Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1482-1487
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118166

n-强-*F*-Ding投射模

钟魁晨

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 992318126@qq.com

收稿日期：2021年6月30日；录用日期：2021年8月4日；发布日期：2021年8月11日

摘 要

引入*n*-强-*F*-Ding投射模，给出*n*-强-*F*-Ding投射模的等价刻画和基本性质，证明了一个模*M*是*n*-强-*F*-Ding投射模当且仅当*M*同构于某个*n*-强-*F*-Ding投射模与投射模的直和。

关键词

Ding投射模，*n*-强Ding投射模，*n*-强-*F*-Ding投射模

n-Strongly-*F*-Ding Projective Modules

Kuichen Zhong

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 992318126@qq.com

Received: Jun. 30th, 2021; accepted: Aug. 4th, 2021; published: Aug. 11th, 2021

Abstract

In this paper, we introduce *n*-Strongly-*F*-Ding projective module, give its equivalent characterization and basic properties, and prove that a module is *n*-Strongly-*F*-Ding projective module if and only if it is isomorphic to a direct sum of a *n*-Strongly-*F*-Ding projective module and a projective module.

Keywords

Ding Projective Module, *n*-Strongly-*F*-Ding Projective Module, *n*-Strongly-*F*-Ding Projective Module

文章引用：钟魁晨. *n*-强-*F*-Ding 投射模[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1482-1487.
DOI: 10.12677/pm.2021.118166

1. 引言

1995 年，在文献[1]中，Enochs 等人在任意结合环上引入了 Gorenstein 投射(内射，平坦)模的定义，推广了 G-维数为 0 的有限生成模。2007 年，Bennis 和 Mahdou 在文献[2]中，引入了特殊的 Gorenstein 模，即强 Gorenstein 投射(内射，平坦)模的概念，给出强 Gorenstein 投射模的等价刻画，并且证明了一个模 M 是 Gorenstein 投射模当且仅当它是某个强 Gorenstein 投射模的直和项。在文献[3]中，Zhao 和 Huang 引入 n-强 Gorenstein 投射(内射，平坦)模的概念，研究这类模的性质。

2009 年，在文献[4]中，Mao 和 Li 等定义了强 Gorenstein 平坦模，即 Ding 投射模。证明了在凝聚环下，Ding 投射模是 Gorenstein 平坦模。同年在文献[5]中，Xing 定义了 n-强 Ding 投射模的概念，证明了在交换环的情况下，一个模 M 是 n-强 Ding 投射模，那么模 M 与投射模的张量是 n-强 Ding 投射模。

2011 年，在文献[6]中，作者引入了 X-Gorenstein 投射和 Y-Gorenstein 内射(平坦)模及它们的维数，研究了这类模的性质，给出了 X-Gorenstein 投射和 Y-Gorenstein 内射(平坦)维数的等价条件。

受以上启发，本文引入 n-强-F-Ding 投射模，研究它的性质，并给出它的等价条件。

本文中的环 R 均指有单位元的结合环，模指左 R-模。Proj，Flat 分别表示投射模类，平坦模类。

2. 预备知识

定义 1.1 [1]称 R-模 M 是 Gorenstein 投射模，如果存在投射模的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f_{-1}} P_{-1} \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_2} \cdots,$$

其中 $\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P_1 \to P_0\right)$，且对 $\forall P \in \mathrm{Proj}$，$\mathrm{Hom}_R\left(-,P\right)$ 保持以上序列正合。记 M 为 GP 模。所有 GP 模的类记为 $\mathrm{GP}\left(\mathrm{R}\right)$。

定义 1.2 [4]称 R-模 M 是 Ding 投射模，如果存在投射模的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f_{-1}} P_{-1} \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{f_2} \cdots,$$

其中 $\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，使得 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P_1 \to P_0\right)$，且对 $\forall L \in \mathrm{Flat}$，$\mathrm{Hom}_R\left(-,\mathrm{L}\right)$ 保持以上序列正合。记 M 为 Ding 投射模。所有 Ding 投射模的类记为 $\mathrm{DP}\left(\mathrm{R}\right)$。

定义 1.3 [6]设 n 是正整数。称 R-模 M 是 n-强 Ding 投射模，如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，且对 $\forall L \in \mathrm{Flat}$，$\mathrm{Hom}_R\left(-,\mathrm{L}\right)$ 保持以上序列正合。记 M 为 n-SDP 模。所有 n-SDP 模的类记为 $n\text{-SDP}\left(\mathrm{R}\right)$。

注：$\mathrm{P}\left(\mathrm{R}\right) \subseteq n\text{-SDP}\left(\mathrm{R}\right) \subseteq \mathrm{DP}\left(\mathrm{R}\right) \subseteq \mathrm{GP}\left(\mathrm{R}\right)$。

