\alpha^\beta f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在，则 x 在 $(-\infty,t_0+\sigma]$ 上是 Φ 有界变差的，且

$$V_\Phi(x;[\alpha,\beta])\le\Phi(V_\Phi(h;[\alpha,\beta]))<+\infty,\tag{5}$$

并且在 $(-\infty,t_0+\sigma]$ 中，使函数 h 左连续的点是解 $x:(-\infty,t_0+\sigma]\to R^n$ 具有左连续性的点.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，因积分 $\int_\alpha^\beta f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在，则对每个 $s_1,s_2\in[\alpha,\beta]$，Kurzweil 积分 $\int_{s_1}^{s_2} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在，由定义 1 及(3)式，存在正值函数 $\delta(\tau)$ 使得对 $[s_1,s_2]$ 的任何 δ-精细分化

$$D=\{\tau_i,[t_{i-1},t_i],i=1,2,\cdots,k\},$$

有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{s_1}^{s_2} f\left(x_t,t\right)\mathrm{d}g\left(t\right)\right\|\\&\le\left\|\int_{s_1}^{s_2} f\left(x_t,t\right)\mathrm{d}g\left(t\right)-\sum_{i=1}^{k} f\left(x_{\tau_i},\tau_i\right)\left(g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right)\right\|\\&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{k} f\left(x_{\tau_i},\tau_i\right)\left(g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right)\right\|\\&<\varepsilon+V_\Phi\left(h;\left[s_1,s_2\right]\right).\end{aligned}$$

因为$\varepsilon>0$是任意的，故

$$\left\|\int_{s_1}^{s_2} f\left(x_s,s\right)\mathrm{d}g\left(s\right)\right\|\le V_\Phi\left(h;\left[s_1,s_2\right]\right). \tag{6}$$

设$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_k=\beta$是区间$\left[\alpha,\beta\right]$上的任意分划，由(6)式，有

$$\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(\left\|x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)\right\|\right)=\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\left(x_t,t\right)\mathrm{d}g\left(t\right)\right\|\right)\le\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\right). \tag{7}$$

因为$\Phi\left(u\right)$满足(C2)，则$\dfrac{\Phi\left(u\right)}{u}$不减，由文献[7]定理 1.03，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)}V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\\&\le\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)}\sum_{i=1}^{k}V_\Phi\left(h;\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\end{aligned}$$

由(7)式，有

$$\left(x_s,s\right)\in\Omega,\ \left(\left(x^k\right)_s,s\right)\in\Omega$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(\left\|x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)\right\|\right)\\&\le\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)}\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(h\left(t_i\right)-h\left(t_{i-1}\right)\right)\\&\le\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)}V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)\\&=\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\alpha,\beta\right]\right)\right)<+\infty\end{aligned}$$

在上式右端对$\left[\alpha,\beta\right]$的所有分划取上确界得到(5)式，定理的第二部分是文献[7]定理 1.03 的直接结果。

定理 2 设$f\in F_\Phi\left(\Omega,h,\omega\right)$，$x:\left[\alpha,\beta\right]^n\to R^n$，$\left[\alpha,\beta\right]\subset\left[t_0,t_0+\sigma\right]$是函数$x^k:\left[\alpha,\beta\right]\to R^n$组成的序列$\left\{x^k\right\}_{k\in N}$逐点收敛的极限，使得对每个$k\in N,\ s\in\left[\alpha,\beta\right]$，有及对每个$k\in N$，$\int_\alpha^\beta f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g\left(s\right)$存在，则积分$\int_\alpha^\beta f\left(x_s,s\right)\mathrm{d}g\left(s\right)$存在，且

$$\int_\alpha^\beta f\left(x_s,s\right)\mathrm{d}g\left(s\right)=\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g\left(s\right). \tag{8}$$

证明 根据 Kurzweil 积分的性质，不失一般性，假定 f 为实函数，对任意 $\varepsilon>0$，由(4)式对每个 $\tau\in[\alpha,\beta]$，$t_1\le\tau\le t_2$，$[t_1,t_2]\subset[\alpha,\beta]$，有

$$\left\|f\left(\left(x^k\right)_\tau,\tau\right)-f\left(x_\tau,\tau\right)\right\|\left(g\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)\right)\le\omega\left(\left\|\left(x^k\right)_\tau-x_\tau\right\|\right)\Phi\left(h\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)\right). \tag{9}$$

