Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1421-1429
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117159

范德蒙德行列式在高等代数解题中的应用

徐雯燕，廖小莲

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底
Email: hnldlxl2005@126.com

收稿日期：2021年6月13日；录用日期：2021年7月15日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

范德蒙德行列式的结构以及运算结果都具有其独特性，在高等代数中有广泛的应用。本文讨论了范德蒙德行列式在高等代数解题中的应用，具体探讨了范德蒙行列式在多项式、行列式、线性方程组、向量组的线性相关性、线性变换等知识模块中的应用，并选取了部分考研真题以及典型高等代数题目对这些应用进行了详细阐述。

关键词

范德蒙德行列式，高等代数，应用

Application of Vandermonde Determinant in Advanced Algebra Solving

Wenyan Xu, Xiaolian Liao

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities and Science, Loudi Hunan
Email: hnldlxl2005@126.com

Received: Jun. 13th, 2021; accepted: Jul. 15th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

The structure and calculation results of Vandermonde determinant are unique, and they are widely used in advanced algebra, calculus and so on. This paper discusses Vandermonde DE determinant in higher algebra problem solving, specifically discussing the application of Vandermonde determinant in polynomial, determinant, linear system of equations, linear correlation of vector group, linear transformation and so on, and selects some of the real exam questions and typical advanced algebra questions to elaborate on these applications.

文章引用: 徐雯燕, 廖小莲. 范德蒙德行列式在高等代数解题中的应用[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1421-1429.
DOI: 10.12677/pm.2021.117159

Keywords

Vandermonde Determinant, Advanced Algebra, Application

1. 引言

范德蒙德行列式是《高等代数》课程中一个重要的内容，它在多项式、线性方程组、行列式、向量组的线性相关性、线性变换等知识模块中都有着重要的作用。许多学者对范德蒙德行列式在高等代数中的应用做了研究。文献[1]张凤男归纳出范德蒙德行列式在多项式、行列式、线性方程组中的应用，文献[2]张倩研究了范德蒙德行列式在线性变换中的应用，文献[3]侯丽芬研究了范德蒙德行列式在行列式计算中的应用。基于此，本文从范德蒙德行列式的计算结果出发，系统地对范德蒙德行列式在高等代数解题中涉及的应用进行分开阐述。

2. 范德蒙德行列式的定义

定义 1 [4]形如

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为范德蒙行列式。

若 D_n 为 n 阶范德蒙德行列式 $(n\ge 2)$ 则有 $D_n=\prod\limits_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)$，这里 $\prod\limits_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)$ 表示所有同类因子 (a_i-a_j) (其中 $i>j$)的乘积：

$$\prod_{1\le j\le i\le n}(a_i-a_j)=(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n-1}-a_{n-3})$$
$$\cdots(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$

3. 范德蒙德行列式的应用

3.1. 范德蒙行列式在多项式中的应用

在解决多项式求根类型的相关题目时，我们可以借助范德蒙德行列式来简化计算，提高解题速度。

例 1 (2014 年，杭州师范大学高等代数考研第二题[5])令 $f(x),g(x),h(x)$ 是三个多项式，并且 $x^3-1\mid f(x^6)+xg(x^6)+x^2h(x^3)$，计算 $f(1),g(1),h(1)$。

分析：利用多项式中复根的性质，我们可以得到三个关于 $f(x),g(x),h(x)$ 的方程，根据观察，它的系数行列式为一个 3 阶范德蒙德行列式，再利用范德蒙德行列式的性质和克莱默法则来进行求解。

解：令 $w_k=\mathrm{e}^{\frac{i2k\pi}{3}}$，$k=0,1,2$，则 $w_k\,(k=0,1,2)$ 是 x^3-1 的 3 次单位根，$w^3=1$。

由已知条件可知，他们也是 $f\left(x^6\right)+xg\left(x^6\right)+x^2h\left(x^3\right)$ 的根，将他们代入，可得：

$$\begin{cases} f(1)+g(1)+h(1)=0 \\ f(1)+w_1g(1)+w_1{}^2h(1)=0 \\ f(1)+w_2g(1)+w_2{}^2h(1)=0 \end{cases}$$

可以看出，它的系数行列式是一个 3 阶范德蒙德行列式，由于 $1,w_1,w_2$ 两两不相等以及范德蒙德行列式的结论，根据克莱默法则可以求出 $f(1)=g(1)=h(1)=0$。

例 2：$P[x]$ 中 n 次多项式 $(n\geq 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算[4]。

分析：本题是高等代数第五版多项式函数中定理 8 书本上对本题的证明是利用数学归纳法对重根进行讨论，这就需要学生具备足够的理论知识，过程较抽象；因此，要想让解题过程变得清晰明了，本题还可以通过构造范德蒙德行列式来进行求解。

