Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1434-1440
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117161

Hans汉斯

应用Beta函数证明沃利斯公式的两种新证法

裴红梅，张美丽，商洁琳

海军大连舰艇学院基础部，辽宁 大连
Email: 63180583@qq.com

收稿日期：2021年6月13日；录用日期：2021年7月15日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

沃利斯公式(Wallis Formula)是微积分中的一个重要的公式，是圆周率π的有理数极限表达式，其证明方法较多，一般都是利用积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$证明的。本文利用B函数以及B函数与Γ函数之间的关系，给出了沃利斯公式的两种新的证明方法。

关键词

沃利斯公式，B函数，Γ函数

Two New Methods of Proving Wallis Formula by Using Beta Function

Hongmei Pei, Meili Zhang, Jielin Shang

Department of Basic, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning
Email: 63180583@qq.com

Received: Jun. 13th, 2021; accepted: Jul. 15th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

Wallis Formula is an important formula in calculus, which is the rational limit expression of PI. There are many methods to prove it, which are generally proved by integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$. In this paper, two new methods of proving Wallis Formula are given by using Beta Function and the relationship between Beta Function and Gamma Function.

文章引用: 裴红梅, 张美丽, 商洁琳. 应用 Beta 函数证明沃利斯公式的两种新证法[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1434-1440. DOI: 10.12677/pm.2021.117161

Keywords

Wallis Formula, Beta Function, Gamma Function

1. 引言

沃利斯公式(Wallis formula)是圆周率 π 的有理数极限表达式，它是第一个用容易计算的有理数列的极限表示无理数 $\pi/2$ (实质上是超越数)的重要公式，在理论上有重大意义。这个公式最早由英国数学家沃利斯(J. Wallis)得到，并发表于 1655 年。

2. 基础知识

微积分学中给出的沃利斯公式如下：

沃利斯公式 形如

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$$

的公式称为沃利斯公式。

B函数 对任意实数 $P,Q>0$，都有

$$B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\mathrm{d}x,$$

则称该公式为B函数，或贝塔函数，Beta函数，第一欧拉积分。

B函数 $B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\mathrm{d}x$，当 $0<P<1$ 且 $Q>1$ 时，是以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分；当 $0<Q<1$ 且 $P>1$ 时，是以 $x=1$ 为瑕点的瑕积分；当 $0<P<1$ 且 $0<Q<1$ 时，是以 $x=0$ 和 $x=1$ 均为瑕点的瑕积分；当 $P>1$ 且 $Q>1$ 时，是定积分。应用柯西判别法可证得当 $P>0,\ Q>0$ 时，$B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\mathrm{d}x$ 均收敛。

B函数具有很多重要的性质，现给出下文要用到的递推公式，即

$$B(P,Q)=\frac{Q-1}{P+Q-1}B(P,Q-1),\ (P>0,\ Q>1),$$

和

$$B(P,Q)=\frac{P-1}{P+Q-1}B(P-1,Q),\ (P>1,\ Q>0).$$

在B函数的表达式中，若令 $x=\cos^2\varphi$，则得到B函数的三角函数积分形式：

$$B(P,Q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2P-1}\varphi\sin^{2Q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

Γ函数 在实数域上的Γ函数定义为[1]

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x\quad(s>0).$$

也称为欧拉第二积分。

Γ函数具有很多重要的性质，现给出下文要用到的递推公式，即

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\quad(s>0).$$

由递推公式可得，对任何正整数n，有

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

B函数和Γ函数在分析学、概率统计、偏微分方程和组合数学等其他应用学科中有着重要的应用。两者之间存在着如下的关系：

$$B(P,Q)=\frac{\Gamma(P)\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}.$$

3. 应用 B 函数证明沃利斯公式

引理 $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\left(n\in\mathrm{N}^+\right)$。

证明 在 B 函数的表达式 $B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\mathrm{d}x$ 中，作变量替换 $x=t^2$，则

$$B(P,Q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{Q-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{2P-2}\left(1-t^2\right)^{Q-1}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_0^1 t^{2P-1}\left(1-t^2\right)^{Q-1}\mathrm{d}t,$$

将 $P=\frac{n+1}{2}$，$Q=\frac{3}{2}$代入上式，得

$$B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right)=2\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

引理得证。

设 $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathrm{N}^+$，由引理知，

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

$$I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

由 B 函数的递推公式 $B(P,Q)=\frac{P-1}{P+Q-1}B(P-1,Q)$，$(P>1,\ Q>0)$，有

$$B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{n+1}{2}-1}{\frac{n+1}{2}+\frac{3}{2}-1}B\left(\frac{n+1}{2}-1,\frac{3}{2}\right)=\frac{n-1}{n+2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

从而

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n-1}{n+2}B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}.$$

得到积分数列 I_n 的递推公式。

由积分数列 I_n 的递推公式 $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ 可得

$$I_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}I_{n-4}=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}I_{n-6}$$

$$=\cdots=\begin{cases}\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{4}\cdot I_0, & n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{5}\cdot I_1, & n\text{为奇数}\end{cases},$$

又 $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$，$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$。因此

$$I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}, & n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-5}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}, & n\text{为奇数}\end{cases}.$$

