

# 最大度大于等于八的可嵌入图的全染色

王丽婷\*, 王慧娟#

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

Email: #1302886363@qq.com

收稿日期: 2021年7月9日; 录用日期: 2021年8月12日; 发布日期: 2021年8月19日

## 摘要

图的染色问题是图论中的一个重要研究方向, 在计算机科学, 组合优化和网络优化等方面有非常重要的应用, 全染色是一种重要的染色。本文利用权值转移的方法证明了, 如果 $G$ 是最大度大于等于八的可嵌入到欧拉示性数非负曲面的图, 且 $G$ 中不包含相邻的4-圈, 那么图 $G$ 的全色数等于最大度加一。

## 关键词

欧拉示性数, 曲面, 全染色, 权转移方法

# Total Coloring of Embedded Graphs with Maximum Degree at Least Eight

Liting Wang\*, Huijuan Wang#

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Email: #1302886363@qq.com

Received: Jul. 9<sup>th</sup>, 2021; accepted: Aug. 12<sup>th</sup>, 2021; published: Aug. 19<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

Graph coloring is an important research direction in graph theory. It has very important applications in computer science, combination optimization and network optimization. Total coloring is an important type of coloring. In this paper, we use the discharging method to prove that if  $G$  is a graph of maximum degree that is equal or greater than eight, and it can be embedded into a non-negative surface of Euler characteristic, and  $G$  does not contain adjacent 4-cycles, then the total chromatic number of  $G$  is equal to its maximum degree plus one.

\*第一作者。

#通讯作者。

## Keywords

### Euler Characteristic, Surface, Total Coloring, Discharging Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文仅考虑可嵌入到欧拉示性数非负的曲面的图,且这些图是无向的、有限的,简单的且非空的图。文中未加定义直接使用的概念和符号可以参考文献[1]。分别用  $V(G)$ ,  $F(G)$ ,  $E(G)$  表示图的点集,面集和边集。设  $v \in V(G)$ , 则  $v$  的度数  $d(v)$  是与  $v$  相关联的边的个数。 $\Delta(G)$  代表图  $G$  的最大度,即  $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V(G)\}$ , 简称为  $\Delta$ 。同样的,图  $G$  的面  $f$  的度数  $d(f)$  是面的边界所含边的个数。如果图  $G$  中存在连接顶点  $u$  和  $v$  的路,则称这两个顶点是连通的。若图  $G$  的任意两个顶点是连通的,则称图  $G$  是连通图。如果存在  $V$  的子集  $V'$ , 使得  $G - V'$  不连通,则称是  $V'$  是  $G$  的顶点割。 $k$ -顶点割是包含  $k$  个元素的顶点割, $G$  中所有具有  $k$  顶点割中最小的  $k$ , 称为  $G$  的连通度,记作  $\kappa(G)$ 。如果  $\kappa(G) \geq k$ , 则称  $G$  是  $k$ -连通的。一个图  $G$  的  $k$ -全染色,是指从集合  $V(G) \cup E(G)$  到集合  $\{1, 2, \dots, k\}$  的一个映射,使得在集合  $V(G) \cup E(G)$  的任意两个相邻或相关联的元素的值不相等。如果可以用  $k$  种颜色对图  $G$  全染色,那么则称图  $G$  是  $k$ -可全染色的,使得图  $G$  是  $k$ -可全染色的最小正整数  $k$  称为图  $G$  的全色数  $\chi''(G)$ 。

**猜想 1** 对于任意的简单图  $G$  都有,  $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ 。

这个猜想称为全染色(TCC)猜想,在 20 世纪 60 年代,由 Vizing [2]和 Behzad [3]分别独立提出。全染色猜想在  $\Delta(G) \leq 5$  时,对于一般图成立,而对于平面图,当  $\Delta(G) = 6$  时,尚未完全证明[4],本文中考虑的图  $G$  是可以嵌入到欧拉示性数非负的曲面上的图,即  $\chi(\Sigma) \geq 0$ 。对于可以嵌入到欧拉示性数  $\chi(\Sigma) \geq 0$  的曲面上的图, Zhao Y.证明了当  $\Delta(G) \geq 8$  时,全染色猜想成立[5], Wang H. J.和 Liu B.将结果推广到  $\Delta(G) \geq 7$  [6]。Wang Y.对可嵌入到欧拉示性数非负曲面的图的全染色进行完善[7]。随着研究的深入,人们发现一些图的全色数不仅仅满足全染色猜想,还有更强的结论,即  $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ 。Wang B.和 Wu J. L.证明了当  $\Delta(G) \geq 7$ , 且不含相邻 3-圈和 4-圈时  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 1$  [8]。