解：设 $f(x)$ 的 $n+1$ 个根分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，并且他们各不相同，将他们代入 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$ 中，可以得到：

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1{}^n=0 \\ a_0+a_1x_2+\cdots+a_nx_2{}^n=0 \\ \cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n{}^n=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 做自由未知量，据观察，可以看出该式是一个范德蒙德行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1{}^2 & \cdots & x_1{}^n \\ 1 & x_2 & x_2{}^2 & \cdots & x_2{}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n{}^2 & \cdots & x_n{}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i\leq j\leq n+1}\left(x_j-x_i\right)\neq 0$$

所以方程组(1)还有零解，因此 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，从而 $f(x)=0$，所以 $P[x]$ 中 n 次多项式 $(n\geq 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个。

3.2. 范德蒙行列式在行列式中的应用

范德蒙德行列式是一类特殊结构的行列式，它的运算结果规律性很强，我们必须熟练掌握范德蒙行列式的结构和运算结果，并会根据具体的题目将一些行列式转换为标准的范德蒙行列式进行求解。

例 3：计算 4 阶行列式[3]

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

分析：根据观察可知，该行列式是一个四阶范德蒙德行列式。

其中 $a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=3$、$a_4=4$。

解：由范德蒙德行列式的运算结果

$$|A|=(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)=12$$

例 4 (2002 年，北京交通大学高等代数考研第一题[6])计算 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

分析：根据观察，该行列式只类似于范德蒙行列式，但又不是一个范德蒙行列式，所以我们可以利用加边法，使其变成范德蒙行列式在进行下一步求解。

解：令

$$Dn = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_3^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

这是一个 $n+1$ 阶范德蒙德行列式。根据范德蒙德行列式的定义可得：

$$D_n = \prod_{1\le i\le j\le n}\left(x_i - x_j\right)\left(y-x_1\right)\left(y-x_2\right)\cdots\left(y-x_n\right)$$

将 D_n 按最后一列展开，可以得到：

$$D_n = p_n y^n + p_{n-1}y^{n-1} + \cdots p_1 y + p_0,$$

其中 y^{n-1} 的系数 p_{n-1} 与所求的行列式 D 的关系是 $D = -P_{n-1}$。

由于

$$D_n = \prod_{1\le i\le j\le n}\left(x_i - x_j\right)\left(y-x_1\right)\left(y-x_2\right)\cdots\left(y-x_n\right),$$

其中 y^{n-1} 的系数。

$$p_{n-1} = -\prod_{1\le i\le j\le n}\left(x_i - x_j\right)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

所以

$$D = -p_{n-1} = \prod_{1\le i\le j\le n}\left(x_i - x_j\right)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3.3. 范德蒙行列式在线性方程组中的应用

线性方程组问题的求解往往要和行列式联系到一起，有些时候，我们可以通过运用范德蒙德行列式的性质使我们的计算过程更为简单。

例 5 (2015 年数一选择题第五题[7])设矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix},$$

若集合 $\Omega = \{1,2\}$，则线性方程组有无穷多解的充分必要条件为(D)

A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$

D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

分析：通过观察，我们可以看出矩阵 A 是一个范德蒙德行列式，因此可以直接算出 $|A|$ 的值，利用线性方程组有无穷多解的充分必要条件，我们可以一步一步地推断出需要得出的结论。

解：由题目可知 $r(A)=2$，故线性方程组有无穷多解，

所以

$$r(A)=r(A,b)<3,$$

因此

$$r(A)=r(A,b)=2.$$

由于范德蒙德行列式

$$|A|=(2-1)(a-1)(a-2)=(a-1)(a-2),$$

所以

$$r(A)=2,$$

因此

$$|A|=0,\ a\in\Omega$$

由

$$r(A,b)=2,$$

我们可以得到三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & d \\ 1 & 4 & d^2 \end{vmatrix}=(d-1)(d-2)=0$$

因此 $d\in\Omega$，综上选择 D 项。

3.4. 范德蒙行列式在向量组线性相关性中的应用

在向量组线性相关性理论中我们会经常遇到需要用范德蒙德行列式转化的问题，通过对问题进行分析转化，很容易得到我们需要的结论。

例 6: (高等代数考研教案[8])讨论 $P[t]$ 的元素组 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 的线性相关性，其中 N 为取定的自然数。

分析：题目需要我们讨论线性相关性，根据线性相关性的定义，自然而然的进行假设数域 P 中有一组数 $k_0, k_1, k_2 \cdots, k_N$，使得 $k_0+k_1t+k_2t^2+\cdots k_Nt^N=0$，再对 t 进行赋值，得出该方程的系数行列式，根据计算可知该方程的系数行列式是一个范德蒙德行列式的转置，根据范德蒙德行列式的性质便可以得出结论。

