Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1643-1648
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119182

Hans汉斯

从指数权Bergman空间A^p_ψ到Bloch空间的Volterra积分算子

施业成，王尔敏*

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江
Email: 09ycshi@sina.cn, *wem0913@sina.com

收稿日期：2021年8月8日；录用日期：2021年9月10日；发布日期：2021年9月17日

摘 要

本论文主要讨论从指数权Bergman空间A^p_ψ到Bloch空间的Volterra积分算子的有界性和紧性刻画。

关键词

指数权Bergman空间，Bloch空间，Volterra型算子，有界性

Volterra Type Operators from Bergman Spaces with Exponential Weights to the Bloch Space

Yecheng Shi, Ermin Wang*

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong
Email: 09ycshi@sina.cn, *wem0913@sina.com

Received: Aug. 8th, 2021; accepted: Sep. 10th, 2021; published: Sep. 17th, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 施业成, 王尔敏. 从指数权Bergman空间A^p_ψ到Bloch空间的Volterra积分算子[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1643-1648. DOI: 10.12677/pm.2021.119182

Abstract

We consider the boundedness and compactness of Volterra type operators from the Bergman spaces with exponential weights to the Bloch Space.

Keywords

Bergman Spaces with Exponential Weights, Bloch Space, Volterra Type Operators, Boundedness

1. 引言

设$\mathbb{D}$是复平面$\mathbb{C}$上的单位圆盘, $H(\mathbb{D})$是$\mathbb{D}$上解析函数的全体. ψ是$\mathbb{D}$上的次调和函数, 当$0 < p < \infty$时,指数权Bergman空间A^p_ψ定义为:

$$A^p_\psi = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{A^p_\psi} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)e^{-\psi(z)}|^p dA(z) < \infty\}.$$

令C_0 表示$\mathbb{D}$ 上满足$\lim_{|z|\to 1} \rho(z) = 0$的所有连续函数$\rho$构成的空间. 记$\mathcal{L}$为

$$\mathcal{L} = \{\rho : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+ : \|\rho\|_{\mathcal{L}} = \sup_{z,w\in\mathbb{D},z\neq w} \frac{|\rho(z) - \rho(w)|}{|z - w|} < \infty, \rho \in C_0\}.$$

$\mathcal{L}_0$是$\mathcal{L}$中满足条件：对任意的$\epsilon > 0$,存在紧集$E \subset \mathbb{D}$,使得$|\rho(z) - \rho(w)| < \epsilon|z - w|$,其中$z, w \in \mathbb{D}\backslash E$. 记权集合为

$$\mathcal{W}_0 = \{\psi \in C^2 : \Delta\psi > 0, \text{且}\exists\rho \in \mathcal{L}_0\text{使得}\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}} \asymp \rho\},$$

其中Δ为Laplace算子, 这里$a \asymp b$表示存在常数$C > 0$使得$C^{-1}b \le a \le Cb$. 权$\mathcal{W}_0$是最近由Hu, Lv, Schuster提出的, 相关研究见 [1]及其引用文献.

Bloch空间$\mathcal{B}$是由$\mathbb{D}$ 上满足条件

$$||f||_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

的解析函数f组成的集合.

设$g \in H(\mathbb{D})$,定义Volterra积分算子T_g为

$$T_g f(z) = \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta, \;\; f \in H(\mathbb{D}).$$

Pommerenke [2]在1977首先研究了积分算子T_g在Hardy空间H^2的有界性问题.在此之后,许多学者研究了其他不同解析函数空间上的Volterra积分算子. Li在 [3]中给出了从标准权Bergman空间到Bloch空间的Volterra积分算子的有界性和紧性问题.本文我们主要考虑从带指数增长权的Bergman空间A^p_ψ 到Bloch 空间的Volterra 积分算子的有界性和紧性问题. 这里我们需要注意到权$\mathcal{W}_0$包含非径向的权,因此多项式可能在Bergman 空间A^p_ψ 中不稠密.这导致我们需要采取与 [3]不太同的研究方法.