3. 主要结果

定义 2.1 设 n 是正整数，F 是包含所有平坦模的类，称 R-模 M 是 n-强-F-Ding 投射模，如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P \in \mathrm{Proj}$，且对 $\forall \mathrm{F} \in F$，$\mathrm{Hom}_R\left(-,\mathrm{F}\right)$ 保持以上序列正合。记M为 n-S-F-DP 模。所有 n-S-F-DP 模

的类记为 $n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

注 1：$\mathrm{Proj}\subseteq n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)\subseteq n\text{-}\mathrm{SDP}(\mathrm{R})$。

命题 2.2 设 $\{M_j\}_{j\in I}$ 是一簇 $n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP$ 模，那么 $\oplus_{j\in I}M_{j\in I}$ 是 $n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP$ 模。

证 通过定义对 $\forall j\in I$ 有正合列

$$0\longrightarrow M_j\longrightarrow P_{n-1}^j\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0^j\longrightarrow M_j\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i^j\in\mathrm{Proj}$，对 $\forall \mathrm{F}\in F$，$\mathrm{Hom}(-,\mathrm{F})$ 作用下依旧正合。所以有正合列

$$0\longrightarrow\oplus_{j\in I}M_j\longrightarrow\oplus_{j\in I}P_{n-1}^j\longrightarrow\cdots\longrightarrow\oplus_{j\in I}P_0^j\longrightarrow\oplus_{j\in I}M_j\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall\oplus_{j\in I}P_i^j\in\mathrm{Proj}$，对 $\forall \mathrm{F}\in F$，$\mathrm{Hom}(-,\mathrm{F})$ 作用下依旧正合。通过定义知 $\oplus_{j\in I}M_j$ 是 $n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP$ 模。

引理2.3 如果存在正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{h_n}P_{n-1}\xrightarrow{h_{n-1}}\cdots\xrightarrow{h_1}P_0\xrightarrow{h_0}M\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i\in\mathrm{Proj}$ 且 $M\in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，那么 $\forall\,\mathrm{Im}\,h_i\in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

对照文献[7]的定义我们可以定义R-模M的F-投射维数
$F\text{-}pd(M)=\inf\{n\,|\,\text{存在}F\text{-分解}0\longrightarrow \mathrm{F}_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{F}_0\longrightarrow M\longrightarrow 0,\ \text{其中}\forall \mathrm{F}_i\in F\}$。当 n 不存在时记 $F\text{-}\dim=\infty$，下面给出n-强F-$Ding$投射模的等价刻画：

命题2.4 n是正整数，设M是R-模，则以下等价：

1) $M\in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

2) 存在R-模的短正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i\in\mathrm{Proj}$，且对 $\forall F\text{-}pd(H)<\infty$，$Ext_R^{i>0}(M,H)=0$。

3) 存在R-模的短正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i\in\mathrm{Proj}$，且对 $\forall \mathrm{F}\in F$，$Ext_R^{i>0}(M,\mathrm{F})=0$。

证 $(1)\Leftrightarrow(3)$，$(2)\Rightarrow(3)$ 显然。现在证 $(3)\Rightarrow(2)$。

假设 $\forall F\text{-}pd(H)=m<\infty$。则有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{F}_m\longrightarrow \mathrm{F}_{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{F}_0\longrightarrow H\longrightarrow 0,$$

其中 $\forall \mathrm{F}_i\in F$。取 $k_i=Ker(\mathrm{F}_i\to \mathrm{F}_{i-1})$，$i=0,1,\cdots,m-3,m-2$，其中 $\mathrm{F}_{-1}=H$ 则有短正合列

$$0\to k_0\to \mathrm{F}_0\to H\to 0,\quad (1)^0$$

$$0\to k_1\to \mathrm{F}_1\to k_0\to 0,\quad (2)^0$$

$$\cdots$$

$$0\to k_{m-2}\to \mathrm{F}_{m-2}\to k_{m-3}\to 0,\quad (m-1)^0$$

$$0\to \mathrm{F}_m\to \mathrm{F}_{m-1}\to k_{m-2}\to 0,\quad (m)^0$$

对短正合列 $(1)^0,(2)^0,\cdots,(m-1)^0,(m)^0$ 用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 作用并由长正合列定理及维数转移可得

$$Ext_R^{m+j}(M,F_m)\cong Ext_R^j(M,H)=0,$$

故 $Ext_R^{i>0}(M,H)=0$。

我们回顾一下投射可解的定义，称R-模类X是投射可解的，那么对于R-模的短正合列$0 \to A \to B \to C \to 0$，若$C \in X$，则$B \in X$当且仅当$C \in X$。而我们知道$n$-强Gorenstein模类通常情况下并不投射可解。那么我们思考当在什么情况下有相似于投射可解的结论呢？于是我们有如下结果：

