Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1221-1229
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116135

Hans汉斯

G-Brown运动驱动的脉冲随机泛函微分方程的指数稳定性

王吉平，李光洁*

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州
Email: *scutliguangjie@163.com

收稿日期：2021年5月14日；录用日期：2021年6月16日；发布日期：2021年6月24日

摘 要

研究一类G-Brown运动驱动的脉冲随机泛函微分方程的*p*-阶矩指数稳定性。运用Razumikhin-型方法、G-Lyapunov函数、随机分析和代数不等式技巧，获得了该类方程的平凡解是*p*-阶矩指数稳定的充分条件。同时，通过一个例子说明所得的结果。

关键词

脉冲随机泛函微分方程，G-Brown运动，指数稳定性，Razumikhin-型技巧

Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations Driven by G-Brownian Motion

Jiping Wang, Guangjie Li*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong
Email: *scutliguangjie@163.com

Received: May 14th, 2021; accepted: Jun. 16th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

This paper investigates the *p*-th moment exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations driven by G-Brownian motion (G-ISFDEs). By employing the Razumikhin-

*通讯作者。

文章引用: 王吉平，李光洁. G-Brown 运动驱动的脉冲随机泛函微分方程的指数稳定性[J]. 理论数学，2021，11(6): 1221-1229. DOI: 10.12677/pm.2021.116135

type method, G-Lyapunov functions, stochastic analysis and algebraic inequality techniques, some sufficient criteria ensuring the *p*-th moment exponential stability of the trivial solution to G-ISFDEs are established. Meanwhile, an example is presented to illustrate the obtained results.

Keywords

Impulsive Stochastic Functional Differential Equations, G-Brownian Motion, Exponential Stability, Rzumikhin-Type Technique

1. 引言

脉冲效应普遍存在于系统状态在某些时刻突然发生变化的演化系统中，涉及医学、生物学、经济学、力学、电子学和电信等领域(参阅专著[1])。然而，系统的状态往往不仅受到突然的脉冲效应影响，而且还会受到随机扰动的影响，这极大激发了学者们研究具有脉冲效应的随机微分方程的兴趣。实际中，许多随机微分系统不仅依赖于当前的状态下还依赖于过去的历史状态，面对这样的情形常用随机泛函(时滞)微分方程来刻画[2]。另一方面，现实系统不可避免地受到干扰而使整个系统失去控制从而导致不稳定性，因而研究随机微分方程的稳定性很有必要并成为一个重要的课题。然而，脉冲效应可以使一个不稳定的系统变得稳定(见[3])，因此研究脉冲随机微分方程的稳定性也很有必要(如[4] [5] [6] [7])。文献[8] [9] [10] [11]研究了脉冲随机泛函微分方程的稳定性。

很多实际问题比如不确定性问题，风险度量问题以及金融中的超对冲超定价问题等都涉及非线性期望。Peng [12] [13]提出了一类非线性期望(即 G-期望)来处理这类问题。在 G-期望框架理论下，[12] [13]进一步介绍了 G-Brown 运动以及相关的 Itô 积分。自此，关于 G-Brown 运动驱动的随机微分方程的研究逐渐得到学者们的关注并成为热点。G-Brown 运动驱动的随机时滞微分方程的稳定性和稳定化方面的研究已取得了一定的成果(见文献[14] [15] [16] [17]及其中的参考文献)。文献[18] [19] [20]研究了 G-Brown 运动驱动的脉冲随机微分方程以及 G-Brown 运动驱动的脉冲随机泛函微分方程的稳定性。在上述成果的基础上，本文利用 Razumikhin-型方法、G-Lyapunov 函数技巧、随机分析和不等式方法，建立了一类 G-Brown 运动驱动的脉冲随机泛函微分方程是 p-阶矩指数稳定的充分条件，丰富了该类方程稳定性方面的结论。

本文结构如下：第 2 节介绍了一些符号、假设条件和预备知识；第 3 节给出了主要结果，获得了 G-Brown 运动驱动的脉冲随机泛函微分方程的 p-阶矩指数稳定的充分条件；第 4 节通过一个例子说明所得的结果。