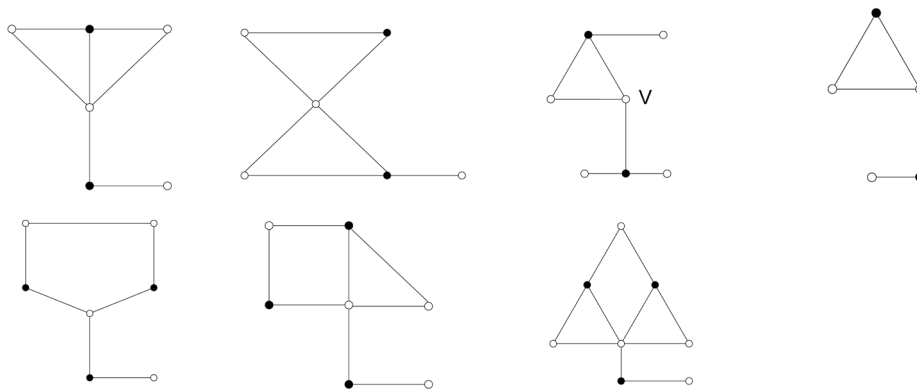


Figure 1. Forbidden structure of subgraph.

图 1. 禁用子图结构

## 2. 引理

**引理 1 [9]**  $G$  是 2-连通的。

**引理 2 [10]** 如果  $uv \in E(G)$  且  $d(u) \leq 4$ , 那么  $d(u) + d(v) \leq \Delta + 2 = 10$ 。

**引理 3 [11]** 图  $G$  中连接 2-点与 8-点的边导出的子图是森林。

**引理 4 [12]** 图  $G$  中不包含同构于如图 1 的禁用子图结构。(图中实心点表示已经画出与其关联的所有边, 空心点表示没有画出与其关联的所有边。图中  $d(v) = 7$ 。)

## 3. 主要结果的证明

基于以上引理, 下面开始证明我们的主要结论。

**定理 1** 设  $G$  是  $\Delta(G) \geq 8$  可嵌入到欧拉示性数非负曲面的图, 且  $G$  中不包含相邻的 4-圈, 那么图  $G$  的全色数  $\chi^n(G) = \Delta(G) + 1$ 。

为方便证明下面给出一些定义和符号。在图  $G$  中, 令  $k$ -点,  $k^-$ -点,  $k^+$ -点分别表示在图  $G$  中度数等于  $k$  的点, 度数小于等于  $k$  的点, 度数大于等于  $k$  的点。类似的, 我们可以定义  $k$ -面,  $k^-$ -面,  $k^+$ -面。令  $n_k(v)$  代表与  $v$  相邻的  $k$ -点的个数, 类似的可以定义,  $n_k^-(v)$ ,  $n_k^+(v)$ 。令  $f_k(v)$  代表与  $v$  相关联的  $k$ -面的个数, 类似的可以定义,  $f_k^-(v)$ ,  $f_k^+(v)$ 。

由于图  $G$  是可以嵌入到欧拉示性数非负曲面上的图, 所以由 Euler 公式  $|V| + |E| - |F| = \chi(\Sigma) \geq 0$  得,

$$-6(|V| + |E| - |F|) = \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) = -6\chi(\Sigma) \leq 0$$

假设图  $G$  是满足定理条件的一个极小反例。首先定义初始权值, 对于任意的  $v \in V(G)$ , 设初始权值为  $ch(v) = 2d(v) - 6$ , 对于任意的  $f \in F(G)$ , 设初始权值为  $ch(f) = d(f) - 6$ 。然后对于任意的  $x \in V(G) \cup F(G)$  按照权转移规则对权值重新分配得到新的权值  $ch'(x)$ , 由于权转移规则只是移动权值, 而不会改变权值的总和, 所以转移后的权值总和小于等于 0。即

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch(x) \leq 0$$

需要验证, 对权值进行重新分配后, 对于任意的  $x \in V(G) \cup F(G)$ , 都有  $ch'(x) \geq 0$ , 并且当  $d(v) \geq 8$ , 有  $ch'(x) > 0$ , 由于在文献[13]中,  $d(v) \geq 9$  已经证明过此结论, 所以只需要证明当  $d(v) = 8$  时, 有  $ch'(x) > 0$ , 那么得出转移后的权值总和严格大于 0, 得出矛盾, 所以不存在这样的反例, 即定理成立。

