Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1299-1308
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117145

亚纯函数线性差分多项式的值分布

吴励敏[1]，邓炳茂[2]，杨德贵[1*]

[1]华南农业大学，应用数学研究所，广东 广州
[2]广东金融学院，金融数学与统计学院，广东 广州
Email: wuli.min@foxmail.com, dbmao2012@163.com, *dyang@scau.edu.cn

收稿日期：2021年5月26日；录用日期：2021年6月28日；发布日期：2021年7月6日

摘 要

本文利用了亚纯函数的Nevanlinna理论的差分模拟，研究了亚纯函数的线性差分多项式的值分布，得到了具有最大亏量和的亚纯函数与其线性差分多项式的特征函数之间的关系，得到的结果推广了现有的相关结果。

关键词

亏量，差分多项式，值分布

Value Distribution of Linear Difference Polynomial of Meromorphic Function

Limin Wu[1], Bingmao Deng[2], Degui Yang[1*]

[1]Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
[2]School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: wuli.min@foxmail.com, dbmao2012@163.com, *dyang@scau.edu.cn

Received: May 26th, 2021; accepted: Jun. 28th, 2021; published: Jul. 6th, 2021

Abstract

The paper uses the difference counterpart of the Nevanlinna theory of meromorphic functions to study the value distribution of the linear difference polynomial of the meromorphic function, and obtains the difference between the characteristic function of the meromorphic function with the largest deficit sum and the characteristic function of the linear difference polynomial relationship. The results obtained generalize the existing related results.

*通讯作者。

文章引用: 吴励敏, 邓炳茂, 杨德贵. 亚纯函数线性差分多项式的值分布[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1299-1308.
DOI: 10.12677/pm.2021.117145

Keywords

Deficiency, Difference Polynomial, Value Distribution

1. 引言及主要结果

本文采用 Nevanlinna 理论中的基本符号[1] [2]，例如 $m(r,f)$，$N(r,f)$，$\overline{N}(r,f)$，$T(r,f)$ 等，设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数的亚纯函数，它的级与下级分别定义为：

$$\rho(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}T(r,f)}{\log r}$$

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^{+}T(r,f)}{\log r}$$

若 $\rho(f)=\mu(f)$，则称 $f(z)$ 为正规增长的亚纯函数。

设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数的亚纯函数，用 $\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数，对任意的复数 $a\in\mathbb{C}$，则有

$$\lambda(a,f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log r}$$

设 $f(z)$ 为复平面上的超越亚纯函数，若 a 为任一复数，定义 a 为 $f(z)$ 的亏量为

$$\delta(a,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}$$

容易看出 $0\le\delta(a,f)\le1$。若 $\delta(a,f)>0$，则 a 为 $f(z)$ 的亏值。并且 $f(z)$ 的亏值至多是可数的，由 Nevanlinna 第二基本定理知，对于定义在复平面上的亚纯函数，其亏量总和不超过 2，$\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)\le2$。当亚纯函数的亏量和等于 2 时，则称为具有最大亏量和的亚纯函数。

当 $a=\infty$ 时，上述记号中的 $m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 和 $N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 分别为 $m(r,f)$，$N(r,f)$。

对于一个亚纯函数 $f(z)$，用 $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ 的量，可能去除 r 的一个对数测度为有限的一个集合，且它每次出现时不一定相同。

在早期已有文章研究了具有最大亏量和的亚纯函数及其导函数的特征函数的关系的差分模拟，1967 年，Edrei 和 Weitsman [3] [4]证明了如下结果：

定理 A 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，若 $\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=\eta\ge1$ 且 $\delta(\infty,f)=2-\eta$，则

$$T(r,f')\sim\eta T(r,f),\ r\to\infty.$$

1989 年，杨连中[5]推广了上述结论，证明了

定理 B 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，若 $\sum\limits_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=1$ 且 $\delta(\infty,f)=1$，则

$$T\left(r,f^{(k)}\right)\sim T(r,f),\ r\to\infty,$$

其中 k 为任意正整数。

2016 年，王品玲、刘丹、方明亮[6]对定理 B 从导数做到了差分模拟，证明了如下定理。

定理 C 设 c 是一个非零有限复数，n 是一个正整数，$f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，若 $\sum\limits_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=1$ 且 $\delta(\infty,f)=1$，若 $\Delta_c^n f(z)\not\equiv 0$，则有

