Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1211-1220
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116134

一类二阶非线性微分系统正解的存在唯一性

杨 阳

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 2978979409@qq.com

收稿日期：2021年5月13日；录用日期：2021年6月15日；发布日期：2021年6月22日

摘 要

本文利用 Leray-Schauder 抉择和 Banach 压缩映像原理研究了二阶微分系统

$$\begin{cases} -u'' = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ -v'' = g(t, u(t), v(t)), \\ u(0) = u'(1) = 0, \\ v(0) = v'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在唯一性, 其中 $f, g : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续.

关键词

Lipschitz条件，压缩映像原理，正解，Leray-Schauder抉择

Existence and Uniqueness of Positive Solutions for a Class of Second-Order Nonlinear Differential Systems

Yang Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 2978979409@qq.com

文章引用: 杨阳. 一类二阶非线性微分系统正解的存在唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1211-1220.
DOI: 10.12677/pm.2021.116134

Received: May 13^{th}, 2021; accepted: Jun. 15^{th}, 2021; published: Jun. 22^{nd}, 2021

Abstract

In this paper, by using Leray-Schauder's alternative and contraction mapping principle to study the positive solutions for a system of second-order boundary value problems

$$\begin{cases} -u'' = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ -v'' = g(t, u(t), v(t)), \\ u(0) = u'(1) = 0, \\ v(0) = v'(1) = 0, \end{cases}$$

where $f, g : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ **are continuous.**

Keywords

Lipschitz Condition, Contraction Mapping Principle, Positive Solution, Leray Schauder's Alternative

1. 引言

非线性常微分方程边值问题正解的存在性问题, 是近几十年来专家学者所研究的重要课题. 尤其是二阶常微分方程边值问题, 它在物理学, 生物学等领域有着广泛的应用. 通过查阅文献我们知道, 对于二阶非线性常微分方程组的研究相对较少 [1–4]. 在文献 [5]中, 马如云利用锥上不动点理论研究了如下二阶微分系统

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda f_1(t, x(t), y(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ y''(t) + \lambda f_2(t, x(t), y(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

多解的存在性问题, 其中 $\lambda > 0$ 为参数, $f_1,\ f_2 : [0,1] \times R^+ \times R^+ \to R^+$ 连续.

在文献 [6]中, 王素云利用 Williams-Leggett 不动点定理, 讨论了微分系统

$$\begin{cases} -u''(t) = f_1(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ -v''(t) = f_2(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

三个正解的存在性, 其中 $f_1,\ f_2 : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续.

在文献 [7]中, 杨志林, 孙经先利用拓扑度方法研究了二阶常微分方程组边值问题

$$\begin{cases} -u'' = f(x, v), \quad t \in (0,1), \\ -v'' = g(x, u), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性和正解的精确个数, 其中 $g,\ f : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续.

在文献 [8]中, 杨志林等人利用不动点指数研究了二阶拟线性微分系统

$$\begin{cases} -((u')^{p-1})' = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ -((v')^{q-1})' = g(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0, \\ v(0) = v'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $f,\ g : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$连续.

受上述文献的启发, 本文首先利用 Leray-Schauder 抉择证明问题

$$\begin{cases} -u'' = f(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ -v'' = g(t, u(t), v(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0, \\ v(0) = v'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 再通过 Banach 压缩映像原理得到问题 (1.1) 正解的唯一性.

2. 预备知识

本文的主要工具是如下定理:

引理 2.1. [9] (Banach 压缩映像原理) 设 (x,ρ) 是完备的度量空间, $T: X \to X$ 为压缩映射, 那么映射 T 在 X 内有且只有一个不动点.

引理 2.2. [9] (Arzela-Ascoli定理) 集合 $M \subset C(J,R^1)$ 相对列紧的充分必要条件是:
(i)集合 M 中的函数一致有界, 即存在常数 $K>0$, 使得对一切 $u=u(t)\in M$ 都有 $|u(t)|\leq K$, $\forall t\in J$;
(ii)集合 M 中的函数等度连续, 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得当 $t_1\in J$, $t_2\in J$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 对任给 $u=u(t)\in M$, 都有 $|u(t_1)-u(t_2)|<\varepsilon$.

引理 2.3. [10] (Leray-Schauder 抉择) 设 $F: E\to E$ 是一个连续算子.则子集 $e(F)$ 要么无界,要么 F 至少有一个不动点,其中 $e(F)=\{x\in E: x=\Theta F(x),\ 0<\Theta<1\}$.

3. 主要结果及其证明

本文的工作空间是实 Banach 空间 $E=C[0,1]$, 范数为 $||u||=\max\{|u(t)|: t\in[0,1]\}$, 记锥 $P=\{u\in C[0,1]: u(t)\geq 0, t\in[0,1]\}$, 则 $P\subset E$.