2. 预备知识

记 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty),\mathbf{R}^{+}=[0,+\infty)$。对任意的 $x\in\mathbf{R}^{n},|x|=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$ 表示 Euclid 范数。若 $\boldsymbol{A}$ 是一个向量或矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 代表其转置，且 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$ 表示其范数，$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$。对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^{n}$，$\langle x,y\rangle$ 或 $x^{\mathrm{T}}y$ 表示 x,y 的内积。$a\vee b=\max\{a,b\}$ 和 $a\wedge b=\min\{a,b\}$。

关于定义在次线性空间 $(\Omega,\mathcal{H},\hat{E})$ 上的 G-正态分布、G-期望、G-Brown 运动以及相关的 Itô 积分和二次变差过程的详细介绍，可参阅文献[12] [13]。对 $\forall T\in\mathbf{R}^{n}$，$[0,T]$ 上的一个分割 $\pi_T=\{t_0,t_1,\cdots,t_N\}$ 满足

$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$，$\mu(\pi_T)=\max\{|t_{i+1}-t_i|:i=0,1,\cdots,N-1\}$。给定 $p\ge 1$，定义 $M_G^{p,0}([0,T])=\left\{\eta_t=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j I_{[t_j,t_{j+1})}(t):\xi_j\in L_G^p(\Omega_{t_j})\right\}$。

$M_G^p([0,T])$ 表示 $M_G^{p,0}([0,T])$ 在范数 $\|\eta\|_{M_G^{p,0}([0,T])}=\left(\frac{1}{T}\int_0^T\hat{E}\left[|\eta_t|^p\right]\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ 下的完备空间。

记 $N=\{0,1,2,\cdots\}$。$\varphi(t^+)$ 和 $\varphi(t^-)$ 分别表示函数 $\varphi(t)$ 在 t 时刻的右极限和左极限。令 $\tau>0$，$PC([-\tau,0];\mathbf{R}^n)=\{\varphi:[-\tau,0]\to\mathbf{R}^n\mid\varphi(t^+)=\varphi(t),\forall t\in[-\tau,0)\}$，此外在 $PC([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 中，除了有限个点外均有 $\varphi(t^-)$ 存在且 $\varphi(t^-)=\varphi(t)$。对 $\forall p>0$ 和 $\forall t\ge 0$，$PC_{\mathcal{F}_t}^p([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$ 表示所有 $\mathcal{F}_t$-可测的 $PC([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$-值随机过程。$\varphi=\{\varphi(\theta):-\tau\le\theta\le 0\}$ 满足 $\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\hat{E}|\varphi(\theta)|^p<\infty$。记 $PC^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 是所有有界的 $PC([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$-值函数的集合。为了方便，定义以下集合：

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_0}^p([-\tau,0];\mathbf{R}^n)=\left\{\varphi:\varphi\text{是}\mathcal{F}_0\text{-可测的},PC^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\text{-随机变量},\text{满足}\varphi\in M_G^p([-\tau,0];\mathbf{R}^n)\right\},$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_t}^p([-\tau,+\infty];\mathbf{R}^n)=\left\{X:X\in PC_{\mathcal{F}_t}^p([\Omega,0],\mathbf{R}^n),X\text{是左极右连续的满足}X\in M_G^p([-\tau,+\infty];\mathbf{R}^n)\right\}。$$

考虑如下形式的 G-Brown 运动驱动的脉冲随机泛函微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(t)=f(t,X_t)\mathrm{d}t+h_{ij}(t,X_t)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_t+\sigma_j(t,X_t)\mathrm{d}B_t^j, & t\ne t_k,\quad t\ge t_0,\\ \Delta X(t_k)=I_k(t_k,X(t_k^-)), & t=t_k,\quad k=1,2,3,\cdots,\\ X_{t_0}=\xi,\end{cases}\tag{2.1}$$