1) $T\left(r,\Delta_c^n f(z)\right)\sim T(r,f),\ r\to+\infty$，

2) $\delta\left(0,\Delta_c^n f(z)\right)=\delta\left(\infty,\Delta_c^n f(z)\right)=1$。

其中，$\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z),\ \Delta_c^2 f(z)=\Delta_c\left(\Delta_c f(z)\right),\cdots,\ \Delta_c^n f(z)=\Delta_c\left(\Delta_c^{n-1}f(z)\right)$。

2021 年，陈湘、吴昭君[7]把定理 C 推广到一般的线性差分多项式，证明了如下结果：

定理 D 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，c 是一个非零有穷复数，定义 $f(z)$ 的线性差分多项式为：

$$P(z,f)=a_n f(z+nc)+a_{n-1}f(z+(n-1)c)+\cdots+a_1 f(z+c)+a_0 f(z)(\not\equiv 0),\tag{1.1}$$

其中 $a_i\ (0\le i\le n)$ 是不全为零的复数且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$。若 $\sum\limits_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=1$ 且 $\delta(\infty,f)=1$，则有

1) $T\left(r,P(z,f)\right)\sim T(r,f),\ r\to\infty$，

2) $\delta\left(0,P(z,f)\right)=\delta\left(\infty,P(z,f)\right)=1$。

当 $n=1,\ a_1=1,\ a_0=-1$ 时，$P(z,f)=\Delta_c f(z)$；当 $n\ge 1,\ a_i=C_n^i(-1)^{n-i},\ 0\le i\le n$ 时，可以得到 $P(z,f)=\Delta_c^n f(z)$。因此定理 D 推广了定理 C。

定理 E 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，$P(z,f)$ 如定理 D 中定义，若 $\delta(\infty,f)=1$，则

$$\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)\le\delta\left(0,P(z,f)\right).$$

定理 F 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数，$P(z,f)$ 如(1.1)式所定义，若

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N(r,f)=S(r,f),$$

其中 a 是一个有穷复数，则 $P(z,f)$ 取每个非零有穷复数 b 无穷多次，且 $\lambda\left(b,P(z,f)\right)=\rho(f)$。

本文根据定理 D 得到的结果，把定理 D 中的有穷复数推广到小函数，得到更广泛的线性差分多项式，得到的结果推广了定理 D，同时也相应地推广了定理 E 和定理 F，证明了如下定理。为了叙述方便，文章中提及到的取极限问题，都默认为根据实际情况去掉了一个对数测度为有限的例外集。

定理 1 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，$c_i\ (1\le i\le n)$ 是互不相同的非零有穷复数，定义 $f(z)$ 的线性差分多项式为：

$$Q(z,f)=b_n(z)f(z+c_n)+b_{n-1}(z)f(z+c_{n-1})+\cdots+b_1(z)f(z+c_1)+b_0(z)f(z)(\not\equiv 0),\tag{1.2}$$

其中 $b_i(z)(0\le i\le n)$ 是 f 不恒为零的小函数并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(z)=0$，若 $\sum\limits_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=1$ 且 $\delta(\infty,f)=1$，则有

1) $T\left(r,Q(z,f)\right)\sim T(r,f),\ r\to\infty$，

2) $\delta\left(0,Q(z,f)\right)=\delta\left(\infty,Q(z,f)\right)=1$。

定理 2 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数，$Q(z,f)$ 如定理 1 中定义，$\delta(\infty,f)=1$，则

$$\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)\le\delta\left(0,Q(z,f)\right).$$

定理 3 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数，$Q(z,f)$ 如(1.2)式所定义，若