定义

$$||(u,v)||=||u||+||v||,\ (u,v)\in E^2,$$

其中 $E^2=E\times E$ 是定义在上述范数下的实 Banach 空间且 $P^2\subset E^2$.

齐次问题

$$\begin{cases} -u''=0, \\ u(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G(t,s)=\begin{cases} s, & 0\leq s\leq t\leq 1, \\ t, & 0\leq t\leq s\leq 1, \end{cases}$$

其中 $G(t,s)\geq 0$, 且易知 $\forall t,s\in[0,1]$, 有 $G(t,s)\leq G(s,s)$ 成立.

微分系统 (1.1) 有解当且仅当积分方程组

$$\begin{cases} u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds, \\ v(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s),v(s))ds \end{cases} \tag{3.1}$$

有解.

如下定义算子 A_1，A_2，A：

$$A_1(u,v)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds,$$

$$A_2(u,v)(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s,u(s),v(s))ds,$$

$$A(u,v)(t) = (A_1(u,v)(t), A_2(u,v)(t)). \tag{3.2}$$

则 $A_1, A_2 : P^2 \to P$ 和 $A : P^2 \to P^2$. 显然微分系统 (1.1) 的可解性等价于算子方程 A 有不动点.

本文的主要结果是

定理 3.1. 设 $f, g : [0,1] \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续, 且存在常数 α_i，$\gamma_i > 0(i = 1,\ 2)$ 且 $\alpha_0, \gamma_0 > 0$, $\forall u_i$，$v_i \in [0,\infty)$，$i = 1,\ 2$ 使得

$$|f(t,u_1,v_2)| \le \alpha_0 + \alpha_1|u_1| + \alpha_2|u_2|,$$

$$|g(t,u_1,v_2)| \le \gamma_0 + \gamma_1|u_1| + \gamma_2|u_2|.$$

则当

$$\max\{\omega_1,\ \omega_2\} < 1,$$

其中 $\omega_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \gamma_1)$，$\omega_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \gamma_2)$，$\omega_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \gamma_0)$. 系统 (1.1) 至少有一个正解.

证明 首先证算子 A 是 $P^2 \to P^2$ 全连续算子. 由于 f，g 是连续函数,从而 A_1，A_2 是连续算子,则 A 是连续算子.设 Ω 是 $P \times P$ 中的有界集, 则 $\exists M_3 > 0$, 使得对 $\forall (u,v) \in \Omega$, $|f| \le M_3$.

$$\begin{aligned}
||A_1(u,v)(t)|| &= |\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))ds| \\
&\le \int_0^1 G(s,s)M_3 ds \\
&\le \frac{M_3}{2}.
\end{aligned}$$

故 $A_1(\Omega)$ 一致有界. 同理可得

$$\begin{aligned}
||A_2(u,v)(t)|| &= \left|\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s),v(s))ds\right| \\
&\le \int_0^1 G(s,s)N_3 ds \\
&\le \frac{N_3}{2},
\end{aligned}$$

其中 $N_3 > 0$, $|g| \le N_3$. 故 $A_2(\Omega)$ 一致有界.

由此可知 $\exists M_3, N_3 > 0$, 使得

$$||A(u,v)(t)|| = ||(A_1(u,v)(t)|| + ||A_2(u,v)(t))|| \leq \frac{M_3}{2} + \frac{N_3}{2},$$

故 $A(\Omega)$ 一致有界.

因为 Green 函数在 $0 \leq t, s \leq 1$ 上连续, 由闭区间上连续函数的一致连续性可知, Green 函数在区间 $[0,1]$ 上一致连续, 即对$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta$ 使得对 $\forall t_1$, $t_2 \in [0,1]$, 且当 $|t_1 - t_1| < \delta, \forall s \in [0,1]$, 有

$$|G(t_2,s) - G(t_1,s)| < \frac{\varepsilon}{M_3},$$

对 $\forall u, v \in \Omega$, 当 $|t_1 - t_1| < \delta_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}||A_1(u,v)(t_2) - A_1(u,v)(t_1)|| &= \Big|\int_0^1 G(t_2,s)f(s,u(s),v(s))ds - \int_0^1 G(t_1,s)f(s,u(s),v(s))ds\Big|\\ &\leq \int_0^1 M_3\Big|G(t_2,s) - G(t_1,s)\Big|ds\\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $A_1(\Omega)$ 等度连续.

同理 $\forall u, v \in \Omega$, 当 $|t_1 - t_1| < \delta_2$ 时, 有

$$\begin{aligned}||A_2(u,v)(t_2) - A_2(u,v)(t_1)|| &= \Big|\int_0^1 G(t_2,s)g(s,u(s),v(s))ds - \int_0^1 G(t_1,s)g(s,u(s),v(s))ds\Big|\\ &\leq \int_0^1 N_3\Big|G(t_2,s) - G(t_1,s)\Big|ds\\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $A_2(\Omega)$ 等度连续.

