Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1202-1210
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116133

Hans汉斯

正项级数的达朗贝尔(D'Alembert)判别法的推广及应用

张传芳[1]**，沈祖沛**[2*]

[1]广东石油化工学院理学院，广东 茂名
[2]广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
Email: chuanfangzhang@gdupt.edu.cn, *pershen@126.com

收稿日期：2021年5月13日；录用日期：2021年6月15日；发布日期：2021年6月22日

摘 要

对正项级数的达朗贝尔判别法进行了推广，并通过实例说明了推广的判别方法的有效性和实用性。

关键词

正项级数，收敛，达朗贝尔判别法

Generalization on D'Alembert Test of Positive Series and Its Application

Chuanfang Zhang[1]**, Zupei Shen**[2*]

[1]School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong
[2]School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: chuanfangzhang@gdupt.edu.cn, *pershen@126.com

Received: May 13th, 2021; accepted: Jun. 15th, 2021; published: Jun. 22nd, 2021

Abstract

This paper gives some generalized results on the basis of value of ratio criterion. Finally, some examples are given to demonstrate the effectiveness and practicability of the generalized method.

*通讯作者。

文章引用：张传芳，沈祖沛．正项级数的达朗贝尔(D'Alembert)判别法的推广及应用[J]．理论数学，2021，11(6): 1202-1210. DOI: 10.12677/pm.2021.116133

Keywords

Positive Series, Convergence, D'Alembert Test

1. 引言

正项级数是数项级数中最重要的研究对象。因此，对于正项级数敛散性的研究一直都是人们关注的焦点。达朗贝尔(D'Alembert)判别法(也称为比值判别法或比式判别法)作为正项级数敛散性的一个重要判别法则，因其简单、方便等特点被广泛应用。但该判别方法具有一定的局限性，为此，许多学者对其进行了改进，以期能够判别更多的正项级数的敛散性。文献[1]针对正项级数的一般项单调递减的情形，利用柯西定理给出了一种改进的达朗贝尔判别方法，并通过分析指出：该方法比达朗贝尔判别法较为广泛[1]；文献[2]及文献[3]对该方法进行了改进；文献[4]去掉了一般项单调递减的限制，给出了一种双比值判别法，并说明了双比值判别法强于达朗贝尔判别法；文献[5]将双比值判别法推广到了一般的情形；文献[6]给出了一种隔项比值判别法，并举例说明了该方法改进了达朗贝尔判别法；文献[7]给出了一种更精细的比值判别法。本文在这些文献的基础上，也尝试对达朗贝尔判别法进行推广，使得正项级数的判别方法得到进一步丰富和完善。

达朗贝尔判别法 [8] [9] 设 $\sum a_n$ 为正项级数，其中 $a_n > 0$ $\left(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right)$，记

$$\underline{d} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \overline{d} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{1}$$

则

(i) 当 $\overline{d} < 1$ 时，该级数收敛；

(ii) 当 $\underline{d} > 1$ 时，该级数发散；

(iii) 当 $\underline{d} \le 1 \le \overline{d}$ 时，该判别法失效。

除特殊说明外，本文所讨论的上、下极限均为有限数。

2. 主要结论及应用

引理 1 设 $\sum a_n$ 为正项级数，记

$$\underline{p} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}}{a_n};\ \overline{p} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}}{a_n};\ \underline{q} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_n};\ \overline{q} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_n}. \tag{2}$$

则

(i) 当 $\overline{p} + \overline{q} < 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\underline{p} + \underline{q} > 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{p} + \underline{q} \le 1 \le \overline{p} + \overline{q}$ 时，该判别法失效。

证 (i)由 $\overline{p} + \overline{q} < 1$ 知，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\overline{p} + \overline{q} + \varepsilon_0 < 1$。又由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} \le \overline{p} + \overline{q}$$

知，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_1$ 时，有

$$a_{2n-1}+a_{2n} < \left(\overline{p}+\overline{q}+\varepsilon_0\right)a_n \tag{3}$$

由于级数的敛散性与前有限项无关，不妨设(3)式对于所有的自然数 $n>1$ 都有成立，故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}+a_{2k}\right) \le \left(1-\overline{p}-\overline{q}-\varepsilon_0\right)a_1 + a_2 + \left(\overline{p}+\overline{q}+\varepsilon_0\right)S_n$$