即

当 $n=2m\left(m\in\mathrm{N}^+\right)$ 时，$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m+2}\cdot\frac{2m-3}{2m}\cdot\frac{2m-5}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}$；

当 $n=2m-1\ \left(m\in\mathrm{N}^+\right)$ 时，$I_{2m-1}=\frac{2m-2}{2m+1}\cdot\frac{2m-4}{2m-1}\cdot\frac{2m-6}{2m-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(2m-2)!!}{(2m+1)!!}$。

定理 对数列 $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathrm{N}^+$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1$。

证明 用单调有界准则证明数列 $\{I_n\}$ 的收敛性。因为

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=I_{n-1},$$

故数列 $\{I_n\}$ 单调递减。又有 $x\in(0,1)$ 时，$x^n\sqrt{1-x^2}>0$，故

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x>0.$$

即数列 $\{I_n\}$ 有下界。

综上，数列 $\{I_n\}$ 单调递减且有下界。由单调有界准则，数列 $\{I_n\}$ 收敛。

又由数列 $\{I_n\}$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1$。

定理得证。

由上述定理可知，$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1$，即

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(2m-2)!!}{(2m+1)!!}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(2m-2)!!(2m+2)!!}{(2m+1)!!(2m-1)!!}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}\cdot\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{2m+2}{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}\cdot\frac{1}{2m+1},$$

变形得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}\cdot\frac{1}{2m+1}=\frac{\pi}{2},$$

沃利斯公式得证。

4. 应用 B 函数和 Γ 函数证明沃利斯公式

应用 B 函数和 Γ 函数证明沃利斯公式的思路是将下列积分转化为由 B 函数和 Γ 函数表示，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x,$$

因 $B(P,Q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2P-1}\varphi\sin^{2Q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$，故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{n-1}{2}\right),$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos x\mathrm{d}x=\frac{n-1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

在文献[2]中可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\mathrm{d}x}=1,$$

因此

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}}{\frac{n+1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n+1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

由 Γ 函数的递推公式，上式变为

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\frac{n}{2}\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n^2-1)}{2^2}\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2}{\frac{n}{2}\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}.$$

上式极限为数列极限，将之分为奇数项所构成的子数列和偶数项所构成的子数列两个数列来考察极限。

1) 若 n 为偶数，设 $n=2m$，则

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\left(4m^2-1\right)}{2^2}\left[\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)\right]^2}{m\left[\Gamma(m)\right]^2},$$

因为 $\Gamma(m)=(m-1)!$，且

$$\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{2m-3}{2}\right)=\frac{2m-3}{2}\Gamma\left(\frac{2m-3}{2}\right)=\frac{2m-3}{2}\cdot\frac{2m-5}{2}\Gamma\left(\frac{2m-5}{2}\right)$$
$$=\cdots=\frac{2m-3}{2}\cdot\frac{2m-5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}}\sqrt{\pi},$$

从而得到

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\left(4m^2-1\right)}{2^2}\left[\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)\right]^2}{m\left[\Gamma(m)\right]^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\left(4m^2-1\right)}{2^2}\left[\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}}\sqrt{\pi}\right]^2}{m\left[(m-1)!\right]^2},$$

两边取倒数，再乘以 $1/\pi$，变形得

$$\pi=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{2m}m\cdot\left[(m-1)!\right]^2}{\left(4m^2-1\right)\left[(2m-3)!!\right]^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{2^{2m}(2m-1)\cdot\left[(m)!\right]^2}{m\left[(2m-1)!!\right]^2}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{(2m-1)\cdot\left[(2m)!!\right]^2}{m\left[(2m-1)!!\right]^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2},$$

化简得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}=\frac{\pi}{2}.$$

即当 n 为偶数时，沃利斯公式得证。

2) 若 n 为奇数，设 $n=2m+1$，则

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2m\cdot(2m+2)}{2^2}\left[\Gamma(m)\right]^2}{\frac{2m+1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right]^2},$$

因为

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{2m-1}{2}\right)=\frac{2m-1}{2}\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)=\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\Gamma\left(\frac{2m-3}{2}\right)$$
$$=\cdots=\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^{m}}\sqrt{\pi},$$

从而得到

$$1=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2m\cdot(2m+2)}{2^2}\left[\Gamma(m)\right]^2}{\frac{2m+1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right]^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m\cdot(m+1)\left[(m-1)!\right]^2}{\pi\frac{2m+1}{2}\left[\frac{(2m-1)!!}{2^m}\right]^2}=\frac{2}{\pi}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\frac{m+1}{m}\cdot 2^{2m}(m!)^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}$$

变形得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\left[(2m)!!\right]^2}{\left[(2m-1)!!\right]^2}=\frac{\pi}{2}.$$

即当 n 为奇数时，沃利斯公式得证。

综合(1) (2)可知，奇数项所构成的子数列和偶数项所构成的子数列均收敛于 $\pi/2$，故数列极限为

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1},$$

沃利斯公式得证。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 268-269.

[2] 曹雪强. 沃利斯公式的两种新证法[J]. 贺州学院学报, 2008, 24(3): 127-128; 234-235.