Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1257-1262
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116139

Hans汉斯

多元多项式因式分解

吕东旭

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 2962253509@qq.com

收稿日期：2021年5月17日；录用日期：2021年6月18日；发布日期：2021年6月25日

摘 要

因式分解是近代数学的一个基本研究对象，也是数学中的一种重要的恒等变形。在阅读文献基础上，本文梳理了部分文献中关于多元多项式因式分解研究成果，进行了初步分析，提出了尽可能多的一些因式分解方法。

关键词

因式分解，对称多项式

Multivariate Polynomial Factorization

Dongxu Lv

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 2962253509@qq.com

Received: May 17th, 2021; accepted: Jun. 18th, 2021; published: Jun. 25th, 2021

Abstract

Factorization is a basic research object of algebra; it is also a kind of important identity in mathematics. On the basis of deformation in the reading of the literature, this paper reviews the research results on multivariate polynomial factorization in literature, a preliminary analysis of some factors as much as possible the decomposition method.

Keywords

Factorization, Symmetric Polynomial

文章引用: 吕东旭. 多元多项式因式分解[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1257-1262.
DOI: 10.12677/pm.2021.116139

1. 引言

定理 1 [1] 设 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\phi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是某数域上的 n 元对称多项式，那么它们的差、和、积也属于对称多项式，在可以整除的条件下，它们商也属于对称多项式。

证明：设 $h(y_1,y_2,\cdots,y_n)=g(y_1,y_2,\cdots,y_n)+\phi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，在 h 中任意对调两个字母，根据对称多项式的定义，我们可得，g 和 ϕ 是都不变的，因此 h 也是不变，从而可知，h 也属于对称多项式。

我们用同样的证明方法可得如下推论。

推论 1 对称多项式的积也属于对称多项式。

推论 2 对称多项式的幂也属于对称多项式。

下面我们给出对于多元多项式一些因式分解的方法。

2. 求导积分法因式分解

对于多元多项式函数 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，对某个确定的 $y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，有 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_0^{y_j}G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j+G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 而多项式 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 中必不含 y_j 项，所以同上，只需多项式 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有公因式，就可将多项式函数 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 进行因式分解，从而实现多元多项式因式分解；

定理 3 (充分性)：多项式 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，对于某个确定的 $y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，若 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有相同公因式，则 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 必可因式分解，且至少有因式 $d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$。

为了证明定理必要性，先证如下引理。

引理 1. 设 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 n 元多项式，若存在某个 $y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 使 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有公因式，则 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_0^{y_j}G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有公因式。

证明：由 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 中必不含 y_j 项，可令 $\left(G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n),G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\right)=d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$，则存在多项式 $h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$h_2(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有

$$G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)=d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)h_2(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{y_j}G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j&=\int_0^{y_j}d(y_1,y_2,\dots,y_{j-1},0,y_{j+1},\dots,y_n)h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j\\&=d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\int_0^{y_j}h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j\end{aligned}$$

故 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_0^{y_j}G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有公因式。

定理 3 (必要性)：若 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有相同公因式，则 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可因式分解，且至少有因式 $d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$

证明：若 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有如下公因式 $d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$，得 $G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$ 有公因式 $d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$，又

$$\begin{aligned}G(y_1,y_2,\cdots,y_n)&=\int_0^{y_j}G'_{y_j}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j+G(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\\&=\int_0^{y_j}d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j\\&\quad+d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)h_2(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\\&=d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\left[\int_0^{y_j}h_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_j+h_2(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)\right]\end{aligned}$$

所以 $G(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可因式分解，因子为 $d(y_1,y_2,\cdots,y_{j-1},0,y_{j+1},\cdots,y_n)$，定理得证。

3. 带余除法分解多元多项式

定义 1 [2]. 若 $g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 与 $h(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$ 是 $G[y_1,y_2,\cdots,y_m]$ 中的任意两个多元多项式，则存在唯一的一对多项式 $q(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 与 $r(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$，使得

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_m)=(y_m-h(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1}))q(y_1,y_2,\cdots,y_m)+r(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$$

$r(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$ 与 $q(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 分别叫做 $y_m-h(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$ 除 $g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 的余式和商式。

定理 4 [3]. $g(y_1,y_2,\cdots y_{m-1},h(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1}))=0$ 的充要条件是 $g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 能被 $y_m-h(y_1,y_2,\cdots,y_{m-1})$ 整除

例 1 把多项式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 因式分解

解 令 $g(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc$

$$g(-b-c,b,c)=(-b-c)^3+b^3+c^3-3(-b-c)bc=0$$

由定理 3 得 $a+b+c$ 整除 $g(a,b,c)$，视 a 为未知量，运用一元多项式中的带余除法，以 $a+(b+c)$ 除 $a^3-(3bc)a+(b^3+c^3)$，有

$$\begin{aligned}a^3-(3bc)a+(b^3+c^3)&=(a+b+c)\left[a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\right]\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\end{aligned}$$

所以

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

多项式恒等定理：如果 $b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_n=c_0y^n+c_1y^{n-1}+\cdots+c_n$ 是一个恒等式，必有且只有 $b_0=c_0,b_1=c_1,\cdots,b_n=c_n$。

4. 待定系数法分解多元多项式

待定系数法所具有的一般特性：先根据题中所给出得条件给出一个含有系数的恒等式；由多项式恒等理论，比较恒等式左右两边各对应项的系数，列出相应的方程，求解对应系数的方法称为待定系数法。

