Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1585-1600
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118176

Hans汉斯

不含相邻短圈的平面图的点荫度问题

刘 星*，王慧娟†

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: xl_qdu@163.com, †sduwhj@163.com

收稿日期：2021年7月20日；录用日期：2021年8月20日；发布日期：2021年8月27日

摘 要

在社团网络的研究中，社团结构划分一直是一个有价值的研究课题。出于安全考虑，对一个新的社团结构划分问题进行研究，它可以在图论中转化为最小化问题。图G的点荫度是对G的点集进行顶点着色，使得每个颜色类的导出子图是G 的森林的最小颜色数，一般用符号$va(G)$表示。一般地，对于任意平面图 G ，$va(G) \leq 3$，且对任意非空图 G，$va(G) \geq 1$ 成立。显然，$va(G) = 1$当且仅当图G 是一个无圈图。对于某些特殊情况，如果图G是一个不含3-圈的平面图，$va(G) \leq 2$。**Raspaud** 和**Wang** 等人证明了如果图G是一个不含4-圈或不含5-圈的平面图，则$va(G) \leq 2$。此外，**Huang, Shui** 和**Wang** 等人证明了如果图G是一个不含7-圈的平面图，则$va(G) \leq 2$。在本文中，我们证明了如果图G是一个不含相邻的3-圈和4-圈的平面图，或者不含相邻的4-圈和5-圈的平面图，则$va(G) \leq 2$。

关键词

平面图，点荫度，相邻，圈

Vertex Arboricity Problem of Planar Graphs without Adjacent Short Cycles

Xing Liu*, Huijuan Wang†

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 刘星, 王慧娟. 不含相邻短圈的平面图的点荫度问题[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1585-1600.
DOI: 10.12677/pm.2021.118176

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: xl_qdu@163.com, †sduwhj@163.com

Received: Jul. 20^{th}, 2021; accepted: Aug. 20^{th}, 2021; published: Aug. 27^{th}, 2021

Abstract

In the research of social networks, social structure decomposition has always been a valuable research topic. For security reasons, we study a new social structure decomposition problem, which can be decomposed into a problem of minimization in graph theory. The vertex arboricity of a graph G, denoted by $va(G)$, is the minimum number of subsets such that the vertices of G can be colored and every color class induces an acyclic graph such as a forest of G. Normally, $va(G) \leq 3$ for every planar graph G and $va(G) \geq 1$ for every nonempty graph G. There is no doubt that $va(G) = 1$ if and only if G is an acyclic graph. For some special cases, it is known that $va(G) \leq 2$ if G is a planar graph without 3-cycles. Recently, Raspaud and Wang *et al.* proved that $va(G) \leq 2$ if G is a planar graph without 4-cycles or without 5-cycles. In addition, Huang, Shiu, and Wang showed that if G is a planar graph without 7-cycles, then $va(G) \leq 2$. In this paper, we prove that if G is a planar graph without adjacent 3-cycles and 5-cycles, or without adjacent 4-cycles and 5-cycles, then $va(G) \leq 2$.

Keywords

Planar Graph, Vertex Arboricity, Adjacent, Cycle

1. 引言

社团结构划分问题在社团网络研究中具有重要意义。例如文献 [1–9] 已经对其进行了许多的研究。本文考虑了一个新的社团结构划分问题。我们将所有社团参与者划分为不相交的群组，这样每个组都会触发一个连接的无环子网络。由于某些安全因素，我们需要考虑无圈性，无圈结构可以很容易地识别。无圈结构中的节点之间存在很强的相关性结构。从图论的角度，我们可以把这

个社团结构划分问题表述为一个最小化问题。

本文仅考虑有限、简单图。设G为平面图。我们使用符号 $V(G)$、$E(G)$和$F(G)$ 来分别表示图G的点集、图G的边集和图G的面集。设$\triangle(G)$和$\delta(G)$分别表示图G的最大度和图G 的最小度。长度为k的圈称为k-圈。我们称两个圈是相交的，如果这两个圈至少有一个公共顶点；称这两个圈相邻的，如果它们至少有一条公共边。

图G的无圈k染色是指从$V(G)$到k色集合的映射ψ，使得染同一种颜色的边的导出子图是无圈的。如果k是使得G 有一个无圈k 染色的最小整数，那么我们称k为G的点荫度，在本文中用$va(G)$表示。图的点荫度的概念是1968年首先由Chartrand 等人引入 [10]的，他们证明任意图G的点荫度$va(G) \leq \lceil \frac{1+\Delta(G)}{2} \rceil$，且对任意非空图$G$，$va(G) \geq 1$，当且仅当图$G$是无圈图，$va(G) = 1$。Chartrand 和Kronk [11]在1969年证明了对任意平面图G，$va(G) \leq 3$。一般地，如果图G是一个不含3-圈的平面图，则$va(G) \leq 2$。在文献 [12–15] 中证明了，如果图G是一个不含4-圈、5-圈、6-圈和7-圈的平面图，则$va(G) \leq 2$。2012年，Chen [16]等人研究了不含3-圈的平面图G 的点荫度$va(G) \leq 2$。在接下来的一年里，Huang 和Wang [17]证明了对于没有含弦6- 圈的平面图G的点荫度$va(G) \leq 2$。Cai [18]等人证明了对于不含相交5-圈的平面图G 的点荫度$va(G) \leq 2$。在同一年，文献 [19]说明了不含相交5-圈与6-圈的平面图G的点荫度$va(G) \leq 2$。文献 [20]表明对于平面图G，不含3-圈与4-圈或者3-圈与5-圈相交，则$va(G) \leq 2$。另外，还有部分相关的结果可从文献 [21–25] 中查看。

我们推广了文献 [12, 13]和 [15]的结果，得到以下结论。

定理 1.1 如果G是一个不含相邻3-圈与5-圈的平面图，那么$va(G) \leq 2$。

定理 1.2 如果G是一个不含相邻4-圈与5-圈的平面图，那么$va(G) \leq 2$。

2. 注释

为了描述方便，我们首先给出本文中将要使用的一些符号。设图G为平面图，对于图G中的顶点v，我们用$d(v)$表示v的度，即与v相邻的边数。满足$d(v) = k$ 的顶点称为k- 点，满足$d(v) \geq k$的顶点称为k^+-点，满足$d(v) \leq k$ 的顶点称为k^--点。同样，对于G中的面f，我们使用$d(f)$表示f的度，即f的边界长度。$d(f) = k$，称面f为k- 面；$d(f) \geq k$，称其为k^+-面；$d(f) \leq k$，称其为k^--面。

一个k-面，沿其边界顺时针方向入射连续顶点v_1,v_2,$\cdots$,v_k称$(v_1, v_2, \cdots, v_k)$-面或
$(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_k))$-面。对于面$f$，我们使用$f_k(f)$表示与$f$相邻的$k$面数，用$n_k(f)$以表示与$f$相邻的$k$-点入射的数目。对于顶点$v$，与$v$相邻的$k$-顶点数用 $n_k(v)$表示，与v相邻的i-面数用$f_i(v)$表示。对于面$(v_1, v_2, \cdots, v_k)$，用f_i表示与f有公共边v_iv_{i+1} 的面，$(i = 1,2,\cdots,k-1)$，我们用f_k表示与f有公共边v_kv_1的面。对于k-顶点v，我们使用$v_1, v_2, \cdots, v_k$表示与v顺时针相邻的k个连续顶点。然后用f_i表示vv_i 和vv_{i+1} $(i = 1,2,\cdots,k-1)$的入射面，用f_k表示vv_k 和vv_1的入射面。对于4-顶点，我们称v是特殊的，如果$f_3(v) = 1$和$f_{5^+}(v) = 3$。对于4-顶点v，我们称之为f_1与f_3在v 处相反，f_2与f_4在v处相反。

在本文的下列图形中，当绘制出其所有边时，顶点用•表示，当可能没有绘制出所有边时，顶点用◦表示。

DOI: 10.12677/pm.2021.118176

3. 最小反例的性质

现在我们通过反证法进行定理 0.1 和定理 0.2 的证明。首先假设定理 0.1 和定理 0.2 是错的。对于定理 0.1，设图G是一个顶点和边的和最少的极小反例，则$va(G)=3$。显然，图G是一个2连通图，即图G的任意两条边都位于一个公共圈上。现在我们给出图G的结构性质如下：

引理 3.1 [15] $\delta(G)\geq 4$。

引理 3.2 [15,17] 假设 3-面(v_1,v_2,v_3) 和 3-面(v_4,v_3,v_2) 相邻，它们有一个共同的边v_2v_3。如果$d(v_2)+d(v_3)\leq 9$，那么$d(v_1)+d(v_4)\geq 9$。

引理 3.3 [12] 设 f为 3-面，$n_4(f)=3$。如果有一个 k-圈 $(v_1,v_2,\cdots,v_k)$，其中$k\geq 4$，对于每个$i\in\{1,2,\cdots,k\}$满足$d(v_i)=4$，则$(v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 不与f相邻。