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N(r,f)=S(r,f),$$

其中 a 是一个有穷复数，则 $Q(z,f)$ 取每个非零有穷复数 ω 无穷多次，且 $\lambda\left(\omega,Q(z,f)\right)=\rho(f)$。

2. 主要引理

引理 1 [8] 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的有穷级超越亚纯函数满足 $\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=1$ 且 $\delta(\infty,f)=1$，则 $f(z)$ 的亏值个数不超过 $\rho(f)+1$。

引理 2 [9] [10] 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数，c 是一个非零有穷复数，则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=S(r,f),$$

其中 $S(r,f)=o\left(T(r,f)\right),\ r\notin \mathrm{E}$，$\mathrm{E}$ 具有有穷对数测度，即 $\int_E \mathrm{d}r/r<\infty$。

引理 3 [1] [6] 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数，c 是一个非零有穷复数，则

$$T\left(r,f(z+c)\right)=T(r,f)+S(r,f),$$

$$N\left(r,f(z+c)\right)=N(r,f)+S(r,f).$$

由引理 2 和结合 $Q(z,f)$ 的定义，可得如下引理。

引理 4 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数，c 是一个非零有穷复数，$Q(z,f)$ 如定理 1 中定义，则

$$m\left(r,\frac{\Delta_c Q(z,f)}{f(z)}\right)=S(r,f).$$

引理 5 [11] 设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数，满足 $\sum_{a\notin\infty}\delta(a,f)=1$，$\delta(\infty,f)=1$，则 $f(z)$ 为正规增长的且级为正整数。

3. 定理的证明

定理 1 的证明 先证明结论(1)，即证明

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T\left(r,Q(z,f)\right)}{T(r,f)}=1. \tag{3.1}$$

由引理 1 知 $f(z)$ 有有限个有穷亏值，设为 $a_1,a_2\cdots,a_l$，由引理 2 得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l} m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right) &\le m\left(r,\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{f-a_i}\right)+S(r,f)\\
&= m\left(r,\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{Q(z,f)}{f-a_i}\right)\cdot\frac{1}{Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
&= m\left(r,\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{Q(z,f-a_i)}{f-a_i}\right)\cdot\frac{1}{Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
&= m\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
&= T(r,Q(z,f))-N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
&\le T(r,Q(z,f))+S(r,f).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

由引理 2 和引理 3 可得：

$$
\begin{aligned}
T(r,Q(z,f)) &= m(r,Q(z,f))+N(r,Q(z,f))10\\
&= m\left(r,\frac{f\cdot Q(z,f)}{f}\right)+N(r,Q(z,f))\\
&\le m\left(r,\frac{Q(z,f)}{f}\right)+m(r,f)+(n+1)N(r,f)+S(r,f)\\
&\le T(r,f)+nN(r,f)+S(r,f).
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

由(3.2)得：

$$
\sum_{i=1}^{l}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}\le\frac{T(r,Q(z,f))}{T(r,f)}+\frac{S(r,f)}{T(r,f)}.
$$

因为$\delta(\infty,f)=1$，即

$$
\delta(\infty,f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{T(r,f)}=1,\ \text{得到}\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{T(r,f)}=0 \tag{3.4}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
1=\sum_{i=1}^{l}\delta(a_i,f) &= \sum_{i=1}^{l}\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}\\
&\le \liminf_{r\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}\\
&= \liminf_{r\to\infty}\left(\frac{T(r,Q(z,f))}{T(r,f)}+\frac{S(r,f)}{T(r,f)}\right)\\
&\le \liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,Q(z,f))}{T(r,f)}+\limsup_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{T(r,f)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{r\to\infty} \frac{T\left(r,Q\left(z,f\right)\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&\le \limsup_{r\to\infty} \frac{T\left(r,Q\left(z,f\right)\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&\le \limsup_{r\to\infty} \frac{T\left(r,f\right)+nN\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&\le 1+\limsup_{r\to\infty} \frac{nN\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)}+\limsup_{r\to\infty} \frac{S\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)}=1.
\end{aligned}
$$