命题2.5 设$0 \to N \to M \to P \to 0$，是$R$-模的短正合列，其中$P$是投射模，则$N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$当且仅当$M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

证 $\Rightarrow)$因为$N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，则通过定义存在$R$-模的正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

其中$\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，且对$\forall \mathrm{F} \in F$，$\mathrm{Hom}(-, \mathrm{F})$作用下依旧正合。那么有$R$-模的正合列

$$0 \longrightarrow N \oplus P \longrightarrow P_{n-1} \oplus P \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \oplus P \longrightarrow N \oplus P \longrightarrow 0,$$

通过定义知$N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

$\Leftarrow)$由于$M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，且$M \cong N \oplus P$，则通过定义知存在$R$-模的正合列

$$0 \longrightarrow N \oplus P \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} N \oplus P \longrightarrow 0,$$

取$M_1 = Kerf_0$，$M_{n-1} = coKerf_n$，由引理2.4 $M_0, M_{n-2} \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R) \subseteq DP(R)$。

由推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \oplus P \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M_{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_{n-1} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

考虑短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow 0,$$

用$\mathrm{Hom}(-, P)$作用并由长正合列定理以及维数转移可得

$$Ext_R^1(Q_n, P) \cong Ext_R^1(N, P)$$

因为$M \cong N \oplus P \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R) \subseteq n\text{-}SDP(R) \subseteq DP(R) \subseteq GP(R)$，则

$$Ext_R^1(N \oplus P, P) = Ext_R^1(N, P) \oplus Ext_R^1(P, P) = 0$$

所以$Ext_R^1(Q_n, P) = 0$。即中间行的正合列可裂，可得$Q_n \in \mathrm{Proj}$，且有短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow 0$$

对$\forall \mathrm{F} \in F$，$\mathrm{Hom}(-, \mathrm{F})$作用下依旧正合。

由拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & M_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus P \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

考虑到短正合列 $0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 可裂，可得 $Q_1 \in \mathrm{Proj}$。且有短正合列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

对 $\forall \mathrm{F} \in F$，$\mathrm{Hom}(-,\mathrm{F})$ 作用下依旧正合。从而有正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

对 $\forall \mathrm{F} \in F$，$\mathrm{Hom}(-,\mathrm{F})$ 作用下依旧正合。

命题2.6 设 $0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$，$P \in \mathrm{Proj}$ 是R-模的短正合列。若 $M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，则 $N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

证 由于 $M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，则存在$R$-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g_n} P_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0,$$

其中 $\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，取 $M_1 = Kerg_0$，由引理2.3知 $M_1 \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow X \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 可裂，所以 $X \cong M_1 \oplus P \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，由命题2.4知 $N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

推论2.7 设$0 \to N \to P \to M \to 0$，是$R$-模的短正合列，其中$P \in \mathrm{Proj}$，则$N \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$当且仅当$M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

命题2.8 设R是交换环，$Q \in \mathrm{Proj}$。若$M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，则$M \otimes_R Q \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

证 因为$M \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$，则存在$R$-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中$\forall P_i \in \mathrm{Proj}$，那么

$$0 \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow P_{n-1} \otimes_R Q \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_R Q \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow 0,$$

因为R是交换环，所以$\forall P_i \otimes_R Q \in \mathrm{Proj}$，由于

$$Ext_R^i(M \otimes Q, F) \cong Hom_R\left(Q, Ext_R^i(M, F)\right) = 0,$$

通过命题2.3知$M \otimes_R Q \in n\text{-}S\text{-}F\text{-}DP(R)$。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathmatische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[3] Zhao, G.Q. and Huang, Z.Y. (2011) n-Strongly Gorenstien Projective, injective and Flat Modules. *Communications in Algebra*, **39**, 3044-3062. https://doi.org/10.1080/00927872.2010.496749

[4] Ding, N.G., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[5] Xing, J. (2012) n-Strongly Ding Projective, Injective and Flat Modules. *International Mathematical Forum*, **41-44**, 2093-2098.

[6] Meng, F.Y. and Pan, Q.X. (2011) X-Gorenstein Projective and Y-Gorenstein Injective Modules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **40**, 537-554.

[7] Hu, Y., Zhou, J. and Zhao, Z.B. (2020) X-Strongly Gorenstein Modules. *Journal of University of Science and Technology of China*, **50**, 128-131.