令 $\mu(J)=\dfrac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}\Phi\left(h\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)\right),\ J=[t_1,t_2]\subset[\alpha,\beta]$，因为 $h:[t_0,t_0+\sigma]\to R$ 是增函数，由文献[7]定理 1.03，有

$$V_\Phi\left(h;[t_1,t_2]\right)=\Phi\left(h\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)\right).$$

对每个 $d\in(t_1,t_2)$，设 $J_1=[t_1,d]$，$J_2=[d,t_2]$，由文献[7]定理 1.17，有

$$\begin{aligned}\mu\left(J_1\right)+\mu\left(J_2\right)&=\frac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}\left[V_\Phi\left(h;[t_1,d]\right)+V_\Phi\left(h;[d,t_2]\right)\right]\\&\le\frac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}V_\Phi\left(h;[t_1,t_2]\right)=\mu(J).\end{aligned} \tag{10}$$

所以，$\mu(J)$ 为对所有的闭区间 $J\subset[\alpha,\beta]$ 定义的正值超可加区间函数且 $\Phi\left([\alpha,\beta]\right)<\varepsilon$。由函数 ω 在 0 点连续且 $\omega(0)=0$ 可知，存在 $\delta>0$，使得只要 $0<t<\delta$，就有 $\omega(t)\le\dfrac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}$。设 $\delta(\tau)$ 为一个正值函数，因为对每个 $\tau\in[\alpha,\beta]$，$\lim\limits_{k\to\infty}x^k(\tau)=x(\tau)$，存在 $P(\tau)\in N$，使得 $k\ge P(\tau)$，有 $\left\|x^k(\tau)-x(\tau)\right\|<\delta(\tau)$，所以，只要 $k\ge P(\tau)$，就有

$$\omega\left(\left\|x^k(\tau)-x(\tau)\right\|\right)\le\frac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}.$$

不等式(9)有如下形式

$$\left\|f\left(\left(x^k\right)_\tau,\tau\right)-f\left(x_\tau,\tau\right)\right\|\left(g\left(t_2\right)-g\left(t_1\right)\right)\le\frac{\varepsilon}{V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right)+1}V_\Phi\left(h;J\right)=\mu(J).$$

其中 $\tau\in J\subset\left(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau)\right)$，

$$f\left(\left(x^k\right)_\tau,J\right)=f\left(\left(x^k\right)_\tau,t_2\right)-f\left(\left(x^k\right)_\tau,t_1\right),$$

$$f\left(x_\tau,J\right)=f\left(x_\tau,t_2\right)-f\left(x_\tau,t_1\right),$$

对 $[\alpha,\beta]$ 的任何分化 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_k=\beta$，以及对每个区间 $\left[t_{j-1},t_j\right],j=1,2,\cdots,k$ 的 δ_j-精细分化 $D=\left\{\xi_i^j,\left[t_{i-1}^j,t_i^j\right],i=1,2,\cdots,m_i\right\}$，积分 $\int_{t_{j-1}}^{t_j}f\left(x_s,s\right)\mathrm{d}g(s)$ 存在，有

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g(s)\right\|\\&\le\left\|\sum_{j=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g(s)-\sum_{i=1}^{m_j}f\left(\left(x^k\right)_{\xi_i^j},\xi_i^j\right)\left(g\left(t_i^j\right)-g\left(t_{i-1}^j\right)\right)\right\|\\&\quad+\sum_{j=1}^k\left\|\sum_{i=1}^{m_j}f\left(\left(x^k\right)_{\xi_i^j},\xi_i^j\right)\left(g\left(t_i^j\right)-g\left(t_{i-1}^j\right)\right)\right\|\\&\le\varepsilon+\Phi\left(h(\beta)-h(\alpha)\right)\le\varepsilon+V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right),\end{aligned}$$