初始值 $X_{t_0}=\xi\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}_0}^p([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$。$B_t=(B_t^1,B_t^2,\cdots,B_t^d)^{\mathrm{T}}$ 是一个 d-维的 G-Brown 运动。$X_t=X(t+\theta)\in PC_{\mathcal{F}_t}^p([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$。$\{\langle B,B\rangle_t\}_{t\ge 0}$ 是 G-Brown 运动 $\{B_t\}_{t\ge 0}$ 的二次变差过程。$f,h_{ij},\sigma_j\in[0,T]\times PC_{\mathcal{F}_t}^p([-\tau,0],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ 是 Borel-可测的，且对所有的 $T\in\mathbf{R}^n$ 和 $X\in\mathbf{R}^n$，$f(\cdot,X),h_{ij}(\cdot,X),\sigma_j(\cdot,X)\in M_G^p([-\tau,T],\mathbf{R}^n)$。脉冲函数 $I_k(t_k,X(t_k^-)):\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 表示 $X(t)$ 在 t_k 时刻的脉冲扰动。发生脉冲时刻的点 t_k 满足 $0\le t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$，$t_k\to\infty$ (当 $k\to\infty$ 时，$t_k\to\infty$)，$X(t_k^-)=\lim_{h\to 0^-}X(t_k+h)$，$X(t_k^+)=\lim_{h\to 0^+}X(t_k+h)$，$\Delta X(t_k)=X(t_k)-X(t_k^-)$。

文中假设函数 f,h_{ij},σ_j 以及 I_k 满足方程(2.1)解存在唯一的所有条件(见[13])。当方程(2.1)的初始值是 X_{t_0} 时，记方程(2.1)的解 $X(t)=X(t;t_0,X_{t_0})$。为了研究方程(2.1)的稳定性，假设对 $\forall t\ge t_0$，$f(t,0)=h_{ij}(t,0)=\sigma(t,0)\equiv 0$ 以及 $I_k(t,0)\equiv 0\ (k=1,2,3,\cdots)$，则方程(2.1)存在平凡解 $X(t)\equiv 0$。

注 2.1 文中采用 Einstein 记号，也就是在每一项里出现的指标 i 和 j 指的是求和，表示如下：

$$\int_0^t h_{ij}(s,X_s)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s:=\sum_{i,j=1}^d\int_0^t h_{ij}(s,x_s)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s,$$

$$\int_0^t\sigma_j(s,x_s)\mathrm{d}B_s^j:=\sum_{j=1}^d\int_0^t\sigma_j(s,x_s)\mathrm{d}B_s^j.$$

定义 2.2 对 $\forall\xi\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}_0}^p([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$，若存在一对正常数 λ 和 C 满足

$$\hat{E}|X(t;t_0,\xi)|^p\le C\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},\quad t\ge t_0,$$

则称方程(2.1)的平凡解是 p-阶矩指数稳定的。特别地，当 $p=2$ 时，通常称方程(2.1)的平凡解是均方指数稳定的。

进一步给出一些符号标记。令 $C^{1,2}([t_0-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+)$ 是关于变量 X 二阶连续可导且关于变量 t 一阶

连续可导的全体非负函数$V(t,X)$的集合，即V_t,V_X,V_{XX}在$[t_0-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n$上是连续的，其中$V_t(t,X)=\dfrac{\partial V(t,X)}{\partial t}$，$V_X(t,X)=\left(\dfrac{\partial V(t,X)}{\partial X_1},\dfrac{\partial V(t,X)}{\partial X_2},\cdots,\dfrac{\partial V(t,X)}{\partial X_n}\right)$，$V_{XX}(t,X)=\left(\dfrac{\partial^2 V(t,X)}{\partial X_i\partial X_j}\right)_{n\times n}$对每一个$V\in C^{1,2}\left([t_0-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+\right)$，定义算子：

$$\begin{aligned}LV(t,X_t)=&V_t(t,X)+\langle V_X(t,X),f(t,X_t)\rangle\\&+G\left(\langle V_X(t,X),h(t,X_t)\rangle+\langle V_{XX}(t,X)\sigma(t,X_t),\sigma(t,X_t)\rangle\right),\end{aligned}$$