从而

$$S_n \le \frac{\left(1-\overline{p}-\overline{q}-\varepsilon_0\right)a_1 + a_2}{1-\overline{p}-\overline{q}-\varepsilon_0}$$

即 $\{S_n\}$ 有界，所以级数 $\sum a_n$ 收敛。

(ii) 由 $\underline{p}+\underline{q}>1$ 知，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\underline{p}+\underline{q}-\varepsilon_0>1$ 成立。又由

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} \ge \underline{p}+\underline{q}$$

知，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_2$ 时，有

$$\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} > \underline{p}+\underline{q}-\varepsilon_0 \tag{4}$$

类似于(i)中，不妨设(4)式对于所有的自然数 n 都有成立，故有

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \ge \left(\underline{p}+\underline{q}-\varepsilon_0\right)S_n. \tag{5}$$

若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，设该极限为 S 。对(5)式两边取极限可得

$$S \ge \left(\underline{p}+\underline{q}-\varepsilon_0\right)S > S$$

因 $S>0$，这是矛盾的。故 $\sum a_n$ 发散。

(iii) 考察级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性[8] [9]。由于

$$\underline{p} = \overline{p} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(\ln n)^p}{(2n-1)\left[\ln(2n-1)\right]^p} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{q} = \overline{q} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(\ln n)^p}{2n(\ln 2n)^p} = \frac{1}{2},$$

故 $\underline{p}+\underline{q}=\overline{p}+\overline{q}=1$，因此，引理 1 无法判别其敛散性。但由文献[8] [9]知，当 $p>1$ 时，该级数收敛；当 $p\le 1$ 时，该级数发散。

利用引理 1 可以对达朗贝尔判别法失效的情形做如下改进，使其应用范围更加广泛。

定理 1 设 $\sum a_n$ 为正项级数，$\underline{d},\overline{d}$ 如(1)式所示且满足 $0<\underline{d}\le 1\le \overline{d}$ 。$\underline{p},\overline{p},\underline{q},\overline{q}$ 如(2)式所示，则

(i) 当 $\overline{q} < \frac{\underline{d}}{1+\underline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\underline{q} > \frac{\overline{d}}{1+\overline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{q} \le \frac{\overline{d}}{1+\overline{d}}$ 且 $\overline{q} \ge \frac{\underline{d}}{1+\underline{d}}$ 时，该判别法失效。

证 (i) 因为

$$\overline{p} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}}{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_n} \le \frac{\overline{q}}{\underline{d}} < \frac{1}{1+\underline{d}}$$

故 $\overline{p}+\overline{q}<1$，由引理 1(i)知，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 因为

$$\underline{p} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_n} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}} \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \ge \frac{\underline{q}}{\overline{d}} > \frac{1}{1+\overline{d}}$$

故 $\underline{p}+\underline{q}>1$，由引理 1(ii)知，级数 $\sum a_n$ 发散。

(iii) 考察级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 的敛散性。由于

$$\underline{d} = \overline{d} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n(\ln\ln n)^p}{(n+1)\ln(n+1)\left[\ln\ln(n+1)\right]^p} = 1$$

$$\underline{q} = \overline{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n(\ln\ln n)^p}{2n\ln 2n(\ln\ln 2n)^p} = \frac{1}{2}$$

因此，$\underline{q} = \frac{\overline{d}}{1+\overline{d}}$, $\overline{q} = \frac{\underline{d}}{1+\underline{d}}$，故定理 1 无法判别其敛散性。但由文献[2]知，当 $p>1$时，该级数收敛；当 $p\le 1$时，该级数发散。

类似定理 1，可得

定理 2 设 $\sum a_n$ 为正项级数， $\underline{d},\overline{d}$ 如(1)式所示且满足 $0<\underline{d}\le 1\le \overline{d}$ 。 $\underline{p},\overline{p},\underline{q},\overline{q}$ 如(2)式所示，则

(i) 当 $\overline{p} < \frac{1}{1+\overline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\underline{p} > \frac{1}{1+\underline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{p} \le \frac{1}{1+\underline{d}}$ 且 $\overline{p} \ge \frac{1}{1+\overline{d}}$ 时，该判别法失效。

定理 2 的证明完全类似于定理 1，在此省略其证明过程。下面讨论引例 1 的推广，给出如下的引理 2.