对 $\forall u$, $v \in \Omega$, 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当 $|t_1 - t_1| < \delta$, 有

$$\begin{aligned}||A(u,v)(t_2) - A(u,v)(t_1)|| &= \Big|(A_1(u,v)(t_2), A_2(u,v)(t_2)) - (A_1(u,v)(t_1), A_2(u,v)(t_1)\Big|\\ &= \Big|(A_1(u,v)(t_2) - A_1(u,v)(t_1))\Big| + \Big|(A_2(u,v)(t_2) - A_2(u,v)(t_1))\Big|\\ &\leq 2\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $A(\Omega)$ 等度连续. 因此由 Arzela-Ascoli's 定理知 A 是全连续算子.

定义 $\Theta(A) = \{(u,v) \in P \times P : (u,v) = \vartheta A(u,v); 0 \leq \vartheta \leq 1\}$. 对 $(u,v) \in \Theta A$. 有 $(u,v) = \vartheta A(u,v)$. 对 $\forall t \in [0,1]$, 有 $u(t) = \vartheta A_1(u,v)(t)$, $v(t) = \vartheta A_2(u,v)(t)$

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &= |\vartheta A_1(u,v)(t)| \\
&\leq |A_1(u,v)(t)| \\
&\leq |\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s),v(s))ds| \\
&\leq \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1|u_1|+\alpha_2|u_2|),
\end{aligned}
$$

根据范数的定义有

$$||u(t)|| \leq \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1||u_1||+\alpha_2||u_2||).$$

同样的我们有

$$||v(t)|| \leq \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1||u_1||+\gamma_2||u_2||).$$

由范数 $||(u,v)|| = ||u|| + ||v||$, 知

$$
\begin{aligned}
||u||+||v|| &= \frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1||u_1||+\alpha_2||u_2||)+\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1||u_1||+\gamma_2||u_2||) \\
&\leq \frac{1}{2}(\alpha_0+\gamma_0)+\max\{\frac{1}{2}(\alpha_1+\gamma_1),\ \frac{1}{2}(\alpha_2+\gamma_2)\}(||u||+||v||)
\end{aligned}
$$

则对 $\forall t \in [0,1]$

$$||(u,v)|| \leq \frac{\omega_0}{1-\max\{\omega_1,\omega_2\}}$$

从而集合 $\Theta(A)$ 有界. 由引理 (3.2) 知算子 A 至少有一个不动点, 即问题 (1.1) 有解.

定理 3.2 设 $f,g : [0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续, 并且存在 $K_i, L_i > 0$, 对 $\forall t \in [0,1]$, u_i, $v_i \in [0,\infty), i=1,2$, 满足 Lipschitz 条件

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2) \leq K_1|u_1-u_2|+L_1|v_1-v_2|,$$

$$|g(t,u_1,v_1)-g(t,u_2,v_2) \leq K_2|u_1-u_2|+L_2|v_1-v_2|.$$

如果

$$\frac{M}{2}+\frac{N}{2}<1, \tag{3.3}$$

其中 $M=\max\{K_1,L_1\}$, $N=\max\{K_2,L_2\}$. 则系统 (1.1) 在 B_r 上有唯一解.

证明 记 $M_1 = \sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t,0,0)|$, $M_2 = \sup\limits_{t\in[0,1]}|g(t,0,0)|$, 取 $B_r = \{(u,v)\in P\times P : ||(u,v)|| \leq r\}$, 其中

$$r \geq \frac{\frac{M_1}{2}+\frac{M_2}{2}}{1-\frac{M}{2}-\frac{N}{2}}.$$

首先证明 $AB_r \subset B_r$, 对任意的 $(u,v) \in B_r$, $t \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} |f(t,u(t),v(t))| &\le |f(t,u(t),v(t)) - f(t,0,0) + f(t,0,0)| \\ &\le K_1|u(t)| + L_1|v(t)| + M_1 \\ &\le M(||u(t)|| + ||v(t)||) + M_1 \\ &\le M||(u,v)|| + M_1 \\ &\le Mr + M_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

同理可证

$$|g(t,u(t),v(t))| \le Nr + M_2. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 得

$$\begin{aligned} ||A_1(u,v)|| &= \max_{t\in[0,1]} |A_1(u,v)(t)| \\ &\le \int_0^1 G(s,s)|f(s,u(s),v(s))|ds \\ &\le \int_0^1 G(s,s)(Mr + M_1)ds \\ &\le \frac{1}{2}(Mr + M_1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

同样的可得

$$||A_2(u,v)|| \le \frac{1}{2}(Nr + M_2). \tag{3.7}$$

由 (3.6) 和 (3.7) 得

$$||A(u,v)|| = ||A_1(u,v)|| + ||A_2(u,v)|| \le r,$$

即 $AB_r \subset B_r$.

