Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1271-1275
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117141

Hans汉斯

完全$0-$单半群的L-模糊同余

郑苗苗

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州
Email: 1471917937@qq.com

收稿日期：2021年5月24日；录用日期：2021年6月24日；发布日期：2021年7月2日

摘　要

完全$0-$单半群S上的L-模糊相容的L-模糊等价关系称为完全$0-$单半群S上的L-模糊同余。除了L-模糊同余在普通半群上的性质之外，不同半群上的L-模糊同余有不同的性质。本文主要研究完全$0-$单半群上L-模糊同余。

关键词

L-模糊关系，L-模糊等价关系，L-模糊同余，完全$0-$单半群

Generalized Fuzzy Congruences on Completely $0-$Simple Semigroups

Miaomiao Zheng

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 1471917937@qq.com

Received: May 24th, 2021; accepted: Jun. 24th, 2021; published: Jul. 2nd, 2021

文章引用：郑苗苗. 完全0−单半群的L-模糊同余[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1271-1275.
DOI: 10.12677/pm.2021.117141

Abstract

L-fuzzy equivalence relation with L-fuzzy compatibility over a completely $0-$simple semigroup S is called L-fuzzy congruence over a completely $0-$simple semigroup S. In addition to the properties of generalized fuzzy congruences on semigroups, generalized fuzzy congruences have different properties on different semigroups. In this paper, we mainly study generalized fuzzy congruences on completely $0-$simple semigroups.

Keywords

L-Fuzzy Relation, L-Fuzzy Equivalence, L-Fuzzy Congruences, Completely $0-$Simple Semigroups

1. 引言

模糊数学是数学研究中的一个重要组成部分, 它的应用性也比较强. “模糊”的概念最初是由罗特夫扎德1965年在文献[1]中提出来的. 它表示一种不确定性. 这个概念最初被引入是作为一种描述人类话语和思想中的精确性和模糊性的方法. 比如描述身高时规定超过190 cm描述为高, 那么身高189 cm就不算高了吗? 他们只是高的程度不同, 于是有了“模糊”的概念. 近年来, 关于模糊同余的研究成果已经比较丰富. 之前我们已经提出了L-模糊子集、L-模糊理想、L-模糊等价关系、L-模糊同余等的定义, 同时也给出了他们的部分基本的性质. 而除了已经给出的性质之外，不同半群上的L-模糊等价关系也有不同的性质. 因此我们开始考虑特殊半群上的模糊关系的性质，对于L-模糊关系是否成立.

在本文中, 我们主要研究完全$0-$单半群上的L-模糊同余.

2. 预备知识

设$S=\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$是完全0−单半群, e是G的单位元. 定义I上的等价关系ε_I

$$(i,j)\in\varepsilon_I,\quad \{\lambda\in\Lambda:p_{\lambda i}=0\}=\{\lambda\in\Lambda:p_{\lambda j}=0\}$$

定义Λ上的等价关系ε_Λ

$$(\lambda,\mu)\in\varepsilon_\Lambda,\quad \{i\in I:p_{\lambda i=0}\}=\{i\in I:p_{\mu i=0}\}\ [2]$$

设S是半群, L是有最小元0和最大元1的格. 称映射$\mu:X\times X\to L$为X上的L-模糊关系. 设μ是半群S上的L-模糊关系, $x,y\in S$. 若$\mu(x,x)=1$, 则称μ是L-模糊自反的; 若$\mu(x,y)=\mu(y,x)$, 则称μ是L-模糊对称的; 若$\mu\circ\mu\le\mu$, 则称μ是L-模糊传递的. 如果L-模糊关系μ是L-模糊自反的、L-模糊对称的、L-模糊传递的, 那么称μ是L-模糊等价关系. 如果对任意的$a,b,x\in S$, 满足: $\mu(ax,bx)\ge\mu(a,b)$, 那么称半群S上的L-模糊关系μ在S上关于乘法是L-模糊右相容的. 若S 上的L-模糊关系μ在S上关于乘法既是L- 模糊左相容的又是L-模糊右相容的, 则称μ是L-模糊相容的. L-模糊相容的L-模糊等价关系称为L-模糊同余.

3. 基本概念

定义 3.1 设$S=\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$, θ是S上的L-模糊同余, 如果

$$\theta(0,0)=1$$
$$\theta(0,(i,a,\lambda))=\theta((i,a,\lambda),0)=0$$
$$\theta((i,a,\lambda),(j,b,\mu))=0,\ (i,j)\notin\varepsilon_I\text{或者}(\lambda,\mu)\notin\varepsilon_\Lambda$$

那么称θ是L-模糊真同余.

如果θ是$S=\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$的$L$-模糊真同余, 我们可以定义$I$上的$L$-模糊关系$\theta_I$如下

$$\theta_I(i,j)=\begin{cases}\wedge_{p_{\lambda i}\neq0}\,\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda)), & (i,j)\in\varepsilon_I\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同样地, 我们也可以定义Λ上的L-模糊关系θ_Λ如下

$$\theta_\Lambda(i,j)=\begin{cases}\wedge_{p_{\lambda i}\neq0}\,\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(i,p_{\mu i}^{-1},\mu)), & (\lambda,\mu)\in\varepsilon_\Lambda\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

我们选择$S=\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$的任意一个群$\mathscr{H}$类$G$, 不妨令$G=H_{11}$. 令

$$N_\theta:G\longrightarrow L\quad a\longmapsto\theta((1,a,1),(1,e,1))$$

其中e是G的单位元, L是有最小元0和最大元1的格.