引理 2 设 $\sum a_n$ 为正项级数，记

$$\underline{r} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{3n-1}}{a_n},\ \overline{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{3n-1}}{a_n};\ \underline{s} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{3n}}{a_n},\ \overline{s} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{3n}}{a_n};\ \underline{t} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{3n+1}}{a_n},\ \overline{t} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{3n+1}}{a_n} \tag{6}$$

则

(i) 当 $\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}<1$时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}>1$时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}\le 1\le \overline{r}+\overline{s}+\overline{t}$ 时，该判别法失效。

证 (i) 类似于(3)式，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $(\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}+\varepsilon_0)<1$ 且对于所有的自然数 $n\ge 1$ 都有

$$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}<\left(\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}+\varepsilon_0\right)a_n$$

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\le S_{3n}=a_1+\sum_{k=1}^{n}\left(a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1}\right)\le a_1+\left(\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}+\varepsilon_0\right)S_n$$

从而

$$S_n\le\frac{a_1}{1-\overline{r}-\overline{s}-\overline{t}-\varepsilon_0}$$

故此时级数收敛。

(ii) 类似于(4)式，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}-\varepsilon_0>1$ 且对于所有的自然数 n 都有

$$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}>\left(\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}-\varepsilon_0\right)a_n$$

于是

$$S_{3n}=a_1+\sum_{k=1}^{n}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{3k}+\sum_{k=1}^{n}a_{3k+1}\ge\left(\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}-\varepsilon_0\right)S_n+\left(1-\underline{r}-\underline{s}-\underline{t}+\varepsilon_0\right)a_1$$

若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，设该极限为 S。对上式两边取极限可得

$$S\ge\left(\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}-\varepsilon_0\right)S+\left(1-\underline{r}-\underline{s}-\underline{t}+\varepsilon_0\right)a_1>S+\left(1-\underline{r}-\underline{s}-\underline{t}+\varepsilon_0\right)a_1$$

因 $1-\underline{r}-\underline{s}-\underline{t}+\varepsilon_0<0$，故得矛盾。因此，级数 $\sum a_n$ 发散。

(iii) 考察级数 $\sum\limits_{n=30}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\left(\ln\ln\ln n\right)^p}$ 的敛散性。由于

$$\underline{r}=\overline{r}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\left(\ln\ln\ln n\right)^p}{(3n-1)\cdot\ln(3n-1)\cdot\ln\ln(3n-1)\cdot\left[\ln\ln\ln(3n-1)\right]^p}=\frac{1}{3}$$

$$\underline{s}=\overline{s}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\left(\ln\ln\ln n\right)^p}{3n\cdot\ln 3n\cdot\ln\ln 3n\cdot\left(\ln\ln\ln 3n\right)^p}=\frac{1}{3}$$

$$\underline{t}=\overline{t}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\left(\ln\ln\ln n\right)^p}{(3n+1)\cdot\ln(3n+1)\cdot\ln\ln(3n+1)\cdot\left[\ln\ln\ln(3n+1)\right]^p}=\frac{1}{3}$$

因此 $\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}=1=\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}$，故引理 2 无法判别其敛散性。但由文献[3]知，当 $p>1$ 时，该级数收敛；当 $p\le1$ 时，该级数发散。

由引理 2 可得如下定理 3~5，证明均类似于定理 1，在此只给出定理 3 的证明，其余证明省略。

定理 3 设 $\sum a_n$ 为正项级数，$\underline{d},\overline{d}$ 如(1)式所示且满足 $0<\underline{d}\le1\le\overline{d}$。$\underline{r},\underline{s},\underline{t}$ 及 $\overline{r},\overline{s},\overline{t}$ 如(6)式所示，则

(i) 当 $\overline{s}<\dfrac{\underline{d}}{1+\underline{d}+\underline{d}\underline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\underline{s}>\dfrac{\overline{d}}{1+\overline{d}+\overline{d}\overline{d}}$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{s}\le\dfrac{\overline{d}}{1+\overline{d}+\underline{d}\overline{d}}$ 且 $\overline{s}\ge\dfrac{\underline{d}}{1+\underline{d}+\underline{d}\overline{d}}$ 时，该判别法失效。