2. 预备知识

首先, 我们给出下面的结论.

引理2.1 设$\psi \in \mathcal{W}_0$且$\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}} \asymp \rho \in \mathcal{L}_0$. 若$f \in A^p_\psi$,则

$$|f(z)| \le Ce^{\psi}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\|f\|_{A^p_\psi}.$$

证明 由文献 [1]的引理3.3,可知：

$$|f(z)| \le Ce^{\psi}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\|f\|_{A^p_\psi}.$$

对于任意$z \in \mathbb{D}$,A^2_ψ存在再生核函数$K_z(\cdot) = K(\cdot, z)$,且由Riesz表示定理

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(w,z)e^{-2\psi(w)}dA(w), \;\; f \in A^2_\psi.$$

对于再生核,我们有下面结论,见文献 [1]定理3.2.

引理2.2 若$\psi \in \mathcal{W}_0$且$\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}} \asymp \rho \in \mathcal{L}_0$,则

$$K(z,z)e^{-2\psi(z)} \asymp \rho(z)^{-2} = \Delta\psi(z), z \in \mathbb{D}.$$

由 [1]推论3.2以及 [4]命题2.5,我们有下面结论.

引理2.3 若$\psi \in \mathcal{W}_0$且$\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}} \asymp \rho \in \mathcal{L}_0$, 记$k_z(w) := \frac{K(w,z)}{K(z,z)}$,$k_{p,z}(w) = \rho(w)^{1-\frac{2}{p}}k_z(w)$, 则

$$\|k_{p,z}\|_{A^p_\psi} \asymp 1,$$

且$|z|\to 1$时,$k_{p,z}$在$\mathbb{D}$上的紧子集一致收敛于0. 其中$K(\cdot,z)$为Bergman空间A^2_ψ的再生核.

引理2.4 设$T_g: A^p_\psi \to \mathcal{B}$是有界算子,则$T_g: A^p_\psi \to \mathcal{B}$是紧算子等价于对任意有界序列$\{f_n\}\subset A^p_\psi$且在$\mathbb{D}$上的任意紧子集一致收敛于0, 则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}}=0.$$

证明 充分性. 设$\{f_n\}$为A^p_ψ中的任意有界序列,由引理2.1,有

$$|f_n(z)|\lesssim e^{\psi}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\|f_n\|_{A^p_\psi}.$$

因此,$\{f_n\}$在$\mathbb{D}$的任意紧子集上一致收敛. 由Montel定理,存在$\{f_n\}$的子序列,不妨仍记为$\{f_n\}$,及解析函数f,使得$\{f_n\}$在$\mathbb{D}$的紧子集一致收敛于f. 根据Fatou引理, 易得$f\in A^p_\psi$. 从而

$$\|T_g f_n - f\|_{\mathcal{B}}\to 0(n\to\infty).$$

故$T_g: A^p_\psi\to\mathcal{B}$是紧算子.

必要性. 设有界序列$\{f_n\}\subset A^p_\psi$满足在$\mathbb{D}$上的任意紧子集一致收敛于0. 由于$T_g: A^p_\psi\to\mathcal{B}$是紧算子,故存在$\{f_n\}$的子序列,仍记为$\{f_n\}$及$f\in\mathcal{B}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_g f_n - f\|_{\mathcal{B}}=0.$$

所以, $f(0)=0$ 且

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f_n(z)g'(z)-f(z)|\to 0(n\to\infty).$$

因为$\psi\in\mathcal{W}_0$且为次调和函数,所以$f_n(z)g'(z)$在$\mathbb{D}$上一致收敛于$f'(z)$. 而$\{f_n\}$在$\mathbb{D}$一致收敛于0, $g\in H(\mathbb{D})$, 所以有$f'(z)=0$.故$f(z)\equiv 0$.因此,我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}}=0.$$

3. A^p_ψ空间上的Volterra积分算子

结合以上引理得到本文的主要定理

定理3.1 假设$g\in H(\mathbb{D})$, $\psi\in\mathcal{W}_0$,则$T_g: A^p_\psi\to B$是有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z)<\infty.$$

证明 充分性: 假设

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z)<\infty.$$

令$f \in A^p_\psi$, 由引理2.1,有

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|g'(z)||f(z)| &\lesssim (1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\|f\|_{A^p_\psi}\\ &\lesssim (1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z).\end{aligned}$$

所以,$\|T_g f\|_{\mathcal{B}} < \infty$. 故$T_g : A^p_\psi \to B$是有界算子.

