Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1639-1642
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119181

高等代数中根子空间分解定理的一个推广

周　洁，游兴中*

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙
Email: *xzyou2003@126.com

收稿日期：2021年8月7日；录用日期：2021年9月8日；发布日期：2021年9月15日

摘　要

本文给出了高等代数中根子空间分解定理的一个推广及其在矩阵的秩问题中的应用。

关键词

根子空间分解，核，直和，秩

A Generalization of the Theorem of Roots Subspace Decomposition in Higher Algebra

Jie Zhou, Xingzhong You*

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan
Email: *xzyou2003@126.com

Received: Aug. 7th, 2021; accepted: Sep. 8th, 2021; published: Sep. 15th, 2021

Abstract

We give a generalization of the theorem of roots subspace decomposition in Higher Algebra and its application in the rank problem of matrix in this paper.

Keywords

Root Subspace Decomposition, Kernel, Direct Sum, Rank

*通讯作者。

文章引用: 周洁, 游兴中. 高等代数中根子空间分解定理的一个推广[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1639-1642.
DOI: 10.12677/pm.2021.119181

1. 引言

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$L(V)$ 是 V 的所有线性变换构成的线性空间，ε 为 V 的恒等变换，P^n 是数域 P 上所有 n 维列向量构成的线性空间，$P^{n\times n}$ 是数域 P 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间，E 为 n 阶单位矩阵，$P[\lambda]$ 为数域 P 上文字 λ 的一元多项式环。对 $M\in P^{n\times n}$，$r(M)$ 表示矩阵 M 的秩，对 $A\in L(V)$，$\ker A=\{\xi\in V\mid A\xi=0\}$ 表示线性变换 A 的核。

一个线性空间在什么条件下能分解为其不变子空间的直和是线性空间的研究中很有意义的问题，在矩阵论中有重要的应用。例如，文献[1]证明了：在对称变换、反对称变换、正交变换、规范变换下，欧氏空间可分解为两两正交的 1 维和 2 维循环子空间的直和，从而得到欧氏空间的这些变换的正交相似标准型。文献[2]给出了下面线性空间的根子空间分解定理：

定理 12 设线性变换 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$，它可分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则 V 可分解成不变子空间的直和

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

其中 $V_i=\left\{\xi\in V\mid (A-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}\xi=0\right\}$，$i=1,2,\cdots,s$。

在文献[2]中，定理 12 的证明分四步完成，过程相对复杂，文献[3]简化了定理 12 的证明并做了推广，得到了只要当 $f(A)=0$ 时定理 12 即可成立。本文采用完全不同于文献[2] [3]的证明方法，给出定理 12 的一个更一般的推广，得到下面的定理 1，同时给出定理 1 在矩阵的秩问题中的应用。

定理 1 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$A\in L(V)$，$f(\lambda),f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_s(\lambda)\in P[\lambda]$，且 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$，令 $W=\ker f(A)$，$W_i=\ker f_i(A)$，$i=1,\cdots,s$。若 $f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_s(\lambda)$ 两两互素，则有直和分解 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$。

2. 定理 1 的证明

证 因为 $Af(A)=f(A)A$，$Af_i(A)=f_i(A)A$，$i=1,2,\cdots,s$，所以 W,W_i 是 V 的 A 不变子空间。

若 $\alpha\in W_i$，$i=1,2,\cdots,s$，则 $f_i(A)\alpha=0$，于是

$$f(A)\alpha=f_1(A)\cdots f_s(A)\alpha=f_1(A)\cdots f_{i-1}(A)f_{i+1}(A)\cdots f_s(A)f_i(A)\alpha=0,$$

因此 $\alpha\in W$，即 W_i 是 W 的子空间。

下面对 s 用数学归纳法证明结论成立。

当 $s=2$ 时，由 $(f_1(\lambda),f_2(\lambda))=1$ 得存在 $u(\lambda),v(\lambda)\in P[\lambda]$ 使得

$$u(\lambda)f_1(\lambda)+v(\lambda)f_2(\lambda)=1.$$

故

$$u(A)f_1(A)+v(A)f_2(A)=\varepsilon.$$

于是对任意 $\alpha\in W$，有

$$\alpha = u(A) f_1(A)\alpha + v(A) f_2(A)\alpha \tag{1}$$

令 $\alpha_1 = v(A) f_2(A)\alpha$，$\alpha_2 = u(A) f_1(A)\alpha$，则 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。由 $\alpha \in W$ 得 $f(A)\alpha = 0$。于是 $f_1(A)\alpha_1 = f_1(A)v(A) f_2(A)\alpha = v(A) f_1(A) f_2(A)\alpha = v(A) f(A)\alpha = 0$，故 $\alpha_1 \in W_1$。同理可得 $\alpha_2 \in W_2$。于是 $W = W_1 + W_2$。