证 (i) 由于

$$\overline{t}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n+1}}{a_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n+1}}{a_{3n}}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n}}{a_n}<\frac{\underline{d}\overline{d}}{1+\underline{d}+\underline{d}\overline{d}}$$

$$\overline{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n-1}}{a_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n-1}}{a_{3n}}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n}}{a_n}=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{a_{3n-1}}}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n}}{a_n}<\frac{1}{1+\underline{d}+\underline{d}\overline{d}}$$

因此$\overline{r}+\overline{s}+\overline{t}<1$，由引理 2(i)知级数$\sum a_n$收敛；

(ii) 由于

$$\underline{t}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n+1}}{a_n}\ge\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n+1}}{a_{3n}}\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{a_n}>\frac{\underline{d}\overline{d}}{1+\overline{d}+\underline{d}\overline{d}}$$

$$\underline{r}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n-1}}{a_n}\ge\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n-1}}{a_{3n}}\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{a_n}=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{3n}}{a_{3n-1}}}\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{a_n}>\frac{1}{1+\overline{d}+\underline{d}\overline{d}}$$

因此$\underline{r}+\underline{s}+\underline{t}>1$，再由引理 2(ii)知级数$\sum a_n$发散。

(iii) 考察级数$\sum_{n=30}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q\cdot(\ln\ln\ln n)^r}$的敛散性[3]。由于

$$\underline{d}=\overline{d}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q\cdot(\ln\ln\ln n)^r}{(n+1)\cdot\left[\ln(n+1)\right]^p\cdot\left[\ln\ln(n+1)\right]^q\cdot\left[\ln\ln\ln(n+1)\right]^r}=1$$

$$\underline{s}=\overline{s}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q\cdot(\ln\ln\ln n)^r}{3n\cdot(\ln 3n)^p\cdot(\ln\ln 3n)^q\cdot(\ln\ln\ln 3n)^r}=\frac{1}{3}$$

因此，

$$\underline{s}=\frac{\overline{d}}{1+\overline{d}+\underline{d}\overline{d}},\ \overline{s}=\frac{\underline{d}}{1+\underline{d}+\underline{d}\overline{d}},$$

故定理 3 无法判别其敛散性。但由文献[3]知，当$p=1,\ q=1,\ r>1$或者$p=1,\ q>1,\ r\in\mathbb{R}$或者$p>1,\ q\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}$时，该级数收敛；其余情形该级数发散。

定理 4 设$\sum a_n$为正项级数，$\underline{d},\overline{d}$如(1)式所示且满足$0<\underline{d}\le1\le\overline{d}$。$\underline{r},\underline{s},\underline{t}$及$\overline{r},\overline{s},\overline{t}$如(6)式所示，则

(i) 当$\overline{r}<\frac{1}{1+\overline{d}+\overline{d}^2}$时，级数$\sum a_n$收敛；

(ii) 当$\underline{r}>\frac{1}{1+\underline{d}+\underline{d}^2}$时，级数$\sum a_n$发散；

(iii) 当$\underline{r}\le\frac{1}{1+\underline{d}+\underline{d}^2}$且$\overline{r}\ge\frac{1}{1+\overline{d}+\overline{d}^2}$时，该判别法失效。

定理 5 设$\sum a_n$为正项级数，$\underline{d},\overline{d}$如(1)式所示且满足$0<\underline{d}\le1\le\overline{d}$。$\underline{r},\underline{s},\underline{t}$及$\overline{r},\overline{s},\overline{t}$如(6)式所示，则

(i) 当$\overline{t}<\frac{\underline{d}^2}{1+\underline{d}+\underline{d}^2}$时，级数$\sum a_n$收敛；

(ii) 当$\underline{t}>\frac{\overline{d}^2}{1+\overline{d}+\overline{d}^2}$时，级数$\sum a_n$发散；

(iii) 当$\underline{t}\le\frac{\overline{d}^2}{1+\overline{d}+\overline{d}^2}$且$\overline{t}\ge\frac{\underline{d}^2}{1+\underline{d}+\underline{d}^2}$时，该判别法失效。

由前述的证明可以看出引理 1 和引理 2 可以进一步推广到更一般情形，且可以得出类似定理 1~5 的

结论，但因篇幅所限在此不再列出更多的结论。下面应用本文的结论讨论一些级数的敛散性。

例 1 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ 的敛散性。

解 由于

$$\underline{d}=\overline{d}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}\cdot\frac{n^n}{n!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=1$$

此时达朗贝尔判别法失效。利用 Stirling 公式[9]可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2^{2n}n^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{e^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故 $\underline{q}=\overline{q}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\overline{d}}$，由定理 1 知该级数发散。

例 2 [8] 讨论级数

$$1+b+bc+b^2c+b^2c^2+\cdots+b^{n-1}c^n+b^nc^n+\cdots \tag{7}$$

数的敛散性，其中 $0<b<1<c$.