同样，对于定理 0.2，设图G是一个顶点和边的和最少的极小反例，图G的结构性质与定理 0.1 的图G 的结构性质相同。

4. 赋值

为证明定理 0.1 和定理 0.2，我们在本节中介绍赋值规则。设图G为平面图，对于图G的所有顶点和图G的所有面，我们定义了一个权值函数c。首先，我们给图G的每个顶点v 一个权值$c(v)=2d(v)-6$，以及每个面f权值$c(f)=d(f)-6$。众所周知：

$$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2 \tag{1}$$

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=\sum_{f\in F(G)} d(f)=2|E(G)| \tag{2}$$

通过欧拉公式得到图G的总权值是负的：

$$\sum_{v\in V(G)} c(v)+\sum_{f\in F(G)} c(f)=-12<0. \tag{3}$$

对于两个定理的证明，我们都是根据下面给出的赋值规则，给图G的所有顶点和面生成一个新的赋值函数c'，当赋值执行时，总和不变。即：

$$\sum_{v\in V(G)} c(v)+\sum_{f\in F(G)} c(f)=\sum_{v\in V(G)} c'(v)+\sum_{f\in F(G)} c'(f). \tag{4}$$

在下面，我们将证明这一点：

$$\sum_{v\in V(G)} c'(v)+\sum_{f\in F(G)} c'(f)\geq 0. \tag{5}$$

这样就导致矛盾存在，完成了对两个定理的证明。

在后面的论述中，符号 $\tau(v \to f)$ 表示v转移到f权值，其中 $v \in V(G)$，$f \in F(G)$。符号 $\tau(f \to f_1)$ 表示f转移到f_1的权值，其中 $f \in F(G)$，$f_1 \in F(G)$。

4.1. 定理 0.1 证明

对于定理 0.1 的赋值规则如下：

R1. 设定 v 是与面 f 相邻的 4-顶点。

1) $\tau(v \to f) = 1$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 2$。
2) $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 1$。
3) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。
4) $\tau(v \to f) = \frac{1}{5}$，如果 $d(f) = 5$。

R2. 设定 v 是与面 f 相邻的 5-顶点。

1) $\tau(v \to f) = \frac{4}{3}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 3$。
2) $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) \leq 2$。
3) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。
4) $\tau(v \to f) = \frac{1}{5}$，如果 $d(f) = 5$。

R3. 设定 v 是与面 f 相邻的 6^+-顶点。

1) $\tau(v \to f) = \frac{3}{2}$，如果 $d(f) = 3$。
2) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。
3) $\tau(v \to f) = \frac{1}{5}$，如果 $d(f) = 5$。

现在我们将证明图G的每个面f都有一个非负权值。首先很显然，图G的每个6^+-面都有一个非负权值。假设 $d(f) = 5$，则由 R1(4)，R2(4)和R3(3) 知 $c'(f) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$。假设 $d(f) = 4$，则由 R1(3)，R2(3)和R3(2) 知 $c'(f) = -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$。假设 $d(f) = 3$，则由 R1(1)-(2)，R2(1)-(2)和R3(1) 知 $c'(f) \geq -3 + 3 \times 1 \geq 0$。

接下来我们将证明图G的每个顶点v都有一个非负权值。假设 $d(v) = 4$。如果$f_3(v) = 2$，则通过 R1(1) 得到 $c'(v) = 2 - 2 \times 1 = 0$ 。如果$f_3(v) = 1$，则通过 R1(2)-(4) 得到 $c'(v) \geq 2 - \frac{3}{2} - max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\} \geq 0$ 。如果$f_3(v) = 0$, 则通过 R1(3)-(4) 得到 $c'(v) \geq 2 - 4 \times \frac{1}{2} \geq 0$。 $d(v) = 5$. 如果$f_3(v) = 3$, 则通过 R2(1) 得到 $c'(v) = 4 - \frac{4}{3} \times 3 = 0$。如果$f_3(v) = 2$, 则通过 R2(2)-(4) 得到 $c'(v) \geq 4 - 2 \times \frac{3}{2} - max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\} \geq 0$ 。如果$f_3(v) = 1$, 则通过 R2(2)-(4) 得到 $c'(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - max\{2 \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, 2 \times \frac{1}{5}\} \geq 0$。如果$f_3(v) = 0$, 则通过R2(3)-(4) 得到$c'(v) \geq 4 - max\{f_4(v) \times \frac{1}{2} + f_5(v) \times \frac{1}{5}\} \geq 0$。假设$d(v) = k^+ (k \geq 6)$。如果$k \geq 7$，则通过R3 我们知道$c'(v) > (2k-6) - max\{f_3(v) \times \frac{3}{2} + (k - f_3(v)) \times \frac{1}{2}\} \geq 0$ 。因此，我们只考虑$k = 6$。假设 $d(v) = 6$。如果$f_3(v) = 4$, 则通过 R3(1) 得到 $c'(v) = 6 - 4 \times \frac{3}{2} = 0$。如果$f_3(v) = 3$, 则通过 R3(1) 得到 $c'(v) = 6 - 3 \times \frac{3}{2} > 0$。如果$f_3(v) \leq 2$, 则通过 R3(1)-(3) 得到 $c'(v) \geq 6 - max\{f_3(v) \times \frac{3}{2} + f_4(v) \times \frac{1}{2} + f_5(v) \times \frac{1}{5}\} \geq 0$。

综上，我们证明了对所有 $v \in V(G)$ 和 $f \in F(G)$：$\sum c'(v) + \sum c'(f) \geq 0$。 这与通过欧拉公式得到的总权值是负的矛盾，故定理得证。

4.2. 定理 0.2 证明

在给出定理 0.2 的赋值规则之前，先介绍一个特殊的结构，此结构将在 $\mathrm{R}_v2(5)$-(7)中使用。如图 1 所示： $d(v) = 5$, $f_{5^+}(v) = 3$，$f_3(v) = 2$，且两个3-面不相邻。不失一般性，假设f_1，f_3，和f_4是5^+-面，f_2和f_5是3-面。如果$f_5(v) = 3$，v_4是一个4- 顶点，$f_3(v_4) = 1$，即与v_4入射的3-面必与f_3或f_4相邻，不失一般性，假设3-面与f_4相邻。

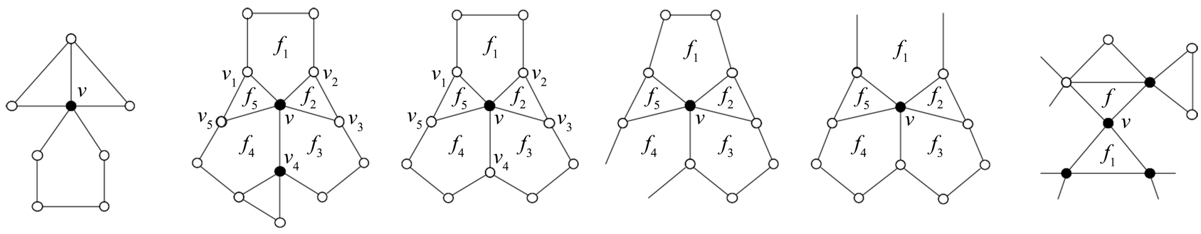

Figure 1. The discharging rules icon in Theorem 0.1
图 1. 定理0.2的一些赋值规则图示

定理0.2的赋值规则如下：

R_v1. 设 v 是与 f 相邻的 4-顶点。

1) $\tau(v \to f) = \frac{5}{6}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 2$，$f_5(v) = 0$。
2) $\tau(v \to f) = \frac{4}{5}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 2$，$f_5(v) \geq 1$。
3) $\tau(v \to f) = \frac{7}{6}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 1$，$f_4(v) = 1$。
4) $\tau(v \to f) = \frac{7}{5}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) = 1$，$f_4(v) = 0$。
5) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。
6) $\tau(v \to f) = \frac{1}{5}$，如果 $d(f) = 5$。
7) $\tau(v \to f) = \frac{1}{6}$，如果 $d(f) = 6^+$。

R_v2. 设 v 是与 f 相邻的 5-顶点。

1) $\tau(v \to f_1) = \frac{17}{15}$，$\tau(v \to f_2) = \frac{17}{15}$，$\tau(v \to f_3) = \frac{7}{5}$，如果$d(f_1) = d(f_2) = d(f_3) = 3$，$f_3(v) = 3$，$f_1$ 与 f_2 相邻，f_3 与 f_1 不相邻，f_3 与 f_2 不相邻。
2) $\tau(v \to f) = \frac{7}{5}$，如果 $d(f) = 3$，$f_3(v) \leq 2$。
3) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。
4) $\tau(v \to f) = \frac{3}{5}$，如果 $d(f) = 5$, $f_3(v) = 2$, 且两个 3-面相邻。
5) $\tau(v \to f_1) = \frac{3}{5}$, 如果 $d(f_1) = d(f_3) = d(f_4) = 5$, $f_5(v) = 3$, $f_3(v) = 2$, 两个 3-面不相邻。
   a) $\tau(v \to f_3) = \frac{1}{5}$，$\tau(v \to f_4) = \frac{2}{5}$，如果 f 是一个特殊的 4-面。
   b) $\tau(v \to f_3) = \frac{3}{10}$，$\tau(v \to f_4) = \frac{3}{10}$，如果 v_4 是一 5^+-顶点或 v_4 是一特殊 4-顶点。