其中 $F\left(\left(x^k\right)_{\tau_i},J_i\right)=F\left(\left(x^k\right)_{\tau_i},t_i\right)-F\left(\left(x^k\right)_{\tau_i},t_{i-1}\right)$ 由 ε 的任意性，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g(s)\right\|\le\varepsilon+V_\Phi\left(h;[\alpha,\beta]\right).$$

由控制收敛定理(见文献[11]定理 1.28)，积分 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$ $\int_\alpha^\beta f\left(\left(x^k\right)_s,s\right)\mathrm{d}g(s)$ 存在且(8)式成立。

推论 1 如果 $f\in F_\Phi(\Omega,h,\omega)$ 且，$[\alpha,\beta]\subset[t_0,t_0+\sigma]$，是有限阶梯函数序列 $x^k(t)$ 逐点收敛的极限，使得对每个 $t\in[\alpha,\beta]$，$(x_t,t)\in\Omega$，及 $\left(\left(x^k\right)_t,t\right)\in\Omega,\ k=1,2,\cdots$，则积分 $\int_\alpha^\beta f\left(\left(x^k\right)_t,t\right)\mathrm{d}g(t)$ 存在。

证明 由定理 2 知，只需证明对每个阶梯函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to R^n$，$\int_\alpha^\beta f\left(\left(x^k\right)_t,t\right)\mathrm{d}g(t)$ 存在，由 Kurzweil 积分的定义及文献[11]定理 1.14 容易证明，对每个有限阶梯函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to R^n$，积分 $\int_\alpha^\beta f(x_t,t)\mathrm{d}g(t)$ 存在。

4. 无限滞后测度泛函微分方程 Φ 有界变差解的存在性

本文主要研究无限滞后测度泛函微分方程满足初值条件 $\bar{x}(t_0)=\varphi$ 的 Φ 有界变差解的局部存在性定理。在本节中 $\Phi(u)$ 满足(C1)和(C2)，假定 $h:[t_0,t_0+\sigma]\to R^1$ 是单调增加的左连续函数，而 $\omega:[0,+\infty)\to R^1$ 是单调连续函数，且满足 $\omega(0)=0$。定义一个辅助函数 $\bar{x}\in BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\sigma],R^n\right)$：

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}x(t), & t\in[t_0,t_0+\sigma]\\ \varphi(t-t_0), & t\in(-\infty,t_0]\end{cases}$$

以上定义确保在 $(-\infty,0]$ 上满足初值条件 $\bar{x}(t_0)=\varphi$。

定理 1 设 $f\in F_\Phi(\Omega,h,\omega)$，且对 $\theta_1,\theta_2\in(-\infty,0]$，有

$$\sup_{\theta_1,\theta_2\in(-\infty,0]}\left\|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)\right\|\le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right) \tag{11}$$

则对每个 $(t_0,\varphi)\in\Omega$，存在 $\Delta>0$，使得方程(2)在区间 $(-\infty,t_0+\Delta]\subset(-\infty,t_0+\sigma]$ 上存在一个 Φ 有界变差解 $\bar{x}\in BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\Delta],R^n\right)$ 满足初值条件 $\bar{x}(t_0)=\varphi$。

证明 因为 O 为开集，则存在 $\Delta>0$，如果 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$ 及 $x\in R^n$，使得 $\|x-\varphi\|\le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right)$，则 $(x,t)\in\Omega$，定义

$$Q=\left\{\bar{x}\in BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\sigma],R^n\right):\|x-\varphi\|\le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right)\right\}.$$

令 $Q\subset BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\sigma],R^n\right)$，其中 $BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\sigma],R^n\right)$ 表示 $(-\infty,t_0+\sigma]$ 上所有 Φ 有界变差左连续函数。如果 $x,y\in Q$，$\alpha\in[0,1]$ 则 $\alpha x+(1-\alpha)y\in Q$，所以 $Q\subset BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\Delta],R^n\right)$ 是凸的。