定理 5 [4]. 若多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 能分解，求证：

$$4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0$$

证明 令

$$
\begin{aligned}
&ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\\
&=(lx+my+n)(l'x+m'y+n')\\
&=ll'x^2+(lm'+l'm)xy+mm'y^2+(ln'+l'n)x+(mn'+m'n)y+nn'
\end{aligned}
$$

由多项式恒等定理得

$$
\begin{cases}
ll'=a & (1)\\
lm'+l'm=b & (2)\\
mm'=c & (3)\\
ln'+l'n=d & (4)\\
mn'+m'n=e & (5)\\
nn'=f & (6)
\end{cases}
$$

由(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)消去 l,m,n 和 l',m',n'，可得已知多项式各系数之间的关系式，即为多项式能够分解为两个一次因式的条件。

由(2)，(4)，(5)得

$$
\begin{aligned}
bde&=2ll'mm'nn'+ll'\left(m^2n'^2+m'^2n^2\right)+mm'\left(l^2n'^2+l'^2n^2\right)+nn'\left(l^2m'^2+l'^2m^2\right)\\
&=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(ln'+l'n)^2+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn' \qquad (7)
\end{aligned}
$$

再把(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)代入(7)，得

$$bde=ae^2+cd^2+fb^2-4acf$$

即 $4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0$

例 2 根据定理 5 结论判断 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$ 能否将其分解因式，若能，请将其分解；若不能，请说明原因。

解由定理 5 结论得

$$
\begin{aligned}
&4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2\\
&=4\times4\times(-3)(-3)+(-4)\times(-4)\times10-4\times10^2-(-3)\times(-4)^2-(-3)\times(-4)^2\\
&=144+160-400+48+48\\
&=0
\end{aligned}
$$

故 $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$ 可因式分解。

设

$$
\begin{aligned}
&4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3\\
&=(2x-3y+m)(2x+y+n)\\
&=4x^2-4xy-3y^2+2(m+n)x+(m-3n)y+mn
\end{aligned}
$$

由多项式恒等定理得

$$
\begin{cases}
2m+2n=-4 & (1)\\
m-3n=10 & (2)\\
mn=-3 & (3)
\end{cases}
$$

由(1)和(2)得 $m=1,\ n=-3$。而 m,n 的值适合(3)。

故

$$\begin{aligned}&4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3\\&=(2x-3y+1)(2x+y-3)\end{aligned}$$

5. 代 0 消元发分解多元多项式

对于二元多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，可视此二元多项式为一个二元函数，即

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f，$$

假设它能够分解为 $(a_0x+b_0y+c_0)(a_0'x+b_0'y+c_0')$，则当 x,y 任意取值时，分解后的因式与原式相等。所以当令 $x=0$ 或 $(y=0)$ 时，二元函数 $f(x,y)$ 即可转化为一元函数 $f(y)$ 或 $f(x)$，从而二元多项式可以转化为一元多项式。同理，多元多项式也可以转化为一元多项式，故多元多项式因式分解的问题可转化为一元多项式因式分解问题。

例 3 把 $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$ 因式分解。

解 令 $f(x,y)=x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

假设 $f(x,y)=(x+b_0y+c_0)(x+b_0'y+c_0')$

令 $x=0$，则上式变为 $2y^2+5y+3=(b_0y+c_0)(b_0'y+c_0')$

根据多项式恒等定理可得。

$$b_0=2,b_0'=1,c_0=3,c_0'=1$$

故原多项式因式分解为

$$x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3=(x+2y+3)(x+y+1)$$

6. 求根法分解多元多项式

在此方法的运用过程中，我们通常先把其中任意一个量视为未知量，其余量通通视为常量，构造出一个一元二次方程来，求此一元二次方程的判别式，当判别式等于零，则此多项式可在有理数域内分解；当判别式大于零，若它是完全平方数，则可在有理数域内分解，否则不能在有理数域分解，但在实数域可分解；当判别式小于零，在实数域不能分解，但在复数域可分解。然后根据公式法求出一元二次方程的根，根据因式定理，找出此因式，从而完成分解。

例 4 把 $2x^2-7xy+3y^2-5yz+5zx+2z^2$ 因式分解。

解 将 x 视为未知量，构造出一元二次方程 $2x^2+(5z-7y)x+(3y^2-5yz+2z^2)=0$

由公式法求得

$$x=\frac{-(5z-7y)\pm\sqrt{(5z-7y)^2-8(3y^2-5yz+2z^2)}}{2\times 2}=\frac{7y-5z\pm(5y-3z)}{4}$$

$$x_1=\frac{7y-5z+5y-3z}{4}=3y-2z，\quad x_2=\frac{7y-5z-5y+3z}{4}=\frac{y-z}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}2x^2-7xy+3y^2-5yz+5zx+2z^2&=2(x-3y+2z)\left(x-\frac{y-z}{2}\right)\\&=(x-3y+2z)(2x-y+z)\end{aligned}。$$

参考文献

[1] 牛继武, 张羽, 张寅. 因式分解及其应用[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1988.
[2] 严以诚, 孟广烈. 因式分解[M]. 北京: 北京出版社, 1982.
[3] 吕凤, 董笑咏, 梁世安. 高等数学在中学数学中的应用 1000 例[M]. 吉林: 东北师范大学出版社, 1994: 160-169.
[4] 巴景珂. 一种特殊的因式分解方法——数字代入法[J]. 中学数学教学, 1987(8): 17-21.