解 由于

$$\underline{d}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=b<1,\ \overline{d}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c>1$$

因此，达朗贝尔判别法失效。

当 $bc<1$ 时，由于

$$\underline{s}=\overline{s}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(bc)^n=0$$

且 $\underline{r}=\overline{r}=\underline{t}=\overline{t}=0$. 故由引理 2 或者定理 3~5 均可判别该级数收敛。

当 $bc=1$ 或者 $bc>1$ 时，由级数(7)的形式可以判断出此时级数是发散的。

众所周知，拉贝判别法也是正项级数敛散性判别中常用的一种方法，并且拉贝判别法判别范围较达朗贝尔判别法更广泛[8]。

拉贝判别法[10] 设 $\sum a_n$ 为正项级数，记

$$\underline{R}=\underline{\lim_{n\to\infty}}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right),\ \overline{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

则

(i) 当 $\underline{R}>1$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

(ii) 当 $\overline{R}<1$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散；

(iii) 当 $\underline{R}\le 1\le\overline{R}$ 时，该判别法失效。

特别需要指出的是：本文引理 1 给出的判别方法要强于拉贝判别法。因为，若 $\underline{R}>1$，则可取

DOI: 10.12677/pm.2021.116133

$1 < s_1 < s_2 < \underline{R}$，当 n 充分大时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{s_2}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s_1}$$

故

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{s_1}$$

从而

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \cdot \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{n}{n+1}\right)^{s_1} = \frac{1}{2^{s_1}}$$

故

$$\overline{q} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n}}{a_n} \le \frac{1}{2^{s_1}}$$

同理可证

$$\overline{p} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{2n-1}}{a_n} \le \frac{1}{2^{s_1}}$$

故有

$$\overline{p} + \overline{q} \le \frac{2}{2^{s_1}} < 1 .$$

类似可证当 $\overline{R} < 1$ 时，有 $\underline{p} + \underline{q} > 1$。由此可知：能够用拉贝判别法确定敛散性的级数均可用引理 1 确定。反之则不能，如下例。

例 3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}}$ 的敛散性。

解 由

$$\underline{d} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^3} < 1 < \overline{d} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 ,$$

故达朗贝尔判别法失效。又

$$\underline{R} = \underline{\lim_{n\to\infty}} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = -\infty,\ \overline{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty$$

故拉贝判别法也失效。但易得 $\underline{p} = \overline{p} = 0$，$\underline{q} = \overline{q} = 0$，利用引理 1 或者定理 1 或者定理 2 均可判别该级数收敛。

基金项目

本文受到广东石油化工学院科研基金人才引进项目(2019rc101)、国家自然科学资金青年资金项目(11701114)资助。

参考文献

[1] 刘秋生. 正項級数判斂的一个方法[J]. 数学通报, 1964(3): 39-40.

[2] 周肇锡. 对“正项级数判敛的一个方法”一文的补充[J]. 数学通报, 1964(11): 35-36.
[3] 叶志江. 对“正项级数判敛的一个方法”的进一步讨论[J]. 数学通报, 1964(11): 37-38.
[4] 李铁烽. 正项级数判敛的一种新的比值判别法[J]. 数学通报, 1990(1): 46-47.
[5] 张莉. 关于正项级数收敛性判别的一个推广[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2000(4): 395-398.
[6] 宋作忠, 安玉伟. 级数比值审敛法的一点改进[J]. 大学数学, 1996(2): 143-144.
[7] 洪勇. 一个新的正项级数敛散性判别定理及应用[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2004, 27(3): 245-247.
[8] 华东师范大学数学系. 数学分析: 下册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 11, 15.
[9] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 310, 353.
[10] 丁勇. 几种正项级数敛散性判别法的比较[J]. 数学通报, 1988(11): 21-24.