接下来给出如下的权值转移规则。要注意的是, 权转移是在相邻的点之间, 或者相关联的面之间进行转移。

**R1** 2-点从两个邻点各得 1。

**R2** 4-点给 3-面或 4-面  $\frac{1}{2}$ , 给 5-面  $\frac{1}{3}$ 。

**R3** 5-点给 3-面 1, 给 4-面  $\frac{1}{2}$ , 给 5-面  $\frac{1}{3}$ 。

**R4** 6-点给 3-面  $\frac{5}{4}$ , 给 4-面  $\frac{3}{4}$ , 给 5-面  $\frac{1}{3}$ 。

**R5**  $7^+$ -点给与  $3^-$ 点关联的 3-面  $\frac{1}{3}$ , 给不与  $3^-$ 点关联的 3-面 1, 给与两个  $3^-$ 点关联的 4-面 1, 给其余的 4-面  $\frac{3}{4}$ , 给 5-面  $\frac{1}{3}$ 。

现在开始验证, 对于任意的  $f \in F(G)$ , 设  $d(f) \geq 6$ , 则  $ch'(f) = ch(f) - 6 \geq 0$ 。设  $d(f) = 5$ , 则  $f$

至多与两个  $3^-$ -点相邻, 即  $f$  至少与三个  $4^+$ -点相邻。所以  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 。设  $d(f) = 4$ , 当  $f$  与两个  $3^-$ -点关联, 则  $f$  与两个  $7^+$ -点关联, 所以  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + 1 \times 2 = 0$ 。当  $f$  与一个  $3^-$ -点, 两  $5^-$ -点相关联,  $f$  与两个  $7^+$ -点相关联, 所以  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 0$ 。当  $f$  不与一个  $3^-$ -点相关联, 则  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$ 。设  $d(f) = 3$ , 当  $f$  与  $3^-$ -点关联, 则  $f$  与两个  $7^+$ -点相关联, 所以  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + \frac{3}{2} \times 2 = 0$  当  $f$  不与  $3^-$ -点关联, 则  $ch'(f) \geq ch(f) - 6 + \frac{5}{4} \times 2 + \frac{1}{2} > 0$ 。

对于任意的  $v \in V(G)$ , 设  $d(v) = 2$ , 则由 R1,  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 + 1 \times 2 = 0$ 。设  $d(v) = 3$ , 则  $ch'(v) = 2 \times ch(v) - 6 = 0$ 。设  $d(v) = 4$ , 则由 R2,  $ch'(v) \geq 2 \times ch(v) - 6 - \frac{1}{2} \times 4 = 0$ 。设  $d(v) = 5$ , 则  $f_3(v) \leq 3$ , 则由 R3,  $ch'(v) \geq 2 \times ch(v) - 6 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 。设  $d(v) = 6$ , 则  $f_3(v) \leq 4$ , 当  $f_3(v) = 4$ , 则  $f_5^+(v) = 2$ , 由 R4,  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{5}{4} \times 4 - \frac{1}{3} \times 2 > 0$ 。当  $f_3(v) \leq 3$ ,  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{5}{4} \times 3 - \frac{3}{4} \times 3 = 0$ 。设  $d(v) = 7$ , 则  $f_3(v) \leq 4$ , 当  $f_3(v) = 4$ , 则  $n_3(v) \leq 1$ ,  $f_5^+(v) \geq 2$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{3}{2} \times 2 - \frac{5}{4} \times 2 - 1 - \frac{1}{3} \times 2 > 0$ 。当  $f_3(v) \leq 3$ , 则  $f_5^+(v) \geq 1$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{3}{2} \times 3 - 1 \times 3 - \frac{1}{3} > 0$ 。

设  $d(v) = 8$ , 则  $n_2(v) \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ , 下面开始分情况讨论。