其中，$\langle V_X(t,X),h(t,X_t)\rangle+\langle V_{XX}(t,X)\sigma(t,X_t),\sigma(t,X_t)\rangle$是表达形式如下的对称矩阵:

$$\begin{aligned}&\langle V_X(t,X),h(t,X_t)\rangle+\langle V_{XX}(t,X)\sigma(t,X_t),\sigma(t,X_t)\rangle\\&:=\left[\langle V_X(t,X),h_{ij}(t,X_t)+h_{ji}(t,X_t)\rangle+\langle V_{XX}(t,X)\sigma_i(t,X_t),\sigma_j(t,X_t)\rangle\right]_{i,j=1}^d.\end{aligned}$$

3. 主要结果

定理若存在一个函数$V\in C^{1,2}\left([t_0-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+\right)$和正常数$C_1,C_2$和$\lambda$满足

(i) 对$\forall(t,X)\in[t_0-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n$，$C_1|X|^p\le V(t,X)\le C_2|X|^p$；

(ii) 对所有的$k\in N$和$X\in\mathcal{L}^p_{\mathcal{F}_t}\left([-\tau,+\infty];\mathbf{R}^n\right)$，

$$V\left(t_k,X+I_k(t_k,X)\right)\le d_kV\left(t_k^-,X\right),$$

其中，$\ln d_k\le-\lambda(t_{k+1}-t_k)$；

(iii) 对所有的$t\ge t_0$，$t\ne t_k,k\in\{1,2,\cdots\}$和$\varphi\in\mathcal{L}^p_{\mathcal{F}_0}\left([-\tau,0];\mathbf{R}^n\right)$，

$$\hat{E}LV(t,\varphi)\le(-\lambda+\lambda_1(t))\hat{E}V(t,\varphi(0)),$$

$$\hat{E}LV(t,\varphi)\le(-\lambda+\lambda_1(t))\hat{E}V(t,\varphi(0)),$$

当$\theta\in[-\tau,0]$，$\hat{E}V(t+\theta,\varphi)<q\hat{E}V(t,\varphi(0))$ (这里$q\ge\gamma e^{\lambda\tau}$)，$\gamma=\max_{k\in\{1,2,\cdots\}}\left\{\dfrac{1}{d_k}\right\}$，$\lambda_1(t):[t_0,\infty)\to R$，$\lambda_1(t)$在$[t_k,t_{k+1})$上是连续的，对所有的$k\in\{1,2,\cdots\}$，$\lim_{t\to t_k^-}\lambda_1(t)=\lambda(t_k^-)$，且$\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s<\infty$ (这里$\lambda_1^+(s)=\max\{\lambda_1(s),0\}$)，则方程(2.1)的平凡解是$p$-阶矩指数稳定的。

证 取正数且满足$0<C_2e^{\lambda(t_1-t_0)}\le M\le C_2\gamma e^{\lambda\tau}$。根据条件(i)可推出

$$\hat{E}V(t,X(t))\le C_2\hat{E}|X(t)|^p\le C_2\hat{E}\|\xi\|^p\le M\hat{E}\|\xi\|^p e^{-\lambda(t_1-t_0)},t\in[t_0-\tau,t_0).\tag{3.1}$$

接下来证明

$$\hat{E}V(t,X(t))\le M\hat{E}\|\xi\|^p e^{-\lambda(t_k-t_0)}e^{\int_{t_0}^t\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},t\in[t_k,t_{k+1}),k\in N.\tag{3.2}$$

成立。为了证明(3.2)成立，需先证明

$$\hat{E}V(t,X(t))\le M\hat{E}\|\xi\|^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}e^{\int_{t_0}^t\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},t\in[t_0,t_1),\tag{3.3}$$

成立。接下来利用反证法证明(3.3)成立。假设(3.3)不成立，则存在$t\in[t_0,t_1)$满足

$$\hat{E}V(t,X(t))>M\hat{E}\|\xi\|^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}e^{\int_{t_0}^t\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}.$$