其次，证明 Q 是 $BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\Delta],R^n\right)$ 中的闭集。设 $x^k\in Q,\ k\in N$ 是 $BV_\Phi^-\left((-\infty,t_0+\Delta],R^n\right)$ 中收敛于函数 x 的序列，即 $\lim_{k\to\infty}\left\|x^k-x\right\|_\Phi=0$，则由文献[7]定理 3.11，有

$$V_\Phi\left(x^k-x;(-\infty,t_0+\Delta]\right)\to0,\ (k\to\infty),$$

从而，$x^k(t)$ 在 $(-\infty,t_0+\Delta]$ 中一致收敛于 $x(t)$ (见文[7]定理 3.21)。所以对任意的 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$，从而对任意的 $\varepsilon>0$，当 $k\in N$ 充分大时，有

$$\begin{aligned}\left\|x(t)-\varphi\right\|&\le\left\|x^k(t)-x(t)\right\|+\left\|x^k(t)-\varphi\right\|\\&<\varepsilon+V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right),\ t\in[t_0,t_0+\Delta],\end{aligned}$$

从而

$$\|x(t)-\varphi\| \le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right),\ t\in[t_0,t_0+\Delta],$$

所以 $x\in Q$，即 Q 闭。对 $x\in Q$，定义映射

$$T\overline{x}(t)=\begin{cases}\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s), & t\in[t_0,t_0+\sigma]\\ \varphi(t-t_0), & t\in(-\infty,t_0]\end{cases}$$

对 $t\in[t_0,t_0+\Delta]$，积分 $\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在，所以映射 T 是有意义的。

当 $t\in[t_0,t_0+\Delta]$ 时，有

$$\|T\overline{x}-\varphi(0)\| = \int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)\le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right).$$

对每个 $t\in[t_0,t_0+\sigma]$，$\theta\in(-\infty,0]$，令

$$s=t+\theta\in(-\infty,t_0+\sigma],\ y(t)=T\overline{x}(t),$$

则由(11)式有

$$\begin{aligned}\|y(t)-\varphi\| &= \|T\overline{x}(t)-\varphi\| = \|\varphi(s-t_0)-\varphi(\theta)\| = \|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)\|\\ &\le \sup_{\theta_1,\theta_2\in(-\infty,0]}\|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)\|\le V_\Phi\left(h;[t,t_0]\right).\end{aligned}$$

其中 $\theta_1=s-t_0,\theta=\theta_2$。因此对于 $x\in Q$，有 $Tx\subset Q$，即有映射 $T:Q\to Q$。

以下说明映射 $T:Q\to Q$ 连续。设 $x,x^k\in Q,\ k\in N$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-x\|_\Phi=0$，则 $x^k(t)$ 在 $t\in[t_0,t_0+\Delta]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$。对 $t_1,t_2\in[t_0,t_0+\Delta]$，有

$$\|T x^k(t_2)-Tx(t_2)-Tx^k(t_1)+Tx(t_1)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2}\left[f\left(\left(x^k\right)_t,t\right)-f(x_t,t)\right]\mathrm{d}g(t)\right\|.$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta(\tau)$，使得对 $[t_1,t_2]$ 的任何 δ-精细分划 $D=\left\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),i=1,2,\cdots,m\right\}$，满足 $\tau_i-\delta(\tau_i)<\alpha_{i-1}\le\tau_i\le\alpha_i<\tau_i+\delta(\tau_i)$，有

$$\begin{aligned}&\|Tx^k(t_2)-Tx(t_2)-Tx^k(t_1)+Tx(t_1)\|\\ &=\left\|\int_{t_1}^{t_2}\left[f\left(\left(x^k\right)_t,t\right)-f\left(x^k,t\right)\right]\mathrm{d}g(t)\right\|\\ &<\varepsilon+\left\|\sum_{i=1}^{m}\left[f\left(\left(x^k\right)_{\tau_i},\alpha_i\right)-f\left(x_{\tau_i},\alpha_i\right)-f\left(\left(x^k\right)_{\tau_i},\alpha_{i-1}\right)+f\left(x_{\tau_i},\alpha_{i-1}\right)\right]\right\|\end{aligned}\tag{12}$$