解：设数域 P 中有一组数 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_N$ 使得 $k_0+k_1t+k_2t^2+\cdots k_Nt^N=0$，分别取 $t=a_1, a_2 \cdots, a_{N+1}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ 是数域 P 中 $N+1$ 个互异，可得：

$$\begin{cases} k_0+k_1a_1+k_2a_1^{\ 2}+\cdots k_Na_1^{\ N}=0 \\ k_0+k_1a_2+k_2a_2^{\ 2}+\cdots k_Na_2^{\ N}=0 \\ \qquad\qquad\cdots \\ k_0+k_1a_{N+1}+k_2a_{N+1}^{\ \ 2}+\cdots k_Na_{N+1}^{\ \ N}=0 \end{cases}$$

该方程的系数行列式 D 是 $N+1$ 阶范德蒙德行列式的转置，由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{N+1}$ 互异，所以 $D\neq 0$ 因此只有零解，从而 $1,t,t^2,\cdots,t^N$ 线性无关。

例 7：如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是线性变换 $\wp$ 的不同的特征值，而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}\left(i=1,2,\cdots,k\right)$，是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，那么向量组 $\alpha_{11},\cdots\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots\alpha_{kr_k}$ 也线性无关[4]。

分析：本题是高等代数对角矩阵中的定理 9，课本对 k 作数学归纳法进行证明，对同学们的理论知识要求偏高，针对理论知识不是很强的同学，本题也可以用范德蒙德行列式来进行证明。

证明：设有 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir_i}\left(i=1,2,\cdots,k\right)$，

使得

$$a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+\cdots a_{1r_1}\alpha_{1r_1}+\cdots a_{kr_k}\alpha_{kr_k}=0,$$

令

$$\varsigma_i=\sum_{j=1}^{ki}a_{ij}\alpha_{ij}\left(i=1,2,\cdots,k\right)$$

则

$$a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+\cdots a_{1r_1}\alpha_{1r_1}+\cdots a_{kr_k}\alpha_{kr_k}=0$$

便可以写成

$$\varsigma_1+\varsigma_2+\cdots\varsigma_k=0,$$

又因为 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ 是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，所以

$$A\varsigma_{ij}=\lambda_i\varsigma_{ij}\left(j=1,2,\cdots,r_i;\ i=1,2,\cdots,k\right),$$

$$A\varsigma_i=\sum_{j=1}^{r_i}a_{ij}A\alpha_{ij}=\sum_{j=1}^{r_i}a_{ij}\lambda_i\alpha_{ij}=\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i}a_{ij}\alpha_{ij}=\lambda_i\varsigma_i\left(i=1,2,\cdots,k\right)$$

现用

$$\varsigma_1+\varsigma_2+\cdots\varsigma_k=0$$

左乘 A 得到：

$$A\varsigma_1+A\varsigma_2+\cdots A\varsigma_k=0,$$

再利用

$$A\varsigma_i=\lambda_i\varsigma_i,$$

我们可以得到：

$$\lambda_1\varsigma_1+\lambda_2\varsigma_2+\cdots\lambda_k\varsigma_k=0,$$

再次左乘 A，可以得到：

$$\lambda_1{}^2\varsigma_1+\lambda_2{}^2\varsigma_2+\cdots\lambda_k{}^2\varsigma_k=0,$$

重复进行左乘 A，我们便可以得到：

$$\begin{cases}\varsigma_1+\varsigma_2+\cdots\varsigma_k=0\\ \lambda_1\varsigma_1+\lambda_2\varsigma_2+\cdots\lambda_k\varsigma_k=0\\ \lambda_1{}^2\varsigma_1+\lambda_2{}^2\varsigma_2+\cdots\lambda_k{}^2\varsigma_k=0\\ \qquad\cdots\\ \lambda_1{}^{k-1}\varsigma_1+\lambda_2{}^{k-1}\varsigma_2+\cdots\lambda_k{}^{k-1}\varsigma_k=0\end{cases},$$

写成矩阵为

$$\left(\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_k\right)\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_{k-1} & \lambda_{k-1}^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1}\\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}=0$$

令

$$C=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_{k-1} & \lambda_{k-1}^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1}\\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}$$

为一个范德蒙德行列式，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 各不相同。

所以 $|C|$ 不为零，从而 C 可逆，因此将 C 左乘 C^{-1} 得

$$\left(\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_k\right)=0,$$

有 $\varsigma_i=0\ \left(i=1,2,\cdots,k\right)$，再将它带入

$$\varsigma_i=\sum_{j=1}^{ki}a_{ij}\alpha_{ij}\ \left(i=1,2,\cdots,k\right),$$

我们可以得到

$$\sum_{j=1}^{ki}a_{ij}\alpha_{ij}=0,$$

又由于 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ 线性无关，得 $a_{ij}=0\ \left(j=1,2,\cdots,r_i,\ i=1,2,\cdots,k\right)$，所以向量组 $\alpha_{11},\cdots\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots\alpha_{kr_k}$ 线性无关。