任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2$，则 $f_1(A)\alpha = f_2(A)\alpha = 0$，于是由(1)式可得 $\alpha = 0$，即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$，因此 $W = W_1 \oplus W_2$。

假定结论对 $s-1$ 的情形成立，则对 s 的情形，令 $g(\lambda) = f_1(\lambda)\cdots f_{s-1}(\lambda)$，于是 $f(\lambda) = g(\lambda) f_s(\lambda)$，且由 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)$ 两两互素可知 $g(\lambda)$ 与 $f_s(\lambda)$ 互素。令 $U = \ker g(A)$，则由归纳假设可得

$$U = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_{s-1}.$$

另一方面，由 $s = 2$ 的情形可得 $W = U \oplus W_s$。于是 $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$。

显然，若 $f(\lambda)$ 有标准分解式 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}$，则当 $f(A) = 0$ 时，$W = V$，特别地，当 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式时，W_i 是 A 的属于特征值 λ_i 的根子空间，因此定理 1 是定理 12 及文献[3]中相应结果的推广，且证明更简洁一些。

3. 定理 1 的应用

从矩阵的观点可以得到定理 1 的等价形式。

定理 2 设 $M \in P^{n\times n}$，$f(\lambda), f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda) \in P[\lambda]$，满足 $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$，且 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)$ 两两互素，则

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

其中 $U = \{x \in P^n \mid f(M)x = 0\}$，$U_i = \{x \in P^n \mid f_i(M)x = 0\}$，$i = 1, \cdots, s$。

证 令 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，由 $L(V)$ 与 $P^{n\times n}$ 同构可得有 $A \in L(V)$ 使得 A 与 M 对应。沿用定理 1 中的记号，由 V 与 P^n 同构可得 W 与 U 同构，W_i 与 U_i 同构，于是由定理 1 得定理 2 成立。

推论 1 设 $M \in P^{n\times n}$，$f(\lambda), f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda) \in P[\lambda]$，满足 $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$，且 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)$ 两两互素，则

$$r(f_1(M)) + r(f_2(M)) + \cdots + r(f_s(M)) - r(f(M)) = n(s-1).$$

特别地，$f(M) = 0$ 的充分必要条件是 $r(f_1(M)) + r(f_2(M)) + \cdots + r(f_s(M)) = n(s-1)$。

证 令 $U = \{x \in P^n \mid f(M)x = 0\}$，$U_i = \{x \in P^n \mid f_i(M)x = 0\}$，$i = 1, \cdots, s$。由定理 2 得

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

于是

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_s.$$

因为 $\dim U = n - r(f(M))$，$\dim U_i = n - r(f_i(M))$，$i = 1, \cdots, s$，所以

$$n - r(f(M)) = n - r(f_1(M)) + n - r(f_2(M)) + \cdots + n - r(f_s(M)).$$

故

$$r(f_1(M)) + r(f_2(M)) + \cdots + r(f_s(M)) - r(f(M)) = n(s-1).$$

显然，$f(M) = 0$ 当且仅当 $r(f(M)) = 0$，$r(f(M)) = 0$ 当且仅当

$$r(f_1(M)) + r(f_2(M)) + \cdots + r(f_s(M)) = n(s-1).$$

故 $f(M) = 0$ 的充分必要条件是 $r(f_1(M)) + r(f_2(M)) + \cdots + r(f_s(M)) = n(s-1)$。

例 1 设 M 是 n 阶矩阵，证明：

1) $M^2 = E$ 的充分必要条件是 $r(M+E)+r(M-E)=n$。

2) $M^2 = M$ 的充分必要条件是 $r(M)+r(M-E)=n$。

证 只需证明(1)，证明(2)的方法是类似的。

因为 $M^2-E=(M+E)(M-E)$，所以令 $f(\lambda)=\lambda^2-1$，$f_1(\lambda)=\lambda-1$，$f_2(\lambda)=\lambda+1$，则 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$，且 $f_1(\lambda),f_2(\lambda)$ 互素，于是由推论 1 可得 $M^2=E$，即 $M^2-E=0$ 的充分必要条件是 $r(M+E)+r(M-E)=n$。

需要指出的是，文献[2]的第四章补充题第 3 题和第 4 题只要求证明例 1 中(1)和(2)的必要性，这里说明了充分性也成立。

基金项目

2020 湖南省普通高等学校教学改革研究项目(HNJG-2020-0276)。

参考文献

[1] 张新发. 欧氏空间的典型变换的循环子空间[J]. 大学数学, 2020, 36(3): 95-100.

[2] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 王萼芳, 石生明, 修订. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] 谭玉明. 关于高等代数中根子空间分解定理的教学[J]. 大学数学, 2012, 28(2): 142-154.