6) $\tau(v \to f_1) = \frac{3}{5}$，$\tau(v \to f_3) = \frac{2}{5}$，如果 $d(f_1) = d(f_3) = 5$，$f_3(v) = 2$，两个 3-面不相邻，$f_5(v) = 2$，$f_{6^+}(v) = 1$，$d(f_4) = 6^+$，f_1 与f_3 不相邻。

7) $\tau(v \to f_3) = \frac{2}{5}$，$\tau(v \to f_4) = \frac{2}{5}$，如果 $d(f_3) = d(f_4) = 5$，$f_3(v) = 2$，两个 3-面不相邻，$f_5(v) = 2, f_{6^+}(v) = 1, d(f_1) = 6^+$，$f_3$ 与 f_4 相邻。

8) $\tau(v \to f) = \frac{3}{5}$，如果 $d(f) = 5, f_3(v) = 2$，两个 3-面不相邻，$f_5(v) = 1$。

9) $\tau(v \to f) = \frac{3}{5}$，如果 $d(f) = 5$ 且 $f_3(v) \le 1$。

10) $\tau(v \to f) = \frac{1}{6}$，如果 $d(f) = 6^+$。

$\mathbf{R}_v\mathbf{3}$. 设 v 是与 f 相邻的 6^+-顶点。

1) $\tau(v \to f) = \frac{7}{5}$，如果 $d(f) = 3$。

2) $\tau(v \to f) = \frac{1}{2}$，如果 $d(f) = 4$。

3) $\tau(v \to f) = \frac{3}{5}$，如果 $d(f) = 5$。

4) $\tau(v \to f) = \frac{1}{6}$，如果 $d(f) = 6^+$。

$\mathbf{R}_f\mathbf{1}$. 假定f_1是$(4,4,4)$-面，$f_3(f_1) = 0$， $d(f) = 3$，f与f_1在v点对立，f_1中除了v以外的两个顶点不是特殊的4-顶点，f中除了v以外两个顶点是5^+-顶点，或者两个都是特殊的4-顶点，或者一个是特殊的4 -顶点而另一个是5^+-顶点。

1) $\tau(f \to f_1) = \frac{1}{10}$，如果$f_3(f) = 1$，$f$中除了$v$以外两个顶点之一是5- 顶点，且与三个3-面相邻，另一顶点为5^+-顶点。

2) $\tau(f \to f_1) = \frac{3}{5}$，其他。

对于 3 -面 f (v_1,v_2,v_3)。用 f_1，f_2 和 f_3 来表示分别与 f 具有公共边 v_1v_2，v_2v_3 和 v_3v_1 的面。3 -面 f 是好的，如果满足：$-3+\tau(v_1 \to f)+\tau(v_2 \to f)+\tau(v_3 \to f) \ge 0$ 或 $-3+\tau(v_1 \to f)+\tau(v_2 \to f)+\tau(v_3 \to f)+\frac{1}{10} \ge 0$ (当f 满足$\mathrm{R}_f1(1)$ 时) 或 $-3+\tau(v_1 \to f)+\tau(v_2 \to f)+\tau(v_3 \to f)+\frac{3}{5} \ge 0$(当$f$ 满足$\mathrm{R}_f1(2)$时)或 $-3+\tau(v_1 \to f)+\tau(v_2 \to f)+\tau(v_3 \to f)+\tau(f_i \to f) \ge 0 (i \in 1,2,3)$ 或$-3+\tau(v_1 \to f)+\tau(v_2 \to f)+\tau(v_3 \to f)+\tau(f_i \to f)+\tau(f_j \to f) \ge 0$ $(i \ne j$ ，$ij \in 1,2,3)$。用 $n_g^3(f)$ 来表示与f相邻的好的3面的数目。用 n'_f 表示经入射顶点赋值后f的总权值数。

$\mathbf{R}_f\mathbf{2}$. $\tau(f \to f_1) = \frac{n'_f}{f_3(f)-n_g^3(f)}$，如果$f$是一个$6^+$-面，且$f$与$f_1$ 相邻，但f_1 不是一个好的 3-面。

$\mathbf{R}_f\mathbf{3}$. 设f是5面，$f_3(f)-n_g^3(f) > 0$，$n'_f > 0$

1) $\tau(f \to f') = n'_f$，如果$f_3(f)-n_g^3(f) = 1$，且f与f'相邻。但f'不是一个好的3-面。

2) $\tau(f \to f') = \frac{n'_f}{f_3(f)-n_g^3(f)}$，如果$f_3(f)-n_g^3(f) \ge 2$，且$f$ 与f'相邻，f'不是一个好的 3-面。

通过以上赋值规则，我们推导出下面引理。

引理 4.1 与5^+-顶点相邻的k^+-面至多有$k-2$ $(k \ge 6)$个不好的3-面。

证明： 设f是图G中的k-面$(k \ge 6)$。显然$n_{5^+}(f) = 1$。对于k-面f $k \ge 6$，用 v_i $(i \in \{1,2,\cdots k\})$表示沿f 顺时针入射的k个顶点。用 f_i $(i \in \{1,2,\cdots k\})$表示与f 有公共边v_iv_{i+1}，用 f_k表示与f有公共边v_kv_1。令 v_1是5^+-顶点。下面考虑三种可能性：

情形1. 假设$f_{4^+}(f) \geq 2$。显然，f至多与$k-2$个不是好的3-面相邻。

情形2. 假设$f_{4^+}(f) = 1$。找一个与f相邻的好的3-面。如果f_1是一4^+- 面，则通过 $\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$得到：$\tau(v_1 \to f_k) = \frac{7}{5}$。$f_k$是一个好的3-面。同样地,如果$f_k$是一个$4^+$-面，则$f_1$是一个好的3-面。如果$f_i$是$4^+$-面，$(i \in \{2,3,\cdots,k-1\})$，则通过 $\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和$\mathrm{R}_v3(1)$ 可得f_1和f_k中有一个是好的3-面。

情形3. 假设$f_{4^+}(f) = 0$。找两个与f相邻的3-面。如果v_1是6^+-顶点，则通过 $\mathrm{R}_v3(1)$ 令 $\tau(v_1 \to f_1) = \frac{7}{5}$和$\tau(v_1 \to f_k) = \frac{7}{5}$。显然，$f_1$和$f_k$是好的3-面。如果$v_1$是5-顶点，则讨论以下两种情况：

- $f_3(v_1) = 2$。则通过 $\mathrm{R}_v2(2)$ 令 $\tau(v_1 \to f_1) = \frac{7}{5}$ 和$\tau(v_1 \to f_k) = \frac{7}{5}$。$f_1$和$f_k$ 都是好的3面。

- $f_3(v_1) = 3$。不失一般性，通过 $\mathrm{R}_v2(1)$ 令$\tau(v_1 \to f_k) = \frac{7}{5}$ 和$\tau(v_1 \to f_1) = \frac{17}{15}$ 。显然，f_k是好的3-面，$f_{6^+}(f_1) = 2$，$f_3(f_1) = 1$。与f_1相邻的6^+-面除f以外赋值给f_1至少为$\frac{1}{4}$。因此，通过与f_1相邻的点赋值和除f以外的6^+-面赋值后f_1是好的。

综上，与5^+-顶点相邻的k^+-面至多有$k-2$ $(k \geq 6)$个不好的3-面。

引理 4.2 如果 $d(f) = 5$，则 $f_3(f) - n_g^3(f) \leq 5n'_f$。

证明： 令 $d(f) = 5$。对于5-面f, 我们用 v_1，v_2，v_3，v_4和v_5 表示顺时针与f相邻的顶点。f_i表示与f有公共边v_iv_{i+1} $(i \in \{1,2,3,4\})$，f_5表示与f有公共边v_5v_1。由引理 2.3 得知，如果f_i是3-面$(i \in \{1,2,3,4,5\})$ ，则$f_3(f_i) = 0$。显然，当$n_{5^+}(f) \geq 3$ 时，$5n'_f \geq 1 \geq f_3(f) - n_g^3(f)$。假设$n_4(f) = 5$。则通过 $\mathrm{R}_v1(6)$ 得到$n'_f = 0$。当$f_3(f) > 0$ 时，根据引理 2.2 得到，与f相邻的3-面中有一个5^+-顶点。因此，通过 $\mathrm{R}_v1(2)$，$\mathrm{R}_v1(4)$，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$，如果f_i是3-面$(i \in \{1,2,3,4,5\})$，则f_i是好的。因此$f_3(f) - n_g^3(f) = 0$。接下来考虑以下两种情形：