令 $t_1^*=\inf\left\{t\in[t_0,t_1):\hat{E}V(t,X(t))>M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\right\}$。注意 $\hat{E}V(t,X(t))$ 在 $[t_0,t_1)$ 是连续的，故 $t_1^*\in[t_0,t_1)$ 且

$$EV\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)=M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \tag{3.4}$$

$$\hat{E}V(t,X(t))<M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},t\in\left[t_0-\tau,t_1^*\right). \tag{3.5}$$

而且存在一个序列 $\{t_n\}_{n\geq1}$ $(t_n\downarrow t_1^*)$使得

$$\hat{E}V(t_n,X(t_n))>M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_n}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},t_n\in\left[t_1^*,t_1\right), \tag{3.6}$$

和

$$\begin{aligned}\hat{E}V\left(t_1^*+\theta,X\left(t_1^*+\theta\right)\right)&\leq M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1^*+\theta}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\\&\leq M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\\&<q\hat{E}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

成立。根据条件(*iii*)可得

$$\hat{E}LV\left(t_1^*,X_{t_1^*}\right)\leq\left(-\lambda+\lambda_1\left(t_1^*\right)\right)\hat{E}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right) \tag{3.8}$$

因为在 $\left[t_1^*,t_1^*+h\right)$ 上，方程(2.1)的解 $X(t)$，函数 V,LV 是连续的，所以对任意小的数 $h>0$，有

$$\hat{E}LV(t,X_t)\leq(-\lambda+\lambda_1(t))\hat{E}V(t,X(t)),t\in\left[t_1^*,t_1^*+h\right). \tag{3.9}$$

利用 G-Itô 公式，计算出

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}V(t,X(t))\right)\\&=\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\lambda V(t,X(t))+V_t(t,X(t))+\left\langle V_X(t,X(t)),f(t,X_t)\right\rangle\right]\mathrm{d}t\\&\quad+\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left\langle V_X(t,X(t)),h_{ij}(t,X_t)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle V_{XX}(t,X(t))\sigma_i(t,X_t),\sigma_j(t,X_t)\right\rangle\right]\mathrm{d}\left\langle B^i,B^j\right\rangle_t\\&\quad+\mathrm{e}^{\lambda t}\left\langle V_X(t,X(t)),\sigma_j(t,X_t)\right\rangle\mathrm{d}B_t^j,\end{aligned}$$

进而，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda t}V(t,X(t))&=\mathrm{e}^{\lambda t_1^*}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)+\int_{t_1^*}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}\left(\lambda V(s,X(s))+LV(s,X_s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad+M_t^{t_1^*}+\int_{t_1^*}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}\left\langle V_X(s,X(s)),\sigma(s,X_s)\right\rangle\mathrm{d}B_s,\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，

$$\begin{aligned}M_t^{t_1^*}&=\int_s^t\left[\left\langle V_X(s,X(s)),h_{ij}(s,X_s)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle V_{XX}(s,X(s))\sigma_i(s,X_s),\sigma_j(s,X_s)\right\rangle\right]\mathrm{d}\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s\\&\quad-\int_s^t G\left(\left\langle V_X(s,X(s)),h(s,X_s)\right\rangle+\left\langle V_{XX}(s,X(s))\sigma(s,X_s),\sigma(s,X_s)\right\rangle\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由 Peng [13]可知$\left\{M_t^{t_1^*}\right\}_{t_1^*\geq t}$ 是一个 G-鞅，因此 $\hat{E}M_t^{t_1^*}\leq0$。对(3.10)式两边同时取期望并再次利用条件(*iii*)可得

$$\begin{aligned}\hat{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]&=\hat{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda t_1^*}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)\right]+\hat{E}\left[\int_{t_1^*}^{t}\mathrm{e}^{\lambda s}\left(\lambda V\left(s,X\left(s\right)\right)+LV\left(s,X_s\right)\right)\right]\mathrm{d}s\\&\le\hat{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda t_1^*}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)\right]+\int_{t_1^*}^{t}\lambda_1\left(s\right)\hat{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda s}V\left(s,X\left(s\right)\right)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.12}$$