**情形 1**  $n_2(v) = 0$ , 则  $f_3(v) \leq 5$ 。

当  $f_3(v) = 5$ , 则  $f_5^+(v) = 3$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{3}{2} \times 5 - \frac{1}{3} \times 3 > 0$ 。当  $f_3(v) = 4$ , 则  $f_4(v) \leq 4$ 。若  $f_4(v) = 4$ , 则  $n_3(v) \leq 4$ , 所以至多有两个 4-面关联两个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{3}{2} \times 4 - 1 \times 2 - \frac{3}{4} \times 2 > 0$ 。若  $f_3(v) \leq 3$ , 则  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - \frac{3}{2} \times 3 - 1 \times 5 > 0$ 。

**情形 2**  $n_2(v) = 1$ , 则  $f_3(v) \leq 5$ 。

当  $f_3(v) = 5$ , 则  $f_5^+(v) = 3$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 1 - \frac{3}{2} \times 5 - \frac{1}{3} \times 3 > 0$ 。当  $f_3(v) = 4$ , 若  $v$  关联两个相邻的 3-面时, 则  $f_5^+(v) \geq 2$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 1 - \frac{3}{2} \times 4 - 1 \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 > 0$ 。若与  $v$  关联的 4 个 3-面两两不相邻, 则  $n_3(v) = 0$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 1 - \frac{3}{2} \times 1 - \frac{5}{4} \times 3 - \frac{3}{4} \times 4 > 0$ 。当  $f_3(v) \leq 3$ , 则  $f_5^+(v) \geq 1$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 1 - \frac{3}{2} \times 3 - 1 \times 4 - \frac{1}{3} \times 1 > 0$ 。

**情形 3**  $n_2(v) = 2$ , 则  $f_3(v) \leq 4$ 。

当  $f_3(v) = 4$ , 则  $f_5^+(v) = 4$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 2 - \frac{3}{2} \times 4 - \frac{1}{3} \times 4 > 0$ 。当  $f_3(v) = 3$ , 若  $v$  关联两个相邻的 3-面时, 则  $f_5^+(v) \geq 3$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 2 - \frac{3}{2} \times 3 - 1 \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 > 0$ 。若与  $v$  关联的 3-面两两不相邻, 则点  $v$  关联的 4-面至多关联一个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 2 - \frac{3}{2} \times 3 - \frac{3}{4} \times 4 - \frac{1}{3} \times 1 > 0$ 。当  $f_3(v) \leq 2$ , 则  $f_4(v) \leq 4$ , 所以  $ch'(v) \geq 2ch(v) - 6 - 2 - \frac{3}{2} \times 2 - 1 \times 4 - \frac{1}{3} \times 2 > 0$ 。

**情形 4**  $n_2(v)=3$ , 则  $f_3(v)\leq 3$ 。

当  $f_3(v)=3$ , 则  $f_5^+(v)\geq 2$ ,  $f_6^+(v)\geq 1$ ,  $f_4(v)\leq 2$ , 且点  $v$  关联的 4-面至多关联一个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-3-\frac{3}{2}\times 3-\frac{3}{4}\times 2-\frac{1}{3}\times 2>0$ 。当  $f_3(v)\leq 2$ , 则  $f_4(v)\leq 3$ , 若  $f_4(v)=3$ , 则与点  $v$  关联的 4-面中至少有一个四面至多关联一个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-3-\frac{3}{2}\times 2-1\times 2-\frac{3}{4}\times 1-\frac{1}{3}\times 3>0$ 。若  $f_4(v)\leq 2$ , 则  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-3-\frac{3}{2}\times 2-1\times 2-\frac{1}{3}\times 4>0$ 。

**情形 5**  $n_2(v)=4$ , 则  $f_3(v)\leq 2$ 。

当  $f_3(v)=2$ , 则  $f_4(v)\leq 4$ 。若  $f_4(v)=4$ , 则点  $v$  不与  $3^-$ -点相邻, 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-4-\frac{5}{4}\times 2-1\times 2-\frac{3}{4}\times 4>0$ 。若  $f_4(v)\leq 3$ , 则与点  $v$  关联的 4-面中至少有两个 4-面至多关联一个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-4-\frac{3}{2}\times 2-1-\frac{3}{4}\times 2-\frac{1}{3}>0$ 。

当  $f_3(v)=1$ , 则  $f_4(v)\leq 4$ , 且  $f_6^+(v)\geq 1$ 。若  $f_4(v)=4$ , 则  $f_6^+(v)=1$ , 且与点  $v$  关联的 4-面中至少有两个 4-面至多关联一个  $3^-$ -点, 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-4-\frac{3}{2}\times 1-1\times 2-\frac{3}{4}\times 2-\frac{1}{3}\times 2>0$ 。若  $f_4(v)\leq 3$ , 则  $f_6^+(v)\geq 1$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-4-\frac{3}{2}\times 1-1\times 3-\frac{1}{3}\times 3>0$ 。当  $f_3(v)=0$ , 则  $f_4(v)\leq 4$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-4-1\times 4-\frac{1}{3}\times 4>0$ 。