情形 1. 假设$n_{5^+}(f) = 1$。不失一般性，令v_1为与f相邻的5^+-顶点。考虑四种可能：

(1.1) $f_{5^+}(f) \geq 3$。$f_3(f) - n_g^3(f) = 0$，$n'_f \geq 0$。

(1.2) $f_{5^+}(f) = 2$。由对称性，我们只考虑六种情形。显然，$f_3(f) - n_g^3(f) = 0$。当$d(f_1) = d(f_i) \geq 5$ 或 $d(f_1) = d(f_i) \geq 5$，$i \in \{3,4\}$。同时$n'_f \geq 0$。因此，我们考虑以下两种可能：

1) $d(f_1) = d(f_5) \geq 5$。通过 $\mathrm{R}_v2(9)$和$\mathrm{R}_v3(3)$ 得到 $\tau(v_1 \to f) = \frac{3}{5}$，$f_3(f) - n_g^3(f) \leq 1$。因此$f_3(f) - n_g^3(f) \leq 1 < 5n'_f$。

2) $d(f_1) = d(f_2) \geq 5$。通过 $\mathrm{R}_v2(5)$-(9)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 令 $\tau(v_1 \to f) \geq \frac{1}{5}$。因此 $n'_f \geq 0$。显然，f_3和f_5都是好的3-面。如果f_4是一个好的3- 面，则$f_3(f) - n_g^3(f) = 0 \leq n'_f$。现在我们只需证明$f_4$是好的。令$f_i$是$(v_i, w_i, v_{i+1})$-面$(i \in \{3,4\})$ ，f_5是(v_5, w_3, v_1)-面。令s_i来表示与f在v_i $(i \in \{3,4,5\})$ 点处对立的面。假设w_3, w_4和w_5中至少有一个5^+-顶点。通过 $\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_f1(2)$ 得到 f_4 是好的。假设w_3, w_4 和w_5都是4- 顶点。则 $n_{5^+}(s_4) \geq 1$ ，$n_{5^+}(s_5) \geq 1$。s_1至多与$(d(s_1)-3)$个不好的3-面相邻，s_2至多与$(d(s_2)-3)$个不好的3-面相邻。很明显，当w_3，w_4和w_5中至少一个是特殊时f_4是好的。因此我们考虑w_1，w_2和w_3都不是特殊的。令h_1表示与f_4在w_4点对立的面。考虑以下两种可能:

- 如果$d(s_4) = d(s_5) \geq 6$，则通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(3)和R_f1-2 得 $-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(h_1 \to f_4) \geq \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{3}{5} \geq 0$ 或 $-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3} \geq 0$。因此，$f_4$是好的。

• 除w_4外, s_4和s_5至少有一个是5-面，如果h_1中有两个5^+-顶点或有两个特殊4-顶点或有一特殊4- 顶点和一5^+-顶点，通过 R_f3 得f_4是好的。现在我们仅考虑h_1中至多有一个5^+-顶点或至多有一个特殊4-顶点。如果s_4和s_5中一个是5-面，另一个是6^+-面, 则通过 $R_v1(1)$-(2) 和R_f2-3 得到$-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2} > 0$。如果$d(s_4)=d(s_5)=5$，当$f_3(s_4)-n_g^3(s_4) \leq 2$ 时 $f_3(s_5)-n_g^3(s_5) \leq 1$ 或当$f_3(s_5)-n_g^3(s_5) \leq 2$时 $f_3(s_4)-n_g^3(s_4) \leq 1$。因此，通过 $R_v1(1)$-(2)和R_f3 得到$-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq 0$。

(1.3) $f_{5^+}(f)=1$. 由对称性，我们仅考虑三种情形：$d(f_1) \geq 5$，$d(f_2) \geq 5$ 和$d(f_3) \geq 5$。

1) 假设$d(f_2) \geq 5$ 或$d(f_3) \geq 5$。通过 $R_v2(5)$-(9) 和$R_v3(3)$ 得到 $\tau(v_1 \to f) \geq \frac{3}{5}$，即：$5n'_f \geq 1$。通过 $R_v1(4)$，$R_v2(2)$和$R_v3(1)$ 得到 $f_3(f)-n_g^3(f) \leq 1$。因此 $f_3(f)-n_g^3(f) \leq 1 \leq 5n'_f$。

2) 假设$d(f_1) \geq 5$。通过 $R_v2(5)$-(9)和$R_v3(3)$ 得到 $\tau(v_1 \to f) \geq \frac{2}{5}$，即：$5n'_f \geq 1$。显然$f_2$和$f_5$都是好的3-面。如果$f_3$和$f_4$至少有一个好的3-面，则 $f_3(f)-n_g^3(f) \leq n'_f$。现在我们证明$f_3$和$f_4$至少一个是好的3-面。令$f_i$ 是(v_i, w_i, v_{i+1})-面$(i \in \{2,3,4\})$，f_5是(v_5, w_5, v_1)-面。s_i 表示与f在v_i $(i \in \{2,3,4,5\})$点处的对立面。假设 w_2，w_3，w_4和w_5至少一个是5^+-顶点，通过 $R_v2(2)$和$R_f1(2)$，得到f_3和f_4至少有一个是好的3-面。假设w_2，w_3，w_4和w_5都是4-顶点，则s_3，s_4和s_5中都至少有一个5^+-顶点。当w_2，w_3，w_4和w_5中至少有一个是特殊时，f_3和f_4 至少一个是好的。现在考虑w_2，w_3，w_4和w_5 都不是特殊的。h_i表示与f_i在w_i $(i \in \{3,4\})$ 点处的对立面。当s_3，s_4和s_5 至少两个是5- 面，除w_i $(i \in \{3,4\})$外，如果h_i中有两个5^+-顶点或 两个特殊的4-顶点或 一个特殊的4-顶点和一个5^+-顶点, 则f_i是好的。因此，如果s_1，s_2和s_3中至少两个是5-面。则只考虑h_3和h_4中至多一个5^+-顶点或 至多一个特殊4-顶点，有以下六种可能：

如果$d(s_3)=d(s_4)=5$，$s_5 \geq 6$，则通过 R_f2-3 令 $\tau(s_3 \to f_3) \geq \frac{2}{5}$，$\tau(s_4 \to f_3) \geq \frac{1}{5}$ 或 $\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{1}{2}$ ，$\tau(s_4 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$。同样地，如果$d(s_4)=d(s_5)=5$，$s_3 \geq 6$，则通过 R_f2-3 令 $\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{2}{5}$ ，$\tau(s_4 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$ 或 $\tau(s_3 \to f_3) \geq \frac{1}{2}$ ，$\tau(s_4 \to f_3) \geq \frac{1}{5}$。如果$d(s_3)=d(s_5)=5$，$s_4 \geq 6$，则通过 R_f2 令 $\tau(s_4 \to f_3) \geq \frac{1}{2}$ ，$\tau(s_4 \to f_4) \geq \frac{1}{2}$ ，通过 R_f3 令 $\tau(s_3 \to f_3) \geq \frac{1}{5}$ ，$\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$ 。因此，通过 $R_v1(2)$和R_f2–3 得到 $-3+\tau(v_3 \to f_3)+\tau(v_4 \to f_3)+\tau(w_3 \to f_3)+\tau(s_3 \to f_3)+\tau(s_4 \to f_3) \geq 0$ ，$-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq 0$，即：$f_3$和$f_4$都是好的。如果$d(s_3)=d(s_4)=d(s_5)=5$，则$s_3$和$s_4$ 中至少一个分别赋值给f_3和f_4至少$\frac{2}{5}$。则通过 $R_v1(2)$和R_f3 得到 $-3+\tau(v_3 \to f_3)+\tau(v_4 \to f_3)+\tau(w_3 \to f_3)+\tau(s_3 \to f_3)+\tau(s_4 \to f_3) \geq 0$ 或 $-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq 0$。如果$d(s_3)=d(s_5) \geq 6$，$s_4=5$，除$w_i$ $(i \in \{3,4\})$外，当h_i中两个5^+-顶点或 两个特殊4-顶点或 一个特殊4-顶点和一个5^+-顶点时，则f_i是好的。当h_3和h_4中至多一个5^+-顶点或 至多一个特殊的4-顶点时，s_3和s_5中至少一个分别赋值给f_3和f_4至少$\frac{1}{2}$。通过 R_f2 得到 $\tau(s_4 \to f_3) \geq \frac{1}{5}$ 或 $\tau(s_4 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$。如果$d(s_3)=d(s_4) \geq 6$ 或 $d(s_4)=d(s_5) \geq 6$，则通过 R_f2 得到 $\tau(s_4 \to f_3) \geq \frac{1}{4}$和$\tau(s_3 \to f_3) \geq \frac{1}{3}$ 或 $\tau(s_4 \to f_4) \geq \frac{1}{4}$和$\tau(s_5 \to f_4) \geq \frac{1}{3}$。通过 $R_v1(1)$-(2)和R_f2 得到 $-3+\tau(v_3 \to f_3)+\tau(v_4 \to f_3)+\tau(w_3 \to f_3)+\tau(s_3 \to f_3)+\tau(s_4 \to f_3) \geq 0$ 或 $-3+\tau(v_4 \to f_4)+\tau(v_5 \to f_4)+\tau(w_4 \to f_4)+\tau(s_4 \to f_4)+\tau(s_5 \to f_4) \geq 0$。综上，$f_3$和$f_4$至少一个是好的。