运用 Gronwall 不等式，进一步得

$$\hat{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]\le\hat{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda t_1^*}V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)\right]\mathrm{e}^{\int_{t_1^*}^{t}\lambda_1(s)\mathrm{d}s},$$

即

$$\hat{E}\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]\le\mathrm{e}^{-\lambda\left(t-t_1^*\right)}\hat{E}\left[V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)\right]\mathrm{e}^{\int_{t_1^*}^{t}\lambda_1(s)\mathrm{d}s},\tag{3.13}$$

结合(3.4)可得

$$\begin{aligned}\hat{E}\left[V\left(t_1^*+h,X\left(t_1^*+h\right)\right)\right]&\le\mathrm{e}^{-\lambda h}\hat{E}\left[V\left(t_1^*,X\left(t_1^*\right)\right)\right]\mathrm{e}^{\int_{t_1^*}^{t}\lambda_1(s)\mathrm{d}s}\\&\le M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1+h-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\\&<M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\end{aligned}\tag{3.14}$$

这与(3.6)相矛盾，因此对 $k=1$，

$$\hat{E}\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]\le M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\ t\in\left[t_0,t_1\right)$$

成立。

利用数学归纳法，假设 $k=1,2,\cdots,m\left(m\in N\right)$，

$$E\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]\le ME\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_k-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\ t\in\left[t_{k-1},t_k\right)\tag{3.15}$$

成立。接下来继续证明

$$\hat{E}\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]\le M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\ t\in\left[t_m,t_{m+1}\right),\tag{3.16}$$

成立。利用反证法假设(3.16)不成立。令

$$t_2^*=\inf\left\{t\in\left[t_m,t_{m+1}\right):\hat{E}\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]>M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\right\}.$$

由条件(ii)和(3.15)，注意到当 $t=t_m$ 时，有

$$\begin{aligned}\hat{E}V\left(t_m,X\left(t_m\right)\right)&\le d_m\hat{E}V\left(t_m^-,X\left(t_m^-\right)\right)\le d_mM\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_m-t_0)}\\&\le\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_m)}M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_m-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_m}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\\&=M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_m}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}\end{aligned}\tag{3.17}$$

成立。因为 $\hat{E}V\left(t,X\left(t\right)\right)$ 在 $t\in\left[t_m,t_{m+1}\right)$ 上是连续的，所以可得 $t_2^*\in\left[t_m,t_{m+1}\right)$ 且

$$\hat{E}\left[V\left(t_2^*,X\left(t_2^*\right)\right)\right]=M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\tag{3.18}$$

$$\hat{E}\left[V\left(t,X\left(t\right)\right)\right]<M\hat{E}\|\xi\|^p\,\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s},\ t\in\left[t_m,t_{m+1}\right).\tag{3.19}$$

而且存在一个序列$\{t_n\}_{n\ge1}$ $(t_n \downarrow t_2^*)$满足

$$\hat{E}V(t_n,X)(t_n) > M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_n}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}, t_n \in \left[t_2^*, t_{m+1}\right). \tag{3.20}$$

对$-\tau \le \theta \le 0$，存在一个整数$j \in [0,k]\,(k \le m)$满足$t_2^*+\theta \in \left[t_j, t_{j+1}\right)$。从而

$$\begin{aligned}
\hat{E}V\left(t_2^*+\theta, X\left(t_2^*+\theta\right)\right) &\le M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda(t_{j+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*+\theta}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda\left(t_2^*+\theta-t_0\right)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda\left(t_{m+1}-t_0+t_2^*-t_{m+1}\right)}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\lambda\left(t_{m+1}-t_2^*\right)}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\lambda(t_{m+1}-t_m)}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le \gamma\mathrm{e}^{\lambda\tau}M\hat{E}\|\xi\|^p \mathrm{e}^{-\lambda(t_{m+1}-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_2^*}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \qquad (3.21)\\
&\le q\hat{E}V\left(t_2^*, X\left(t_2^*\right)\right).
\end{aligned}$$