所以得到：$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{T\left(r,Q\left(z,f\right)\right)}{T\left(r,f\right)}=1$，结论(1)得证。

下面证结论(2)。

由(3.2)的推导过程中有

$$
\sum_{i=1}^{l} \frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T\left(r,f\right)} \le \frac{m\left(r,\frac{1}{Q\left(z,f\right)}\right)}{T\left(r,f\right)}+\frac{S\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)}, \tag{3.5}
$$

由(3.1)和(3.5)得：

$$
\begin{aligned}
1&=\sum_{i=1}^{l}\delta\left(a_i,f\right)=\sum_{i=1}^{l}\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&\le \liminf_{r\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&\le \liminf_{r\to\infty}\left(\frac{m\left(r,\frac{1}{Q\left(z,f\right)}\right)}{T\left(r,f\right)}+S\left(r,f\right)\right) \\
&\le \liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{Q\left(z,f\right)}\right)}{T\left(r,Q\left(z,f\right)\right)}\cdot\limsup_{r\to\infty}\frac{T\left(r,Q\left(z,f\right)\right)}{T\left(r,f\right)}+\limsup_{r\to\infty}\frac{S\left(r,f\right)}{T\left(r,f\right)} \\
&=\delta\left(0,Q\left(z,f\right)\right).
\end{aligned}
$$

即 $\delta\left(0,Q\left(z,f\right)\right)=1$。

由 $\delta\left(\infty,f\right)=1$ 和 $N\left(r,Q\left(z,f\right)\right)\le\left(n+1\right)N\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)$ 以及(3.1)式，得到：

$$\begin{aligned}\delta\left(\infty,Q(z,f)\right)&=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,Q(z,f)\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\\&\geq 1-\left\{\limsup_{r\to\infty}\frac{(n+1)N(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\limsup_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\right\}\\&\geq 1-\limsup_{r\to\infty}\frac{(n+1)N(r,f)}{T(r,f)}\cdot\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}=1.\end{aligned}$$

即 $\delta\left(\infty,Q(z,f)\right)=1$，证毕。

定理 2 的证明

如果 $\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)=0$，定理 2 显然成立。下面证当 $\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)>0$ 的情况。

由(3.3)和(3.4)得

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty}\frac{T\left(r,Q(z,f)\right)}{T(r,f)}&\leq\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)+nN(r,f)+S(r,f)}{T(r,f)}\\&\leq 1.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由(3.6)知

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{\dfrac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}}=\frac{1}{\liminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}}\leq 1,$$

所以得

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\geq 1.\tag{3.7}$$

由(3.2)的推导过程中得到

$$\sum_{i=1}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)\leq T\left(r,Q(z,f)\right)+S(r,f),$$

从而

$$\frac{\sum_{i=1}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\leq 1+\frac{S(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}-\frac{o\left(T(r,f)\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\leq 1,$$

因此得到

$$\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\left(\frac{\sum_{i=i}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}-o(1)\right)\leq 1,\ r\to\infty.$$

由上式结合(3.7)式可得

$$1 \ge \limsup_{r\to\infty}\left\{\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\left(\frac{\sum_{i=i}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}-o(1)\right)\right\}$$

$$\ge \limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\left(\frac{\sum_{i=i}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}-o(1)\right)$$

$$\ge \limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}\cdot\liminf_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=i}^{l}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)}{T(r,f)}$$

$$\ge \limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)}\right)}{T\left(r,Q(z,f)\right)}+\sum_{i=1}^{l}\delta(a_i,f).$$

因为l是任意的，结合(3.4)式，因此$\sum_{a\in\mathbb{C}}\delta(a,f)\le\delta\left(0,Q(z,f)\right)$。

定理 3 的证明 对任意非零复数ω，由题设可知$\sum_{i=1}^{n}b_i(z)=0$，即

$$Q(z,f-a)=Q(z,f).$$

又因为

$$\frac{1}{f-a}=\frac{Q(z,f)}{\omega(f-a)}-\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\cdot\frac{\Delta_cQ(z,f)}{\omega(f-a)},$$