**情形 6**  $n_2(v)=5$ , 则  $f_3(v)\leq 2$ 。

当  $f_3(v)=2$ , 则  $f_4(v)=0$ , 且  $f_6^+(v)\geq 4$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-5-\frac{3}{2}\times 2-\frac{1}{3}\times 2>0$ 。

当  $f_3(v)=1$ , 则  $f_4(v)\leq 3$ , 且  $f_6^+(v)\geq 3$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-5-\frac{3}{2}\times 1-1\times 3-\frac{1}{3}>0$ 。

当  $f_3(v)=0$ , 则  $f_4(v)\leq 3$ , 且  $f_6^+(v)\geq 2$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-5-1\times 3-\frac{1}{3}\times 3>0$ 。

**情形 7**  $n_2(v)=6$ , 则  $4\leq f_6^+(v)\leq 5$ 。

当  $f_6^+(v)=4$ , 则  $f_3(v)=0$ , 且  $f_4(v)\leq 2$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-6-1\times 2-\frac{1}{3}\times 2>0$ 。

当  $f_6^+(v)=5$ , 则  $f_3(v)\leq 1$ , 且  $f_4(v)\leq 2$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-6-\frac{3}{2}\times 1-1\times 2>0$ 。

**情形 8**  $n_2(v)\geq 7$ , 则  $f_3(v)=0$ , 且  $f_4(v)\leq 3$ ,  $f_6^+(v)\geq 6$ , 所以  $ch'(v)\geq 2ch(v)-6-8-1-\frac{1}{3}>0$ 。

至此, 定理的证明完成。

## 基金项目

本课题由山东省自然科学基金: ZR2020MA045 资助。

## 参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.A. (1976) Graph Theory with Applications. MacaMillan, London, 1-197.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2_1)
- [2] Behzad, M. (1965) Graphs and Their Chromatic Numbers. Michigan State University, Michigan.
- [3] Vizing, V.G. (1968) Some Unsolved Problems in Graph Theory. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **23**, 117-134.  
<https://doi.org/10.1070/RM1968v023n06ABEH001252>

- [4] Kostochka, A.V. (1996) The Total Chromatic Number of Any Multigraph with Maximum Degree Five Is at Most Seven. *Discrete Mathematics*, **162**, 199-214. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(95\)00286-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00286-6)
- [5] Zhao, Y. (1999) On the Total Coloring of Planar Graphs Embeddable in Surfaces. *Narnia*, **60**, 333-341. <https://doi.org/10.1112/S0024610799007668>
- [6] Wang, H.J. and Liu, B. (2014) Total Coloring of Embedded Graphs with Maximum Degree at Least Seven. *Theoretical Computer Science*, **518**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.04.030>
- [7] 王颖. 嵌入到欧拉示性数非负曲面上的图的全染色[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东大学, 2014.
- [8] Wang, B. and Wu, J.L. (2018) Total Coloring of Embedded Graphs with No 3-Cycles Adjacent to 4-Cycles. *Discussions mathematicae Graph Theory*, **38**, 978-983. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2058>
- [9] Borodin, O.V. (1989) On the Total Coloring of Planar Graphs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **394**, 180-185. <https://doi.org/10.1515/crll.1989.394.180>
- [10] Hou, J.F. and Zhu, Y. (2008) Total Coloring of Planar Graphs without Small Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **24**, 91-100. <https://doi.org/10.1007/s00373-008-0778-8>
- [11] Wang, W.F. (2007) Total Chromatic Number of Planar Graphs with Maximum Degree Ten. *Graph Theory*, **54**, 91-102. <https://doi.org/10.1002/jgt.20195>
- [12] Kowalik, L. and Sereni, J.S. (2008) Total Coloring of Plane Graphs with Maximum Degree Nine. *Discrete Mathematics*, **22**, 1462-1479. <https://doi.org/10.1137/070688389>
- [13] 王慧娟. 可嵌入图的染色问题[D]: [博士学位论文]. 济南: 山东大学. 2015.