现在证明 A 是压缩算子, 对任意的 (u_1,v_1), $(u_2,v_2) \in B_r$, $t \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} ||A_1(u_2,v_2)(t) - A_1(u_1,v_1)(t)|| &= \Big| \int_0^1 G(t,s)f(s,u_2(s),v_2(s))ds - \int_0^1 G(t,s)f(s,u_1(s),v_1(s))ds \Big| \\ &\le \int_0^1 G(s,s)\Big|f(s,u_2(s),v_2(s)) - f(s,u_1(s),v_1(s))\Big|ds \\ &\le \int_0^1 G(s,s)(K_1|u_2(s) - u_1(s)| + L_1|v_2(s) - v_1(s)|)ds \\ &\le \int_0^1 G(s,s)(K_1||u_2 - u_1|| + L_1||v_2 - v_1||)ds \\ &\le M\int_0^1 G(s,s)(||u_2 - u_1|| + ||v_2 - v_1||)ds \\ &= \frac{M}{2}(||u_2 - u_1|| + ||v_2 - v_1||). \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}||A_2(u_2,v_2(t))-A_2(u_1,v_1(t))|| &= \Big|\int_0^1 G(t,s)g(s,u_2(s),v_2(s))ds-\int_0^1 G(t,s)g(s,u_1(s),v_1(s))ds\Big| \\ &\le \int_0^1 G(s,s)\Big|g(s,u_2(s),v_2(s))-g(s,u_1(s),v_1(s))\Big|ds \\ &\le \int_0^1 G(s,s)(K_2|u_2(s)-u_1(s)|+L_2|v_2(s)-v_1(s)|ds \\ &\le \int_0^1 G(s,s)(K_2||u_2-u_1||+L_2||v_2-v_1||)ds \\ &\le N\int_0^1 G(s,s)(||u_2-u_1||+||v_2-v_1||)ds \\ &= \frac{N}{2}(||u_2-u_1||+||v_2-v_1||).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}||A(u_2,v_2)(t)-A(u_1,v_1)(t)|| &= \Big|(A_1(u_2,v_2)(t),A_2(u_2,v_2)(t))-(A_1(u_1,v_1)(t),A_2(u_1,v_1)(t))\Big| \\ &= \Big|(A_1(u_2,v_2)(t)-A_1(u_1,v_1)(t)),(A_2(u_2,v_2)(t)-A_2(u_1,v_1)(t))\Big| \\ &\le (\frac{M}{2}+\frac{N}{2})(||u_2-u_1||+||v_2-v_1||).\end{aligned}$$

由 (3.3) 知, $A(u,v)(t)$ 为 $B_r \to B_r$ 的压缩算子. 因此由 Banach 压缩映像原理知算子方程 (3.2) 有唯一的不动点 (u,v), 即问题 (1.1) 有唯一的解 (u,v), 使得 $A(u,v)=(u,v)$.

基金项目

国家自然科学基金(11561063).

参考文献

[1] Grigorian, G.A. (2021) On the Reducibility of Systems of Two Linear First-Order Ordinary Differential Equations. *Monatshefte für Mathematik*, **195**, 107-117. https://doi.org/10.1007/s00605-020-01503-7

[2] Maksimov, V.I. (2021) The Methods of Dynamical Reconstruction of an Input in a System of Ordinary Differential Equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**, 125-156. https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0040

[3] Gainetdinova, A.A. and Gazizov, R.K. (2020) Integration of Systems of Two Second-Order Ordinary Differential Equations with a Small Parameter That Admit Four Essential Operators.

Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya, **17**, 604-614.
https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.039

[4] Filimonov, M.Yu. (2020) Global Asymptotic Stability with Respect to Part of the Variables for Solutions of Systems of Ordinary Differential Equations. *Differential Equations*, **56**, 710-720.
https://doi.org/10.1134/S001226612006004X

[5] Ma, R.Y. (2000) Multiple Nonnegative Solutions of Second-Order System of Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **42**, 1003-1010.
https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00152-2

[6] 王素云. 一类二阶常微分方程组边值问题的三个正解[J]. 应用泛函分析学报, 2000, 2(4): 349-352.

[7] 杨志林, 孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题的正解[J]. 数学学报, 2000, 47(1): 111-118.

[8] Yang, Z.L., Wang, X.M. and Li, H.Y. (2020) Positive Solutions for System of Second-Order Quasilinear Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **195**, Article ID: 111749.
https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111749

[9] 郭大均, 孙经先, 刘兆理, 非线性常微分方程泛函方法[M]. 第2版. 济南: 山东科学技术出版社, 2006.

[10] 郭大均. 非线性泛函分析[M]. 第2版. 济南: 山东科学技术出版社, 2003.