所以

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=m\left(r,\frac{Q(z,f-a)}{\omega(f-a)}\right)+m\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\right)+m\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f-a)}{\omega(f-a)}\right)+O(1).$$

由引理 4 得

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\le m\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\right)+S(r,f). \tag{3.8}$$

由引理 3 和引理 4 以及 Nevanlinna 第一基本定理可得

$$\begin{aligned}&m\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\right)\\&=T\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)-N\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\right)+O(1)\\&=m\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)-N\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_cQ(z,f)}\right)+O(1)\\&\le m\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\frac{\Delta_cQ(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)+O(1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le m\left(r,\frac{\Delta_c Q(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\Delta_c Q(z,f)\right)+O(1)\\
&\le m\left(r,\frac{\Delta_c Q(z,f)}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,Q(z+c,f)\right)+N\left(r,Q(z,f)\right)+O(1) \quad (3.9)\\
&\le m\left(r,\frac{\Delta_c Q(z,f-\omega)}{Q(z,f)-\omega}\right)+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+2(n+1)N(r,f)+O(1).
\end{aligned}
$$

又因为由(3.6)得

$$
m\left(r,\frac{\Delta_c Q(z,f-\omega)}{Q(z,f)-\omega}\right)=S\left(r,Q(z,f)-\omega\right)=S(r,f). \tag{3.10}
$$

由(3.8)~(3.10)式和 Nevanlinna 第一基本定理得

$$
\begin{aligned}
T(r,f-a)-N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)&\le m\left(r,\frac{Q(z,f)-\omega}{\Delta_c Q(z,f)}\right)+S(r,f)\\
&\le N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+2(n+1)N(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}
$$

由上式和题设条件可得

$$
\begin{aligned}
T(r,f)&\le N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+2(n+1)N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+S(r,f)\\
&\le N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)+S(r,f).
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

由此可知 $Q(z,f)$ 可以取每个非零复数 ω 无穷多次。

另一方面，

$$
N\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)\le T\left(r,\frac{1}{Q(z,f)-\omega}\right)=T\left(r,Q(z,f)\right)+S(r,f)=(n+1)T(r,f)+S(r,f). \tag{3.12}
$$

由引理 5 知 $f(z)$ 是正规增长的，由(3.11)和(3.12)以及零点收敛指数和级的定义得 $\lambda\left(\omega,Q(z,f)\right)=\rho(f)$。

基金项目

国家自然科学基金青年项目(11901119)；中英合作项目(H2018177)。

参考文献

[1] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[3] Edrei, A. (1967) Sums of Deficiencies of Meromorphic Functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, **19**, 53-74. https://doi.org/10.1007/BF02788709

[4] Weitsman, A. (1969) Meromorphic Functions with Maximal Deficiency Sum and a Conjecture of F. Nevanlinna. *Acta Mathematica*, **123**, 115-139. https://doi.org/10.1007/BF02392387

[5] 杨连中. 关于亚纯函数的亏量与特征函数[J]. 山东大学学报(自然科学版), 1989, 24(1): 7-11.

[6] 王品玲，刘丹，方明亮. 亚纯函数差分的亏量与值分布[J].数学学报(中文版), 2016, 59(3): 357-362.

[7] 陈湘，吴昭君. 线性差分多项式的值分布[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(3): 187-191.

[8] Pfluger, A. (1946) Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung (German). *Commentarii Mathematici Helvetici*, **19**, 91-104. https://doi.org/10.1007/BF02565950

[9] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[10] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2009) On the Growth of Logarithmic Differences, Difference Quotients and Logarithmic Derivatives of Meromorphic Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **361**, 3767-3791. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04663-7

[11] Edrei, A. and Fuchs, W.H.J. (1959) On the Growth of Meromorphic Functions with Several Deficient Values. *Transactions of the American Mathematical Society*, **93**, 292-328. https://doi.org/10.2307/1993455