4. 基本结论

定理 4.1 设θ_I是I上的L-模糊等价关系.

证明: 设任意的$i,j\in I$. 都有$\theta_I(i,i)=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda))=1$, 故$\theta_I$是$L$-模糊自反的. 若$(i,j)\notin\varepsilon_I$ 则$\theta_I(i,j)=\theta_I(j,i)=0$; 若$(i,j)\in\varepsilon_I$则$\theta_I(i,j)=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda))$, 又因为$\theta$ 是L- 模糊同余, 所以$\theta_I(i,j)=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda),(i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda))$, 即$\theta_I(i,j)=\theta_I(j,i)$, 故θ_I是L-模糊对称的.下证θ_I是L-模糊传递的.

若$(i,j)\notin\varepsilon_I$则$\theta_I\circ\theta_I(i,j)=0=\theta_I(i,j)$

若$(i,j)\in\varepsilon_I$则$\theta_I\circ\theta_I(i,j)=\vee_{k\in I}(\theta_I(i,k)\wedge\theta_I(k,j))=\vee_{\{k|(i,k)\in\varepsilon_I\}}(\theta_I(i,k)\wedge\theta_I(k,j))$ 且

$$\begin{aligned}
\theta_I(i,k)\wedge\theta_I(k,j)&=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(k,p_{\lambda k}^{-1},\lambda))\wedge(\wedge_{p_{\lambda k}\neq 0}\theta((k,p_{\lambda k}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda)))\\
&=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(k,p_{\lambda k}^{-1},\lambda))\wedge\theta((k,p_{\lambda k}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda))\\
&\leq\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\vee_s\in S\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),s)\wedge\theta(s,(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda))\\
&=\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta\circ\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda))\\
&\leq\wedge_{p_{\lambda i}\neq 0}\theta((i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda),(j,p_{\lambda j}^{-1},\lambda))\\
&=\theta_I(i,j)
\end{aligned}$$

故θ_I是L-模糊传递的, 所以θ_I是I上的L-模糊等价关系.

类似地, 我们也可以证明下面的定理

定理 4.2 设θ_Λ是Λ上的L-模糊等价关系.

定理 4.3 设N_θ是G上的L-模糊正规子群.

证明: 设$\forall a,b,g\in G$, 则$N_\theta(e)=\theta((1,e,1),(1,e,1))=1$

$$\begin{aligned}
N_\theta(ab)&=\theta((1,ab,1),(1,e,1))\\
&=\theta((1,a,1)(1,p_{11}^{-1},1)(1,b,1),(1,e,1)(1,p_{11}^{-1},1)(1,e,1))\\
&\geq\theta((1,a,1)(1,p_{11}^{-1},1),(1,e,1)(1,p_{11}^{-1},1))\wedge\theta((1,b,1),(1,e,1))\\
&\geq\theta((1,a,1),(1,e,1))\wedge\theta((1,b,1),(1,e,1))\\
&=N_\theta(a)\wedge N_\theta(b)
\end{aligned}$$

又因为$\theta((1,a,1)(1,p_{11}^{-1},1)(1,b,1),(1,e,1)(1,p_{11}^{-1},1)(1,e,1))$与$\theta((1,a,1)(1,p_{11}^{-1},1),(1,e,1)(1,p_{11}^{-1},1))\wedge$

$\theta((1,b,1),(1,e,1))$. 所以$N_\theta(ab) \geq N_\theta(a) \wedge N_\theta(b)$.且

$$\begin{aligned} N_\theta(a^{-1}) &= \theta((1,a^{-1},1),(1,e,1)) \\ &= \theta((1,e,1)(1,p_{11}^{-1}a^{-1},1),(1,a,1)(1,p_{11}^{-1}a^{-1},1)) \\ &\geq \theta((1,e,1),(1,a,1)) \\ &= \theta((1,a,1),(1,e,1)) \\ &= N_\theta(a) \end{aligned}$$

又因为θ是S上的L-模糊同余, 所以$N_\theta(a^{-1}) \geq N_\theta(a)$. 故$N_\theta$是$G$的$L$-模糊子群. 而且

$$\begin{aligned} N_\theta(g^{-1}ag) &= \theta((1,g^{-1}ag,1),(1,e,1)) \\ &= \theta((1,g^{-1}p_{11}^{-1},1)(1,a,1)(1,p_{11}^{-1}g,1),(1,g^{-1}p_{11}^{-1},1)(1,e,1)(1,p_{11}^{-1}g,1)) \\ &\geq \theta((1,a,1),(1,e,1)) \\ &= N_\theta(a) \end{aligned}$$

由a,g的任意性可知, $N_\theta((g^{-1})^{-1}g^{-1}agg^{-1}) \geq N_\theta(g^{-1}ag)$, 即$N_\theta(g^{-1}ag) \leq N_\theta(a)$, 所以$N_\theta(g^{-1}ag) = N_\theta(a)$. 故N_θ 是G 的L-模糊正规子群. 证毕.

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Inform and Control*, **18**, 338-365. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] 王喜建. 完全零单半群的模糊同余[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(2): 65-71.