Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1316-1319
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117147

Hans汉斯

Rolle定理的结构分析与应用

王耀革，郭从洲，崔国忠

信息工程大学基础部，河南 郑州
Email: wyg711218@163.com

收稿日期：2021年5月27日；录用日期：2021年6月29日；发布日期：2021年7月7日

摘 要

对Rolle定理进行结构分析和解读，为学生掌握Rolle定理及其应用提供帮助。

关键词

Rolle定理，结构分析，应用

Structure Analysis and Application of Rolle Theorem

Yaoge Wang, Congzhou Guo, Guozhong Cui

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan
Email: wyg711218@163.com

Received: May 27th, 2021; accepted: Jun. 29th, 2021; published: Jul. 7th, 2021

Abstract

The structure of Rolle theorem is analyzed and interpreted, which can help students master Rolle theorem and its application.

Keywords

Rolle Theorem, Structural Analysis, Application

文章引用: 王耀革, 郭从洲, 崔国忠. Rolle 定理的结构分析与应用[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1316-1319.
DOI: 10.12677/pm.2021.117147

1. 引言

微分中值定理是微分理论的核心，它由若干个结论组成，Rolle定理是微分中值定理的第一个结论，也是最简单、最基本的一个结论。通过对Rolle定理结构分析和应用分析，开拓学生思路，为掌握Rolle定理及其应用提供帮助。

2. Rolle 定理及其结构分析

定理 1 [1] (Rolle 定理) 若 $f(x)$ 满足如下条件：1) 在 $[a,b]$ 上连续；2) 在 (a,b) 内可导；3) $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

结构分析 ① 定理中的条件 1)和条件 2)是函数的定性条件，是微分中值定理的标志，若题目中有这样的条件，应优先考虑用微分中值定理求解；② 从定理的结论看，Rolle 定理给出了导函数零点的存在性，进一步可以抽象为函数的零点(或方程的根)的存在性，因此，与连续函数的零点定理具有相同的作用，由此决定了此定理的作用对象特征，至此，研究零点问题的工具有两个，一个是零点定理，一个是 Rolle 定理；③ 定理的定量条件是函数具有两个等值点 $f(x_1)=f(x_2)$，这和零点定理的条件不同，进一步明确了应用 Rolle 定理的关键是寻找满足具有两个等值点的函数；④ 注意定理的证明思想，即通过确定内部极值点，然后利用 Fermat 定理得到结论，当不能直接利用 Rolle 定理得到结论时，可以考虑利用对应的证明思想(即确定内部极值点)来解决。

3. Rolle 定理的应用分析

题型一 证明 $f^{(n)}(\xi)=0$。

证明的思路是对函数 $f^{(n-1)}(x)$ 应用 Rolle 定理，问题的关键是寻找 $f^{(n-1)}(x)$ 的两个等值点。

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$。

结构分析：题型为导函数零点的存在性；类比已知：研究函数零点的工具有连续函数的零点定理和导函数的零点存在性的 Rolle 定理；两个思路都是考虑之一，从关联紧密的角度看，确定思路为 Rolle 定理；方法设计：根据 Rolle 定理，需要验证的定量条件是两个等值点的确定，类比题目中已知条件，已经有了一个函数值信息 $f(3)=1$，因此，重难点是寻找函数的等值点，即确定另一个满足函数值等于 1 的点 x_0，这就需要利用附加条件来完成，这是连续函数的介值问题，即需要从 0、1、2 三个点与 x_0 点处的函数值进行比较，由此形成对应的解题方法。因此，需先证存在 $x_0\in[0,3)$，使得 $f(x_0)=1$。

证明 因 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上有最大值 M 与最小值 m，故 $m\le f(0),f(1),f(2)\le M$，因此 $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$，由介值定理，至少存在一点 $x_0\in[0,2]$，使得 $f(x_0)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$。

因为 $f(x_0)=f(3)=1$，且 $f(x)$ 在 $[x_0,3]$ 上连续，在 $(x_0,3)$ 内可导，由 Rolle 定理知，必存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$。

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 非负且有直到三阶的连续导数，方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 有两个不同的实根，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=0$。

结构分析 题型：从结论形式看，属于导函数的零点问题，思路为应用 Rolle 定理；类比已知：处理方法就是对二阶导函数利用 Rolle 定理，因而，必须寻求两个使得二阶导数相等的点，为此，只需寻找三个使得一阶导数相等的点，或寻找四个使函数值相等的点，这就是证明题目的出发点。在寻找这些点时，

要注意一些特殊点处的性质，如函数的零点、一阶导函数的零点(驻点)，而由 Fermat 定理，可导极值点一定是驻点，因此，确定极值点也是确定一阶导函数零点的方法。

证明 已知方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 有两个不同的实根，设 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则由 Rolle 定理，存在 $x_3\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(x_3)=0$。

(分析 显然，剩下的两个一阶导数的零点要从极值点中寻找。)