(1.4) $f_{5^+}(f)=0$. 通过 $\mathrm{R}_v2(4)$-(5)，$_v2(9)$，$\mathrm{R}_v2(11)$-(12)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 得到 $\tau(v_1\to f)=\frac{3}{5}$，即：$5n'_f=2$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$ 得到 f_1和f_5都是好的3-面。如果f_2，f_3和f_4至少一个是好的3-面，则 $f_3(f)-n^3_g(f)\le n'_f$。现在我们只需证明f_2,f_3和f_4至少一个是好的3-面。令f_i是(v_i,w_i,v_{i+1})-面$(i\in\{1,2,3,4\})$，f_5 是(v_5,w_5,v_1)-面。令s_i 来表示与f在v_i $(i\in\{2,3,4,5\})$点处的对立面。假设 w_1，w_2， w_3，w_4和w_5中至少有一个是5^+-顶点。通过 $\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_f1(2)$得到f_2，f_3和f_4至少一个是好的3- 面。假设w_1，w_2，w_3，w_4和w_5都是4-顶点。根据引理 2.3，s_2，s_3，s_4和s_5中都至少有一个5^+-顶点。显然，当w_1，w_2，w_3，w_4和w_5中至少一个是特殊时，则f_2，f_3和f_4中至少一个是好的3-面。现在我们仅考虑w_1，w_2， w_3，w_4和w_5都不是特殊时。令h_i来表示与f_i在w_i $(i\in\{2,3,4\})$ 点处的对立面有以下三种可能：

1) s_2，s_3，s_4 和s_5 至多一个6^+-面。除w_i $(i\in\{2,3,4\})$外，如果h_i 中有两个5^+-顶点或两个特殊4-顶点或一个特殊4-顶点和一个5^+-顶点，则f_i是好的。因此我们仅考虑h_i 中至多一个5^+-顶点或至多一个特殊4-顶点, $i\in\{2,3,4\}$。有以下两种可能：

- 假设s_2，s_3，s_4和s_5都是5-面，s_2和s_5至少一个分别赋值给f_2和f_4 至少$\frac{2}{5}$。通过 R_f2 令 $\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{5}$，$\tau(s_4\to f_4)\ge\frac{1}{5}$。因此，通过 $\mathrm{R}_v1(2)$和R_f3 得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2\to f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$ 或 $-3+\tau(v_4\to f_4)+\tau(v_5\to f_4)+\tau(w_4\to f_4)+\tau(s_4\to f_4)+\tau(s_5\to f_4)\ge 0$，即$f_2$，$f_3$和$f_4$至少一个是好的3-面。

- 假设s_2，s_3，s_4和s_5 之一是6^+-面。由对称性，仅考虑两种情形：$d(s_2)\ge 6$ 和 $d(s_3)\ge 6$。如果$d(s_2)\ge 6$，通过 R_f2-3，当$\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{2}$时，令 $\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{5}$；当$\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{3}$时，令 $\tau(s_5\to f_4)\ geq\frac{2}{5}$。通过 $\mathrm{R}_v1(2)$和R_f2–3，得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2\to f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$ or $-3+\tau(v_4\to f_4)+\tau(v_5\to f_4)+\tau(w_4\to f_4)+\tau(s_4\to f_4)+\tau(s_5\to f_4)\ge 0$，即：$f_2$ 是好的或 f_4是好的。因此，f_2，f_3和f_4至少一个是好的3-面。如果$d(s_3)\ge 6$，通过 R_f2-3，当$\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{2}$时，令 $\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{5}$ 或 当$\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{2}{5}$ 时，令 $\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{5}$ 或当$\tau(s_5\to f_4)\ge\frac{2}{5}$ 时，令 $\tau(s_4\to f_4)\ge\frac{1}{5}$。因此$f_2$，$f_3$和$f_4$至少一个是好的3-面。

2) s_2，s_3，s_4和s_5 中两个是6^+-面。同样地，我们仅考虑h_i $(i\in\{2,3,4\})$中至多一个5^+-顶点或 至多一个特殊4-顶点。由对称性，我们仅考虑四种情形：$d(s_2)=d(s_3)\ge 6$；$d(s_2)=d(s_4)\ge 6$；$d(s_2)=d(s_5)\ge 6$；$d(s_3)=d(s_4)\ge 6$。

- 假设$d(s_2)=d(s_3)\ge 6$。如果 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau<0$，则令 $\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{3}$，$\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{4}$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(3)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和R_f2 得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)\ge 0$ 或 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2\to f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$ ，即：f_2是好的。

- 假设$d(s_2)=d(s_4)\ge 6$。通过 R_f2-3，当$\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{2}$ 时，令 $\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{5}$，当$\tau(s_5\to f_4)=\frac{2}{5}$时，令 $\tau(s_4\to f_4)\ge\frac{1}{4}$，当$\tau(s_5\to f_4)=\frac{1}{5}$ 时，令 $\tau(s_4\to f_4)\ge\frac{1}{2}$ 。因此，通过 $\mathrm{R}_v1(2)$和R_f2-3得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2\to f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$ 或 $-3+\tau(v_4\to f_4)+\tau(v_5\to f_4)+\tau(w_4\to f_4)+\tau(s_4\to f_4)+\tau(s_5\to f_4)\ge 0$，即：$f_2$，$f_3$和$f_4$至少一个是好的3-面。

- 同样地，假设$d(s_2)=d(s_5)\ge 6$。通过 R_f2-3 令 $\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{2}$ 或 $\tau(s_5\to f_4)\ge\frac{1}{2}$。通过 $\mathrm{R}_v1(2)$和R_f2–3 得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2 f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$ 或

$-3+\tau(v_4\to f_4)+\tau(v_5\to f_4)+\tau(w_4\to f_4)+\tau(s_4\to f_4)+\tau(s_5\to f_4)\ge 0$。因此，$f_2$，$f_3$和$f_4$至少一个是好的3-面。

• 最后，假设$d(s_3)=d(s_4)\ge 6$。通过 R_f2，当$\tau(s_4\to f_3)=\frac{1}{4}$ 时，令 $\tau(s_3\to f_3)\ge\frac{1}{3}$。当$\tau(s_3\to f_3)=\frac{1}{4}$时，令 $\tau(s_4\to f_3)\ge\frac{1}{3}$。则通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(3)和R_f2得到 $-3+\tau(v_3\to f_3)+\tau(v_4\to f_3)+\tau(w_3\to f_3)+\tau(s_3\to f_3)+\tau(s_4\to f_3)\ge 0$，即：$f_3$是好的3-面。

3) s_2，s_3，s_4和s_5 中至少三个是6^+-面。考虑两种情形：$d(s_2)=d(s_3)\ge 6$和$d(s_4)=d(s_5)\ge 6$。假设$d(s_2)=d(s_3)\ge 6$。如果$-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)<0$，则令$\tau(s_2\to f_2)\ge\frac{1}{3}$，$\tau(s_3\to f_2)\ge\frac{1}{4}$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$–(3)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和R_f2得到 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)\ge 0$ 或 $-3+\tau(v_2\to f_2)+\tau(v_3\to f_2)+\tau(w_2\to f_2)+\tau(s_2\to f_2)+\tau(s_3\to f_2)\ge 0$，即：$f_2$是好的。同样地，假设$d(s_4)=d(s_5)\ge 6$，则$f_4$是好的。

情形 2. 假设$n_{5^+}(f)=2$。由对称性，仅考虑两种情形：两个5^+-顶点在同一条边，两个5^+-顶点不在同一条边。不失一般性，当两个5^+-顶点在同一条边时，令$d(v_1)=d(v_2)\ge 5$；当两个5^+-顶点不在同一条边时，令$d(v_1)=d(v_3)\ge 5$。

(2.1) $d(v_1)=d(v_2)\ge 5$。很明显，当$f_{5^+}(f)\ge 3$时，$f_3(f)-n_g^3(f)=0$，$n'_f\ge 0$。讨论以下三种可能:

1) 假设$f_{5^+}(f)=2$。由对称性，讨论六种情形：$d(f_1)=d(f_5)\ge 5$；$d(f_1)=d(f_4)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_3)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_4)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_5)\ge 5$；$d(f_3)=d(f_4)\ge 5$。如果$d(f_1)=d(f_5)\ge 5$；则通过 $\mathrm{R}_v2(4)$-(9)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 令 $\tau(v_1\to f)\ge\frac{3}{10}$，$\tau(v_2\to f)=\frac{3}{5}$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$得到 $f_3(f)-n_g^3(f)\le 1$。因此 $f_3(f)-n_g^3(f)\le 1<5n'_f$。否则，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$得到 $f_3(f)-n_g^3(f)=0$。故$f_3(f)-n_g^3(f)=0\le 5n'_f$。