3.5. 范德蒙行列式在线性变换中的应用

线性变换这一章一直是老师教学的重点，同时也是学生学习的一个难点。很多学生对本章的内容知之甚少，线性变换问题的变换形式更为灵活。因此，在我们的问题求解中，我们可以巧妙地运用范德蒙行列式的性质来解决一些问题。

例 8 (2008 年，合肥工业大学 高等代数考研第九题[9])设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，T 为 V 上的线性变换，且在 P 中有 n 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，设 $\alpha\in V$，证明 $\alpha,T\left(\alpha\right),T^2\left(\alpha\right),\cdots,T^{n-1}\left(\alpha\right)$ 线性无关的充要条件为 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，其中 α_i 为 T 的属于特征值 λ_1 的特征向量。

分析：题目让我们证明的是 $\alpha,T\left(\alpha\right),T^2\left(\alpha\right),\cdots,T^{n-1}\left(\alpha\right)$ 线性无关的充要条件为 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，我们需要从必要性和充分性两方面来证明，要证明线性无关，我们可以通过定义、秩、方程组多种方法证明，在利用秩来证明的时候，我们往往会通过构造范德蒙德行列式来证明秩的情况从而说明它们的线性无关性。

证明：必要性：$\alpha,T\left(\alpha\right),T^2\left(\alpha\right),\cdots,T^{n-1}\left(\alpha\right)$ 线性无关，则为 V 的一组基，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 它们线性无关，所以 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n$，因此，当 $\alpha,T\left(\alpha\right),T^2\left(\alpha\right),\cdots,T^{n-1}\left(\alpha\right)$ 线性无关时，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$。

充分性：因为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

所以

$$T(\alpha)=k_1T(\alpha_1)+\cdots k_nT(\alpha_n),$$

$$\left(\alpha,T(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)\right)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 & k_1\lambda_1 & \cdots & k_1\lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_n & k_n\lambda_n & \cdots & k_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

当

$$r\begin{pmatrix} k_1 & k_1\lambda_1 & \cdots & k_1\lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_n & k_n\lambda_n & \cdots & k_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}=n,$$

$\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)$线性无关，可以看出该式是一个范德蒙德行列式，

假设

$$r\begin{pmatrix} k_1 & k_1\lambda_1 & \cdots & k_1\lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_n & k_n\lambda_n & \cdots & k_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}<n$$

即存在$k_i=0$，因为

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}a_{i-1}+k_{i+1}a_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n,$$

其中α是任意的，所以V的一组基为$(\alpha,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,\alpha_n)$，与题设矛盾，所以$r=n$，因此，当$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，$\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)$线性无关。

综上所述，$\alpha,T(\alpha),T^2(\alpha),\cdots,T^{n-1}(\alpha)$线性无关的充要条件为$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$。

4. 结论

范德蒙德行列式构造独特，应用性强，在高等代数解题中具有独特的优势，只要我们能够熟练地运用范德蒙德行列式的各种形式以及构造范德蒙德行列式的各种技巧，就可以将高等代数中的部分题目转化成范德蒙德行列式来进行求解，这样便可以将复杂的问题变得简单化，同时也可以使自己的解题过程变得更为美观清晰。为了更直观地了解范德蒙德行列式规律以及运用方法，我们要在解题中学会总结归纳。

参考文献

[1] 张凤男. 范德蒙行列式的一些应用[J]. 数学学习与研究, 2018(15): 43.

[2] 张倩. 范德蒙德行列式在线性变换中的应用[J]. 考试周刊, 2017(66): 41.

[3] 侯丽芬. 范德蒙德行列式在行列式计算中的应用[J]. 数学学习与研究, 2020(17): 8-9.

[4] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[5] 杭州师范大学2014年招收攻读硕士研究生入学《高等代数》考试试题[Z/OL]. https://wenku.baidu.com/view/49db342a6ad97f192279168884868762cbaebb55.html, 2014.

[6] 北京交通大学2002年研究生入学《高等代数》试题[Z/OL]. https://wenku.baidu.com/view/c81a9c40e65c3b3567ec102de2bd960590c6d92e.html, 2002.

[7] 2015 年考研数学(一)真题及答案解析[Z/OL]. https://wenku.baidu.com/view/e25b6d890708763231126edb6f1aff00bfd57062.html, 2015.

[8] 徐仲, 等, 编著. 高等代数考研教案: 北大第四版[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2020.

[9] 合肥工业大学数学学院 808 高等代数 2008-2012, 2014 年考研真题汇编[Z/OL]. https://wenku.baidu.com/view/1a9a36e1b8d528ea81c758f5f61fb7360a4c2b66.html, 2014.