由(4)和(12)式，有

$$\begin{aligned}&\|Tx^k(t_2)-Tx(t_2)-Tx^k(t_1)+Tx(t_1)\|\\ &<\varepsilon+\sum_{i=1}^{m}\omega\left(\|x^k(\tau_i)-x(\tau_i)\|\right)\Phi\left(h(\alpha_i)-h(\alpha_{i-1})\right)\\ &<\varepsilon+\max_{1\le i\le m}\omega\left(\|x^k(\tau_i)-x(\tau_i)\|\right)\sum_{i=1}^{m}\Phi\left(h(\alpha_i)-h(\alpha_{i-1})\right).\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，则

$$\begin{aligned}&\|Tx^k(t_2)-Tx(t_2)-Tx^k(t_1)+Tx(t_1)\|\\ &<\max_{1\le i\le m}\omega\left(\|x^k(\tau_i)-x(\tau_i)\|\right)\sum_{i=1}^{m}V_\Phi\left(h;[t_1,t_2]\right).\end{aligned}$$

其中 $t_1,t_2\in[t_0,t_0+\Delta]$，所以对 $[t_0,t_0+\Delta]$ 的任何分划 $t_0=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_n=t_0+\Delta$，有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\left\|Tx^k\left(\beta_j\right)-Tx\left(\beta_j\right)-Tx^k\left(\beta_{j-1}\right)+Tx\left(\beta_{j-1}\right)\right\|\right)\\&<\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\max_{1\le i\le m}\omega\left(\left\|x^k\left(\tau_i^j\right)-x\left(\tau_i^j\right)\right\|\right)V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\right),\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\tau_i^j\in\left[\alpha_{i-1}^j,\alpha_i^j\right]\subset\left(\tau_i^j-\delta\left(\tau_i^j\right),\tau_i^j+\delta\left(\tau_i^j\right)\right),\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,\ \delta\left(\tau_i^j\right)>0,$$

$$\beta_{j-1}=\beta_0^j<\beta_1^j<\cdots<\beta_{m_j}^j=\beta_j,$$

因此对 $t\in\left[t_0,t_0+\Delta\right]$，$\lim\limits_{k\to\infty}x^k\left(t\right)=x\left(t\right)$ 一致成立，且函数 ω 在 0 点连续且 $\omega\left(0\right)=0$，则对任意的 $0<\varepsilon<1$，存在 $K\in N$，使得对 $k\ge K$，有

$$\max_{1\le i\le m}\omega\left(\left\|x^k\left(\tau_i^j\right)-x\left(\tau_i^j\right)\right\|\right)<\varepsilon$$

所以，由(13)式，有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\left\|Tx^k\left(\beta_j\right)-Tx\left(\beta_j\right)-Tx^k\left(\beta_{j-1}\right)+Tx\left(\beta_{j-1}\right)\right\|\right)\\&<\Phi\left(\varepsilon\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\right).\end{aligned}\tag{14}$$

因为 $\Phi\left(u\right)$ 满足(C2)则 $\dfrac{\Phi\left(u\right)}{u}$ 不减，见文献[7]定理 1.03，于是有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)}V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\\&\le\frac{\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_0,t_0+\Delta\right]\right)\right)}{V_\Phi\left(h;\left[t_0,t_0+\Delta\right]\right)}\sum_{j=1}^{n}V_\Phi\left(h\left(\beta_j\right)-h\left(\beta_{j-1}\right)\right)\\&\le\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_0,t_0+\Delta\right]\right)\right)\end{aligned}$$

由(14)式，有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(\left\|Tx^k\left(\beta_j\right)-Tx\left(\beta_j\right)-Tx^k\left(\beta_{j-1}\right)+Tx\left(\beta_{j-1}\right)\right\|\right)\\&\le\Phi\left(\varepsilon\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[\beta_{j-1},\beta_j\right]\right)\right)\\&\le\Phi\left(\varepsilon\right)\Phi\left(V_\Phi\left(h;\left[t_0,t_0+\Delta\right]\right)\right).\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}V_\Phi\left(Tx^k-Tx,\left[t_0,t_0+\Delta\right]\right)=0,$$