由于函数非负，因而，x_1 和 x_2 是函数的两个极小值点，故

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0,$$

利用 Rolle 定理，则存在 $\xi_1\in(x_1,x_3)$，$\xi_2\in(x_3,x_2)$，使得

$$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$$

再次用 Rolle 定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'''(\xi)=0$。

题型二[2] 待证结论中含有一个中值 ξ，不含其它字母。

证明的基本思路是构造适当的辅助函数，使用 Rolle 定理进行证明。因此，如何构造辅助函数是证明的关键点也是难点，常用的构造辅助函数的方法是原函数法。

情形一 若待证结论是两项相加减的形式(两项中 $f(\xi)$ 与 $f'(\xi)$ 仅相差一阶导数)，如 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$。用原函数法构造辅助函数，需要先把 ξ 换成 x，$f'(x)+g(x)f(x)=0$，再将其改写成 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+g(x)=0$，进一步还原成 $\left[\ln f(x)\right]'+\left[\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right]'=0$，利用结构一致的原理，将 $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 也改写成对数函数形式，可得 $\left[\ln f(x)\right]'+\left[\ln \mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$，合并对数得 $\left[\ln f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$，因此，辅助函数便可取为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$ (注意积分的下限不一定取 0，也可以是其它常数，根据函数 $g(x)$ 定义域的要求确定即可)。

如，① 欲证 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x 2\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2x}f(x)$；

② 欲证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，需证 $f'(\xi)+\dfrac{2}{\xi}f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_1^x \frac{2}{t}\mathrm{d}t}=x^2 f(x)$；

③ 欲证 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$，需证 $f'(\xi)+f(\xi)f(\xi)=0$，构造辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$；

④ 欲证 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$，需证 $\left[f'(\xi)\right]'-\dfrac{2}{1-\xi}f'(\xi)=0$，令 $g(\xi)=f'(\xi)$，即需证 $g'(\xi)-\dfrac{2}{1-\xi}g(\xi)=0$，只需构造辅助函数为 $\varphi(x)=g(x)\mathrm{e}^{\int_2^x -\frac{2}{1-t}\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2\ln(x-1)}g(x)=(x-1)^2 f'(x)$ 即可；

……

情形二 若待证结论是两项以上相加减的形式，或特殊的两项相加减(两项中所含 $f(\xi)$ 与 $f''(\xi)$ 相差两阶导数)的形式，需将所证结论进行适当分组，然后再使用原函数法构造辅助函数，也可称为分组构造原函数法。

如，① 欲证 $f'(\xi)-f(\xi)+2\xi=2$，把 ξ 换成 x，$f'(x)-f(x)+2x=2$，分组 $\left[f(x)-2x\right]'-\left[f(x)-2x\right]=0$，令 $f(x)-2x=g(x)$，转化为情形一对应的形式 $g'(x)-g(x)=0$，利用情形一中构造辅助函数的方法可得辅助函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[f(x)-2x\right]$；

② 欲证 $f''(\xi)-f(\xi)=0$，把 ξ 换成 x，并插项分组 $\left[f''(x)-f'(x)\right]+\left[f'(x)-f(x)\right]=0$，即 $\left[f'(x)-f(x)\right]'+\left[f'(x)-f(x)\right]=0$，令 $f'(x)-f(x)=g(x)$，转化为情形一对应的形式 $g'(x)+g(x)=0$，利用情形一中构造辅助函数的方法可得辅助函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}\left[f'(x)-f(x)\right]$。

题型三 待证结论中含有一个中值ξ，还含字母 a、b。

情形一 字母 a、b 与ξ可分离。将含字母 a、b 的部分与含ξ的部分进行分离，各自还原为原函数，再应用 Rolle 定理。

如，欲证 $f(a)-f(\xi)=\xi f'(\xi)$，把ξ换成x，并改写成 $f(a)-\left[f(x)+xf'(x)\right]=0$，含字母 a、b 的部分与含 x 的部分各自还原为原函数，得$\left[f(a)x\right]'-\left[xf(x)\right]'=0$，进一步还原得$\left[f(a)x-xf(x)\right]'=0$，因此，构造辅助函数为$\varphi(x)=f(a)x-xf(x)$。

情形二 字母 a、b 与ξ不可分离。此时，一般采用凑微分法，先将ξ换为x，并将结论的形式进行去分母，移项处理，整理成$h(x)=0$的形式，再找出$h(x)$的原函数，应用 Rolle 定理。

如，欲证$\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，把$\xi$换成$x$，去分母，移项，整理成

$f(a)g'(x)-f(x)g'(x)-f'(x)g(x)+f'(x)g(b)=0$，即 $f(a)g'(x)-\left[f(x)g(x)\right]'+f'(x)g(b)=0$，因此，构造辅助函数为$\varphi(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$。

4. 结语

Rolle 定理主要研究导函数的零点问题，验证的定性条件是闭区间上连续，开区间内可导，这些一般的初等函数都能达到，验证的定量条件是等值点的确定，这些点都是特殊的点，通常是区间端点、最值点以及条件中隐藏特殊信息的点。由于最终要将特殊点作用于函数，因此，寻找满足 Rolle 定理条件，尤其是满足定量条件的函数是应用 Rolle 定理的难点，我们通过对不同类型中值问题的辅助函数构造方法的总结归纳，形成较系统的解题技巧，对于学生掌握 Rolle 定理的应用有一定的帮助。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[2] 汤家凤. 高等数学辅导讲义[M]. 北京: 中国原子能出版社, 2018: 50-57.