因此，利用条件(iii)得

$$\hat{E}LV\left(t_2^*, X_{t_2^*}\right) \le \left(-\lambda+\lambda_1\left(t_2^*\right)\right)\hat{E}V\left(t_2^*, X\left(t_2^*\right)\right). \tag{3.22}$$

接着和前面证明(3.14)和(3.6)的矛盾方法一样，可得出与(3.20)的矛盾，综合说明了(3.16)是成立的。从而通过数学归纳法推出了对所有的$k \in N$，(3.2)式是成立的。进一步利用条件(i)得

$$\begin{aligned}
\hat{E}\left|X(t)\right|^p &\le \frac{M\hat{E}\|\xi\|^p}{C_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_k-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le \frac{M\hat{E}\|\xi\|^p}{C_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} \\
&\le \frac{M\hat{E}\|\xi\|^p}{C_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

事实上，因$\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s < \infty$，所以存在一个数$C > 0$使得$\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s} < C$成立，这蕴含了

$$\hat{E}\left|X(t)\right|^p \le \frac{CM\hat{E}\|\xi\|^p}{C_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t \ge t_0, \tag{3.23}$$

成立。即方程(2.1)的平凡解是p-阶矩指数稳定的。证毕。

4. 例子

考虑如下形式的 G-Brown 运动驱动的随机时滞微分方程：

$$\begin{cases}
\mathrm{d}X(t) = -3X(t)\mathrm{d}t + X(t)\mathrm{d}\langle B,B\rangle_t + \dfrac{|\sin t|}{\sqrt{1+t^2}}X\left(t-|\sin t|\right)\mathrm{d}B_t, t \ge t_0, t \ne t_k, \\
\Delta X(t) = \dfrac{1}{k^2}X\left(t_k, X(t_k)\right), t = t_k, k = 1,2,\cdots.
\end{cases}$$

取 $p=2$， $V(t,X(t))=|X(t)|^2$， $f(t,X(t))=-3|X(t)|^2$， $h(t,X(t))=X(t)$，
$\sigma(t,X(t-\tau(t)))=\frac{|\sin t|}{\sqrt{1+t^2}}X(t-|\sin t|)$。计算得

$$\begin{aligned}LV(t,X_t)&=V_t(t,X(t))+\langle V_X(t,X(t)),f(t,X(t))\rangle\\&\quad+G(\langle V_X(t,X(t)),h(t,X(t))+h(t,X(t))\rangle\\&\quad+\langle V_{XX}(t,X(t))\sigma(t,X(t-\tau(t))),\sigma(t,X(t-\tau(t)))\rangle)\\&=-6|X(t)|^2+G\left(4|X(t)|^2+2\frac{\sin^2 t}{1+t^2}X^2(t-|\sin t|)\right)\\&\le-6|X(t)|^2+2|X(t)|^2+\frac{\sin^2 t}{1+t^2}X^2(t-|\sin t|).\end{aligned}$$

取 $t_{k+1}-t_k=\frac{1}{2}$， $d_k=\mathrm{e}^{-2}$， $k=1,2,\cdots$， $\gamma=\mathrm{e}^3$， $q=\mathrm{e}^7$， $\tau(t)=|\sin t|$，进一步可得

$$\hat{E}LV(t,X_t)\le\left(-4+\mathrm{e}^7\frac{\sin^2 t}{1+t^2}\right)\hat{E}|X(t)|^2,$$

由此可令 $\lambda=4$， $\lambda_1(t)=\mathrm{e}^7\frac{\sin^2(t)}{1+t^2}$， $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda_1^+(s)\mathrm{d}s\le\mathrm{e}^7\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t_0\right)<\infty$， $q=\mathrm{e}^7\ge\gamma\mathrm{e}^{\lambda\tau(t)}$，
$\gamma=\mathrm{e}^3\ge\max\left\{\frac{1}{d_k}\right\}=\mathrm{e}^2, k=1,2,\cdots$， $\ln d_k\le-2(t_{k+1}-t_k)=-1$。

从而根据第三节中的定理可知方程(4.1)的平凡解是均方指数稳定的。

参考文献

[1] Lakshmikantham, V., Bainov, D. and Simeonov, P.S. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. Vol. 6, World Scientific, Singapore.