由文献[7]定理 3.11，$\lim\limits_{k\to\infty}\left\|Tx^k-Tx\right\|_\Phi=0$，即 T 是连续映射。

下面证明 $T:Q\to Q$ 是紧的。设 $x^k\in Q,\ k\in N$ 在变差意义下 $\left\{x^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 有界，由文献[7] Helly'extracting

定理存在子序列，逐点收敛于 $\overline{x}(t)\in BV_{\Phi}^{-}\left(\left(-\infty,t_0+\Delta\right],R^n\right)$。令

$$y(t)=T\overline{x}(t)=\begin{cases}\varphi(0)+\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s), & t\in\left[t_0,t_0+\Delta\right]\\ \varphi(t-t_0), & t\in\left(-\infty,t_0\right]\end{cases}$$

则 $y\in BV_{\Phi}^{-}\left(\left(-\infty,t_0+\Delta\right],R^n\right)$，$y(t)=T\overline{x}(t)$，且

$$\lim_{k\to\infty}\left\|Tx^k-y\right\|_{\Phi}=\lim_{k\to\infty}\left\|Tx^k-T\overline{x}\right\|_{\Phi}=0,$$

从而 T 是紧的。由 Schauder 不动点定理，至少存在一个 $\overline{x}\in Q$，使得 $\overline{x}=T\overline{x}$，也就是说 $\overline{x}$ 是无限滞后测度泛函微分方程在 $\left(-\infty,t_0+\Delta\right]$ 上满足初始条件 $\overline{x}(t_0)=\varphi$ 的一个 Φ 有界变差解。

注 1 对于函数 $\Phi(u)$，如果 $0<\dfrac{\Phi(u)}{u}<+\infty$，则由文献[7]定理 1.15 有 $BV_{\Phi}\left(-\infty,t_0+\Delta\right]=BV\left(-\infty,t_0+\Delta\right]$，其中 $BV\left(-\infty,t_0+\Delta\right]$ 表示通常意义下 $\left(-\infty,t_0+\Delta\right]$ 上 Φ 有界变差函数的全体。

注 2 对于函数 $\Phi(u)$ 如果 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$，则由文献[7]定理 1.15 有 $BV_{\Phi}\left(-\infty,t_0+\Delta\right]\subset BV\left(-\infty,t_0+\Delta\right]$，例如 $\Phi(u)=u^p$，$1<p<+\infty$，则 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\Phi(u)}{u}=0$。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11061031)。

参考文献

[1] Lee, P.-Y. (1989) Lanzhou Lectures on Henstock Integration. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/0845

[2] Kurzweil, J. (1957) Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **82**, 418-449. https://doi.org/10.21136/CMJ.1957.100258

[3] Monteiro, G.A. and Slavik, A. (2016) Extremal Solutions of Measure Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**, 568-597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035

[4] Sikorska-Nowak, A. (2002) Retarded Functional Differential Equations in Banach Spaces and Henstock-Kurzweil Integrals. *Demonstratio Mathematica*, **35**, 49-60. https://doi.org/10.1515/dema-2002-0108

[5] Chew, T.S. (1988) On Kurzweil Generalized Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **76**, 286-293. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90076-9

[6] Federson, M. and Schwabik, S. (2006) Generalized ODE Approach to Impulsive Retarded Functional Differential Equations. *Journal of Differential Integral Equations*, **19**, 1201-1234.

[7] Musielak, J. and Orlicz, W. (1959) On Generalized Variations (I). *Studia Mathematica*, **18**, 11-41. https://doi.org/10.4064/sm-18-1-11-41

[8] Lesniewz, R. and Orlicz, W. (1973) On Generalized Variations (II). *Studia Mathematica*, **45**, 71-109. https://doi.org/10.4064/sm-45-1-71-109

[9] 李宝麟, 吴从炘. Kurzweil 方程的 Φ-有界变差解[J]. 数学学报, 2003, 46(3): 561-570.

[10] Slavik, A. (2013) Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, **79**, 140-155. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.11.018

[11] Schwabik, S. (1992) Generalized Ordinary Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/1875