2) 假设$f_{5^+}(f)=1$。由对称性，讨论三种情形：如果$d(f_3)\ge 5$，则令 $\tau(v_1\to f)=\frac{3}{5}$，$\tau(v_2\to f)=\frac{3}{5}$，$f_3(f)-n_g^3(f)=0$。如果$d(f_2)\ge 5$，通过 $\mathrm{R}_v2(4)$–(9)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 令 $\tau(v_1\to f)\ge\frac{2}{5}$，$\tau(v_2\to f)=\frac{3}{5}$，即：$5n'_f\ge 3$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$ 得 $f_3(f)-n_g^3(f)\le 1$ 。如果$d(f_1)\ge 5$，则通过 $\mathrm{R}_v2(4)$-(9) 和$\mathrm{R}_v3(3)$ 令 $\tau(v_1\to f)\ge\frac{3}{10}$，$\tau(v_2\to f)\ge\frac{3}{10}$，即：$5n'_f\ge 1$。我们知道$f_2$和$f_5$ 都是好的3-面。如果f_3和f_4至少一个是好的3-面时，$f_3(f)-n_g^3(f)\le n'_f$。现在我们仅需要证明f_3和f_4至少一个好的3-面。这与证明(1.3) 2)的情形1是类似的。同理可得，f_3和f_4至少一个是好的3-面。综上所述，$f_3(f)-n_g^3(f)<5n'_f$。

3) 假设$f_{5^+}(f)=0$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$，$\mathrm{R}_v2(4)$-(6)，$\mathrm{R}_v2(8)$-(9)和$\mathrm{R}_v3(1)$ 有$\tau(v_1\to f)=\frac{3}{5}$，$\tau(v_2\to f)=\frac{3}{5}$，$f_3(f)-n_g^3(f)\le 2$。故$f_3(f)-n_g^3(f)<5n'_f$。

(2.2) v_1和v_3是5^+度顶点。同样地，当$f_{5^+}(f)\ge 3$时，有$f_3(f)-n_g^3(f)=0$，$n'_f\ge 0$。讨论以下三种可能：

1) 假设$f_{5^+}(f)=2$。由对称性有六种情形：$d(f_1)=d(f_2)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_3)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_4)\ge 5$；$d(f_2)=d(f_5)\ge 5$；$d(f_3)=d(f_4)\ge 5$；$d(f_3)=d(f_5)\ge 5$。如果$d(f_2)=d(f_i)\ge 5(i\in\{3,4,5\})$，或 $d(f_3)=d(f_j)\ge 5(j\in\{4,5\})$，则通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(2)$和$\mathrm{R}_v3(1)$ 得 $f_3(f)-n_g^3(f)=0$。通过 $\mathrm{R}_v1(6)$，$\mathrm{R}_v2(4)$-(9)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 有 $\tau(v_i\to f)\ge\frac{1}{5}$ $(i\in\{1,2,3,4,5\})$。因此，$f_3(f)-n_g^3(f)=0\le 5n'_f$。现在仅考虑$d(f_1)=d(f_2)\ge 5$。通过 $\mathrm{R}_v2(4)$-(12)和$\mathrm{R}_v3(3)$ 有 $\tau(v_1\to f)\ge\frac{1}{5}$ ，$\tau(v_2\to$

$f) \geq \frac{1}{5}$。通过 $R_v1(1)$-(4)，$R_v2(2)$和$R_v3(1)$ 有 $f_3(f) - n_g^3(f) \leq 1$。下面将证明f_4是好的3- 面。

令f_3是(v_3, w_1, v_4)-面。f_4 是(v_4, w_2, v_5)-面，f_5是(v_5, w_3, v_1)- 面。令s_1表示与f在 v_4点处对立面。s_2 表示与f在v_5点处对立面。假设w_1, w_2和w_3至少一个5^+-顶点。通过 $R_v1(1)$-(2)，$R_v2(2)$和$R_f1(2)$得到f_4是好的3-面。假设w_1，w_2和w_3都是4-顶点。s_1 和s_2中都至少有一个5^+-顶点。当w_1，w_2和w_3至少一个是特殊时，f_4是好的。现在仅考虑w_1，w_2和w_3都不是特殊时。令h_1表示与f_4在w_2点处的对立面。除w_2外，当s_1和s_2至少一个是5-面时，如果h_1中有5^+-顶点，或者两个特殊的4-顶点，或者一个特殊4-顶点和一个5^+-顶点，则f_4是好的。因此，当s_1和s_2至少一个5-面时，仅考虑h_1中至多一个5^+-顶点或4-顶点。

如果s_1和s_2其中一个是5-面，另一个是6^+-面，则通过$R_v1(1)$-(2)和R_f2-3 得到 $-3 + \tau(v_4 \to f_4) + \tau(v_5 \to f_4) + \tau(w_2 \to f_4) + \tau(s_1 \to f_4) + \tau(s_2 \to f_4) \geq \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} > 0$，即：$f_4$是好的。如果$d(s_1) = d(s_2) = 5$，由引理 2.3 得，当$\tau(s_2 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$ 时，有 $\tau(s_1 \to f_4) \geq \frac{2}{5}$；或者当$\tau(s_1 \to f_4) \geq \frac{1}{5}$时，有 $\tau(s_2 \to f_4) \geq \frac{2}{5}$。通过 $R_v1(1)$-(2)和R_f3，有 $-3 + \tau(v_4 \to f_4) + \tau(v_5 \to f_4) + \tau(w_2 \to f_4) + \tau(s_1 \to f_4) + \tau(s_2 \to f_4) \geq 0$，即：$f_4$是好的。如果$d(s_1) = d(s_2) \geq 6$，通过 R_f2 有 $\tau(s_1 \to f_4) \geq \frac{1}{3}$，$\tau(s_2 \to f_4) \geq \frac{1}{3}$。通过 $R_v1(1)$-(3)和R_f2，有 $-3 + \tau(v_4 \to f_4) + \tau(v_5 \to f_4) + \tau(w_2 \to f_4) + \tau(s_1 \to f_4) + \tau(s_2 \to f_4) \geq 0$，即：$f_4$是好的。

2) 假设$f_{5^+}(f) = 1$。由对称性有三种情形：$d(f_2) \geq 5$；$d(f_3) \geq 5$；$d(f_4) \geq 5$。如果$d(f_3) \geq 5$ 或 $d(f_4) \geq 5$，通过 $R_v1(1)$-(4)，$R_v2(2)$和$R_v3(1)$ 得到 $f_3(f) - n_g^3(f) = 0$。因此，$f_3(f) - n_g^3(f) = 0 \leq 5n'_f$。如果$d(f_2) \geq 5$，则通过 $R_v1(1)$-(4)，$R_v2(2)$，$R_v2(4)$-(9)和$R_v3(1)$，得到 $f_3(f) - n_g^3(f) \leq 1$，$\tau(v_1 \to f) = \frac{3}{5}$，$\tau(v_2 \to f) \geq \frac{2}{5}$。3) 假设$f_{5^+}(f) = 0$。通过$R_v1(1)$-(4)，$R_v2(2)$，$R_v2(4)$–(9)和$R_v3(1)$，有$f_3(f) - n_g^3(f) \leq 1$，$\tau(v_1 \to f) = \frac{3}{5}$，$\tau(v_2 \to f) = \frac{3}{5}$。因此，$f_3(f) - n_g^3(f) \leq 5n'_f$。

综上所述，如果 f 是 G 的 5-面，则 $f_3(f) - n_g^3(f) \leq 5n'_f$。

现在我们证明G的每个面f都有非负的权值。令$d(f) \geq 6$。通过$R_v1(7)$，R $_v2(10)$，$R_v3(4)$和R_f2，有 $c'(f) \geq 0$。令$d(f) = 5$，由 $R_v1(6)$，$R_v2(4)$–(9)，$R_v3(3)$和引理 2.3 知，由点赋给5 面的权值至少为$\frac{1}{5}$，且$f_3(f) - n_g^3(f) \leq 5n'_f$。因此，$c'(f) \geq -1 + 5 \times \frac{1}{5} \geq 0$。令$f$是$G$的4-面，则通过 $R_v1(5)$，$R_v2(3)$和$R_v3(2)$，有 $c'(f) = -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$。

令$d(f) = 3$。对于3-面f，用v_1，v_2和v_3顺时针表示f的三个顶点。用f_1，f_2 和f_3分别表示与f有公共边v_1v_2，v_2v_3和v_3v_1的面。