[2] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Application. Horwood Publication, Chichester.

[3] Xu, L. and Ge, S.S. (2015) The *p*th Moment Exponential Ultimate Boundedness of Impulsive Stochastic Differential Systems. *Applied Mathematics Letters*, **42**, 22-29. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.10.018

[4] Liu, B. (2008) Stability of Solutions for Stochastic Impulsive Systems via Comparison Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**, 2128-2133. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.930185

[5] Pan, L.and Cao, J. (2011) Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **382**, 672-685. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.084

[6] Diop, M.A., Ezzinbi, K. and Lo, M.(2014) Asymptotic Stability of Impulsive Stochastic Partial Integrodifferential Equations with Delays. *Stochastics*, **86**, 696-706. https://doi.org/10.1080/17442508.2013.879143

[7] Amina, B.S., Eke, K.S. and Okagbue, H. (2020) Advances on Asymptotic Stability of Impulsive Stochastic Evolution Equations. *International Journal of mathematics and Computer Science*, **16**, 99-109.

[8] Pei, C. and Deng, F. (2010) Global Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Systems. *Statistics and Probability Letters*, **80**, 1854-1862. https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.08.011

[9] Hu, W. and Zhu, Q. (2019) Stability Criteria for Impulsive Stochastic Functional Differential Systems with Distributed-delay Dependent Impulsive Effects. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*: *Systems*, **51**, 2027-2032. https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2905007

[10] Guo, Y., Zhu, Q. and Wang, F. (2020) Stability Analysis of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **82**, Article ID: 105013. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.105013

[11] Cao, W. and Zhu, Q. (2021) Razumikhin-Type Theorem for pth Exponential Stability of Impulsive Stochastic Functional Differential Equations Based on Vector Lyapunov Function. *Nonlinear Analysis-Hybrid Systems*, **39**, Article ID:

100983. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100983

[12] Peng, S. (2007) *G*-Expectation, *G*-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Itôtype. In: Benth, F.E., Di Nunno, G., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T., Eds., *Stochastic Analysis and Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[13] Peng, S. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty. ArXiv: 1002.4546.

[14] Li, G. and Yang, Q. (2018) Convergence and Asymptotical Stability of Numerical Solutions for Neutral Stochastic Delay Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Computational and Applied Mathematics*, **37**, 4301-4320. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0581-y

[15] Yao, S. and Zong, X. (2020) Delay-Dependent Stability of a Class of Stochastic Delay Systems Driven by G-Brownian Motion. *IET Control Theory and Applications*, **14**, 834-842. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2019.1146

[16] Yin, W., Cao, J. and Ren, Y. (2020) Quasi-Sure Exponential Stability and Stabilisation of Stochastic Delay Differential Equations under G-Expectation Framework. *International Journal of Control*, 1-12. https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1740794

[17] Zhu, Q. and Huang, T. (2020) Stability Analysis for a Class of Stochastic Delay Nonlinear Systems Driven by G-Brownian Motion. *Systems & Control Letters*, **140**, Article ID: 104699. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104699

[18] Ren, Y., Jia, X. and Hu, L. (2017) Exponential Stability of Solutions to Impulsive Stochastic Differential Equations Driven by *G*-Brownian Motion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **20**, 2157-2169. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2157

[19] Ren, Y., Jia, X. and Sakthivel, R. (2017) The *p*-th Moment Stability of Solutions to Impulsive Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Applicable Analysis*, **96**, 988-1003. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1169529

[20] Pan, L., Cao, J. and Ren, Y. (2020) Impulsive Stability of Stochastic Functional Differential Systems Driven by G-Brownian Motion. *Mathematics*, **8**, Article No. 227. https://doi.org/10.3390/math8020227