情形 1. $n_4(f) = 3$。如图 2 所示，s_1与f在v_1点处对立，s_2与f在v_2点处对立，s_3与f在v_3点处对立。根据引理 2.3，$f_3(f) \leq 1$。f_1，f_2和f_3 中都至少有一个5^+-顶点。

(1.1) $f_3(f) = 0$。假设f至少与一个4^+-面对立。则通过 $R_v1(1)$-(4)和R_f2-3 有 $c'(f) \geq -3 + min\{\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{5}, \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{6} + \frac{1}{4}, \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{7}{6}, \frac{4}{5} + \frac{7}{5} + \frac{7}{6}, \frac{7}{6} + \frac{7}{6} + \frac{7}{6}\} \geq 0$ 假设f与三个3-面对立，即：s_1，s_2和s_3都是好的3-面。由引理 2.3 知$f_3(f) = 0$，$f_4(f) = 0$。讨论以下三种可能：

- 假设$f_5(f) \geq 2$。显然，$f_3(s_1) = 0$，$f_3(s_2) = 0$，$f_3(s_3) = 0$。如果s_1，s_2和s_3中至少一个有两个5^+-顶点，或者一个5^+-顶点和一个特殊的4-顶点，或者两个特殊的4-顶点，则通过 $R_v1(2)$，$R_f1(2)$和R_f3 有 $c'(f) \geq -3 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \geq 0$。否则，$f_1$，$f_2$和$f_3$至少有两个需要给$f$赋值。不失一般性，令$d(f_1) = d(f_2) = 5$，$d(f_3) \geq 5$。根据引理 3.1 和引理 3.2，得到$5^+$面给相邻的坏的3-

面赋值至少为$\frac{1}{5}$。如果$-3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\tau(f_2\to f)+\tau(f_3\to f)\geq 0$，则$f$对于$f_1$是好的；如果$-3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\tau(f_2\to f)+\tau(f_3\to f)<0$，则$f$ 对于f_1是坏的。根据引理 3.2有 $\tau(f_1\to f)\geq\frac{1}{5}$。因此，$-3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\tau(f_2\to f)+\tau(f_3\to f)+\tau(f_1\to f)\geq 0$。

• 假设$f_5(f)=1$，$f_{6^+}(f)=2$。不失一般性，令$d(f_1)=d(f_3)\geq 6$，$d(f_2)=5$。已知$f_3(s_1)\leq 1$。如果$f_3(s_1)=1$，则通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(2)和R_f1-3 得到 $c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+min\{\frac{3}{5},\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10},\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\}\geq 0$ 。如果$f_3(s_1)=0$，当s_1，s_2和s_3中至少一个有两个5^+-顶点，或者一个5^+-顶点和一个特殊4-顶点，或者两个特殊4-顶点时，通过 $\mathrm{R}_v1(2)$，$\mathrm{R}_f1(2)$和R_f3 有 $c'(f)\geq -3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\geq 0$。当$s_1$，$s_2$和$s_3$中有至多一个$5^+$- 顶点或 至多一个特殊4-顶点时，$f_i$ $(i\in\{1,2,3\})$需要给f赋值。因此，通过引理 3.1，引理 3.2，$\mathrm{R}_v1(1)$-(2)和R_f2-3，得到 $-3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\tau(f_1\to f)+\tau(f_3\to f)\geq 0$ 或者 $-3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\tau(f_2\to f)+\tau(f_3\to f)+\tau(f_1\to f)\geq 0$。

• 假设$f_{6^+}(f)=3$。通过引理 3.1和R_f1 得到 $\tau(f_i\to f)\geq\frac{1}{4}$ $i\in\{1,2,3\}$。故通过 $\mathrm{R}_v1(1)$和R_f2 得到 $c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geq 0$。

(1.2) $f_3(f)=1$。如图 2(b) 所示，假设$d(f_3)=3$，$d(s_1)=d(s_3)=d(f_1)=d(f_2)\geq 6$。如果$d(s_2)=3$，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$和R_f2有$c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geq 0$。如果$d(s_2)=4$，通过$\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v1(3)$和$\mathrm{R}_f2$ 有$c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\geq 0$。如果$d(s_2)\geq 5$，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$和$\mathrm{R}_v1(4)$有$c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{5}\geq 0$。

情形 2. $n_4(f)=2$，$n_{5^+}(f)=1$。不失一般性，令$d(v_3)\geq 5$。假设$f_3(f)=0$，根据 R_v2和R_v3，满足条件的5^+-顶点给3-面赋值为$\frac{7}{5}$。因此，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和$\mathrm{R}_v3(1)$ 有$c'(f)\geq -3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\geq 0$。假设$f_3(f)=1$，令$f_3$是3-面，如图 2(c) 所示，根据引理 2.3，$d(f_1)=d(f_2)\geq 6$。如果$d(v_3)=5$，v_3与三个3-面相邻，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v1(3)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(1)$和R_f2 得到$c'(f)\geq -3+\frac{5}{6}+\frac{17}{15}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\geq 0$。否则，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和R_v3 得到$c'(f)\geq -3+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\geq 0$。由对称性，$d(f_2)=3$与$d(f_3)=3$ 一样。现在仅考虑$d(f_1)=3$，如图 2(d) 所示，$d(f_2)=d(f_2)\geq 6$，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和$\mathrm{R}_v3(1)$ 得到$c'(f)\geq -3+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\geq 0$。

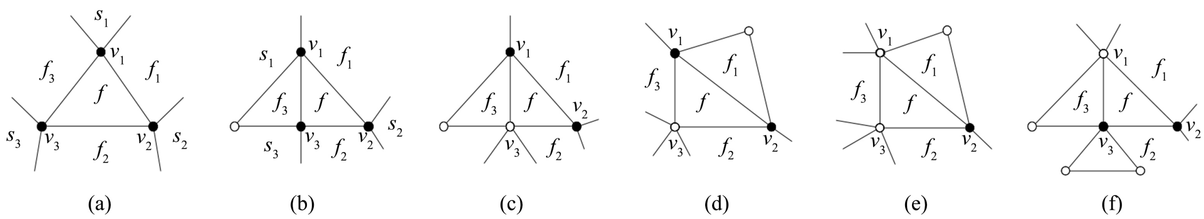

Figure 2. The configurations used in Theorem 0.2
图 2. 定理0.2的一些图

情形 3. $n_4(f)=1$，$n_{5^+}(f)=2$。不失一般性，令$d(v_2)=4$。假设$f_3(f)=0$，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)，$\mathrm{R}_v3(1)$和$\mathrm{R}_f1(2)$，有$c'(f)\geq -3+\frac{7}{5}+\frac{4}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\geq 0$。假设$f_3(f)=1$，令$d(f_1)=3$，如图 2(e) 所示，$d(f_2)=d(f_3)\geq 6$。通过 $\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)和$\mathrm{R}_v1(1)$ 有$c'(f)\geq -3+\frac{17}{15}+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}\geq 0$。由对称性，$d(f_2)=3$与$d(f_1)=3$一样。假设$d(f_3)=3$。如果$v_1$和$v_3$其中一个是5-顶点，且与三个3-面相邻，另一点是$5^+$-顶点，不失一般性，令$v_3$是如图 2(f) 所示的5-面，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v1(3)$-(4)，$\mathrm{R}_v2(1)$-(2)，$\mathrm{R}_v3(1)$和$\mathrm{R}_f1(1)$ 有$c'(f)\geq -3+\frac{17}{15}+\frac{17}{15}+\frac{5}{6}-\frac{1}{10}\geq 0$。否则，通过 $\mathrm{R}_v1(1)$，$\mathrm{R}_v1(3)$-(4)，

$R_v2(1)$-(2)，$R_v3(1)$和$R_f1(2)$ 有$c'(f) \geq -3+\frac{7}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5} \geq 0$。

情形 4. $n_{5^+}(f)=3$。通过 $R_v2(1)$-(2)和$R_v3(1)$ 有$c'(f) \geq -3+\frac{17}{15}+\frac{17}{15}+\frac{7}{5} \geq 0$。

现在我们证明G的每个点v有非负的权值。

令$d(v)=4$。通过引理 2.2 有 $f_3(v) \leq 2$。如果$f_3(v)=2$，通过 $R_v1(1)$-(2)和$R_v1(6)$-(7) 有$c'(v) \geq 2-max\{2\times\frac{4}{5}+2\times\frac{1}{5}, 2\times\frac{5}{6}+2\times\frac{1}{6}, 2\times\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\} \geq 0$。如果$f_3(v)=1$，通过 $R_v1(3)$-(7) 有$c'(v) \geq 2-max\{\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+2\times\frac{1}{6}, \frac{7}{5}+f_5(v)\times\frac{1}{5}+f_{6^+}(v)\times\frac{1}{6}\} \geq 0$。如果$f_3(v)=0$，通过 $R_v1(5)$-(7)，有$c'(v) \geq 2-max\{f_4(v)\times\frac{1}{2}+f_5(v)\times\frac{1}{5}+f_{6^+}(v)\times\frac{1}{6}\} \geq 0$。

令$d(v)=5$。通过引理 2.2 有 $f_3(v) \leq 3$。如果$f_3(v)=3$。通过 $R_v2(1)$ 有$c'(v) \geq 4-\frac{17}{15}-\frac{17}{15}-\frac{7}{5}-2\times\frac{1}{6} \geq 0$。如果$f_3(v)=2$，且两个3-面相邻，通过 $R_v2(4)$ 有$c'(v) \geq 4-max\{2\times\frac{7}{5}+2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}, 2\times\frac{7}{5}+2\times\frac{1}{6}+\frac{3}{5}, 2\times\frac{7}{5}+3\times\frac{1}{6}\} \geq 0$。如果两个3-面不相邻，根据 $R_v2(5)$-(8) 讨论以下几种情形：通过 $R_v2(2)$ 和$R_v2(5)1$，$c'(v)=4-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}-2\times\frac{7}{5}=0$；通过 $R_v2(2)$ 和$R_v2(5)2$，$c'(v)=4-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}-\frac{3}{10}-2\times\frac{7}{5}=0$；通过 $R_v2(2)$ 和$R_v2(6)$，有 $c'(v) \geq 4-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}-2\times\frac{7}{5} \geq 0$；通过 $R_v2(2)$ 和$R_v2(7)$，有 $c'(v) \geq 4-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{6}-2\times\frac{7}{5} \geq 0$；通过 $R_v2(2)$ 和$R_v2(8)$，有 $c'(v) \geq 4-\frac{3}{5}-2\times\frac{1}{6}-2\times\frac{7}{5} \geq 0$。如果$f_3(v)=1$，通过 $R_v2(2)$-(3)和$R_v2(9)$-(10)，有$c'(v) \geq 4-\frac{7}{5}-max\{f_4(v)\times\frac{1}{2}+f_5(v)\times\frac{3}{5}+f_{6^+}(v)\times\frac{1}{6}\} \geq 0$。如果$f_3(v)=0$。通过 $R_v2(3)$和$R_v2(9)$-(10)，有$c'(v) \geq 4-max\{f_4(v)\times\frac{1}{2}+f_5(v)\times\frac{3}{5}+f_{6^+}(v)\times\frac{1}{6}\} \geq 0$。

令$d(v)=k(k \geq 6)$。通过 R_v3 得，如果$k \geq 7$ ，则$c'(v) > (2k-6)-max\{f_3(v)\times\frac{7}{5}+(k-f_3(v))\times\frac{3}{5}\} \geq 0$。因此仅考虑$k=6$。如果$k=6$，有$f_3(v) \leq 4$。如果$f_3(v)=4$，通过 $R_v3(1)$和$R_v3(4)$ $c'(v)=6-4\times\frac{7}{5}-2\times\frac{1}{6} \geq 0$。如果$f_3(v) \leq 3$，通过 R_v3 有$c'(v) \geq 6-max\{f_3(v)\times\frac{7}{5}+f_4(v)\times\frac{1}{2}+f_5(v)\times\frac{3}{5}+f_{6^+}(v)\times\frac{1}{6}\} \geq 0$

至此，我们证明了对所有的 $v \in V(G)$ 和 $f \in F(G)$ 都满足 $\sum c'(v)+\sum c'(f) \geq 0$。这与通过欧拉公式得到的总权值是负的矛盾，故定理得证。

综上，我们完成了对定理 0.1和定理 0.2的证明。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2020MA045)。

参考文献

[1] Yang, J, McAuley, J. and Leskovec, J. (2013) Community Detection in Networks with Node Attributes. *2013 IEEE 13th International Conference on Data Mining*, Dallas, TX, 7-10 December 2013, 1151-1156. https://doi.org/10.1109/ICDM.2013.167

[2] Bi, Y.J., Wu, W.L., Zhu, Y.Q., Fan, L.D. and Wang, A.L. (2014) A Nature-Inspired Influence Propagation Model for the Community Expansion Problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, **28**, 513-528. https://doi.org/10.1007/s10878-013-9686-9

[3] Lancichinetti, A. and Fortunato, S. (2009) Community Detection Algorithms: A Comparative Analysis. *Physical Review E*, **80**, Article ID: 056117. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.056117

[4] Wagenseller, P., Wang, F. and Wu, W.L. (2018) Size Matters: A Comparative Analysis of Community Detection Algorithms. *IEEE Transactions on Computational Social Systems*, **5**, 951-960. https://doi.org/10.1109/TCSS.2018.2875626

[5] Chen, G. and Wang, Y. (2011) Community Detection in Complex Networks Using Extremal Optimization Modularity Density. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, **39**, 82-85.

[6] Tong, G.M., Cui, L., Wu, W.L., Liu, C. and Du, D.Z. (2016) Terminal-Set-Enhanced Community Detection in Social Networks. *The 35th Annual IEEE International Conference on Computer Communications*, San Francisco, CA, 10-14 April 2016, 1-9. https://doi.org/10.1109/INFOCOM.2016.7524473

[7] Lu, Z.X., Wu, W.L., Chen, W.D., Zhong, J.F., Bi, Y.J. and Gao, Z. (2013) The Maximum Community Partition Problem in Networks. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **5**, Article ID: 1350031. https://doi.org/10.1142/S1793830913500316

[8] Chartrand, G., Kronk, H.V. and Wall, C.E. (1968) The Point-Arboricity of a Graph. *Israel Journal of Mathematics*, **6**, 169-175. https://doi.org/10.1007/BF02760181

[9] Chartrand, G. and Kronk, H.V. (1969) The Point-Arboricity of Planar Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **44**, 612-616. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-44.1.612

[10] Fortunato, S. and Hric, D. (2016) Community Detection in Networks: A User Guide. *Physics Reports*, **659**, 1-44. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.09.002

[11] Wang, L., Wang, J., Bi, Y.J., Wu, W.L., Xu, W. and Lian, B. (2014) Noise-Tolerance Community Detection and Evolution in Dynamic Social Networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, **28**, 600-612. https://doi.org/10.1007/s10878-014-9719-z

[12] Raspaud, A. and Wang, W. (2008) On the Vertex-Arboricity of Planar Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 1064-1075. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2007.11.022

[13] Wang, W. and Lin, K.W. (2002) Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 561-565. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(02)80007-6

[14] Fijavž, G., Juvan, M., Mohar, B. and Škrekovski, R. (2002) Planar Graphs without Cycles of Specific Lengths. *European Journal of Combinatorics*, **23**, 377-388. https://doi.org/10.1006/eujc.2002.0570

[15] Huang, D., Shui, W.C. and Wang, W. (2012) On the Vertex-Arboricity of Planar Graphs without 7-Cycles. *Discrete Mathematics*, **312**, 2304-2315. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.03.035

[16] Chen, M., Raspaud, A. and Wang, W. (2012) Vertex-Arboricity of Planar Graphs without Intersecting Triangles. *European Journal of Combinatorics*, **33**, 905-923. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2011.09.017

[17] Huang, D. and Wang, W.F. (2013) Vertex-Arboricity of Planar Graphs without Chordal 6-Cycles. *International Journal of Computer Mathematics*, **90**, 258-272. https://doi.org/10.1080/00207160.2012.727989

[18] Cai, H., Wu, J. and Sun, L. (2018) Vertex Arboricity of Planar Graphs without Intersecting 5-Cycles. *Journal of Combinatorial Optimization*, **35**, 365-372. https://doi.org/10.1007/s10878-017-0168-3

[19] Chen, H.L., Teng, W.S., Wang, H.J. and Gao, H.W. (2018) Vertex Arboricity of Planar Graphs without 5-Cycles Intersecting with 6-Cycles. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*, **5**, 322-327.

[20] Teng, W.S., Wang, H.J., Chen, H.L. and Liu, B. (2019) Social Structure Decomposition with Security Issue. *IEEE Access*, **7**, 82785-82793. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2924052

[21] Choi, I. and Zhang, H. (2014) Vertex Arboricity of Toroidal Graphs with a Forbidden Cycle. *Discrete Mathematics*, **333**, 101-105. https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.06.011

[22] Tao, F.Y. and Lin, W.S. (2016) On the Equitable Vertex Arboricity of Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 844-853. https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1023794

[23] Yang, A.F. and Yuan, J. (2007) On the Vertex Arboricity of Planar Graphs of Diameter Two. *Discrete Mathematics*, **307**, 2438-2447. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.10.017

[24] Guo, Z., Zhao, H. and Mao, Y. (2015) On the Equitable Vertex Arboricity of Complete Tripartite Graphs. *Discrete Mathematics Algorithms and Applications*, **7**, 225-243. https://doi.org/10.1142/S1793830915500561

[25] Cui, X.Y., Teng, W.S., Liu, X. and Wang, H.J. (2020) A Note of Vertex Arboricity of Planar Graphs without 4-Cycles Intersecting with 6-Cycles. *Theoretical Computer Science*, **836**, 53-58. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2020.06.009