必要性: 假设$T_g : A^p_\psi \to B$是有界算子. 由引理2.4和引理2.3,我们有

$$(1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z) \lesssim \|T_g k_{p,z}\|_{\mathcal{B}} < \infty.$$

定理3.2 假设$g \in H(\mathbb{D})$, $\psi \in \mathcal{W}_0$,则$T_g : A^p_\psi \to B$是有紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z) = 0.$$

证明 充分性: 假设$T_g : A^p_\psi \to \mathcal{B}$是紧算子. 记$k_{p,z}(w) := \rho(z)^{1-\frac{2}{p}}k_z(w)$, 则$\|k_{p,z}\|_{A^p_\psi} \asymp 1$, 并且当$|z| \to 1$时,$k_{p,z}$在$\mathbb{D}$上的紧子集一致收敛于0. 故

$$\begin{aligned}0 = \lim_{|z|\to 1}\|T_g k_{p,z}\|_{\mathcal{B}} &\gtrsim \lim_{|z|\to 1}\sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(w)|k_{p,z}(w)|\\ &\gtrsim \lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)|k_{p,z}(z)|\\ &\gtrsim \lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

必要性: 假设$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z) = 0$, 则对任意的$\epsilon > 0$, 存在$r_0 \in (0,1)$,使得$|z| > r_0$时,有

$$(1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z) < \epsilon.$$

又因为ψ是严格次调和函数,$\rho \in C_0$且$\rho > 0$,所以当$|z| \le r_0$时,显然有$(1-|z|^2)|g'(z)|e^{\psi(z)}\rho^{-\frac{2}{p}}(z) < \infty$有界.从而由定理3.1, $T_g : A^p_\psi \to B$是界算子.而且我们知道,存在正数M,使得

$$M := \sup_{|w|\le r_0}(1-|w|^2)|g'(w)| < \infty.$$

设$\{f_n\}$为A^p_ψ中的有界序列,且在$\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛于0. 则

$$\begin{aligned}\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)|g'(w)|f_n(w)|\\ &= \sup_{|w|\le r_0}(1-|w|^2)|g'(w)|f_n(w)| + \sup_{|w|>r_0}(1-|w|^2)|g'(w)|f_n(w)|\\ &\lesssim M|f_n(w)| + \sup_{|w|>r_0}(1-|w|^2)|g'(w)e^{\psi}(w)\rho(w)^{-\frac{2}{p}}\|f_n\|_{A^p_\psi}\\ &\lesssim M|f_n(w)| + \epsilon\end{aligned}$$

因此, 当$n \to \infty$时,$\|T_g f_n\|_{\mathcal{B}} \to 0$. 所以$T_g : A^p_\psi \to B$是有紧算子.

基金项目

本论文受国家自然科学基金项目(11901271)和岭南师范学院科研项目(1170919634)资助。

参考文献

[1] Hu, Z., Lv, X. and Schuster, A. (2019) Bergman Spaces with Exponential Weights. *Journal of Functional Analysis*, **276**, 1402-1429. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.05.001

[2] Pommerenke, C. (1977) Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **52**, 591-602. https://doi.org/10.1007/BF02567392

[3] Li, S. (2008) Volterra Composition Operators between Weighted Bergman Spaces and Bloch Type Spaces. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45**, 229-248. https://doi.org/10.4134/JKMS.2008.45.1.229

[4] 何忠华, 王晓峰, 刘柚岐. 指数权Bergman空间A^p_φ和A^∞_φ间的Teoplitz算子[J]. 数学学报, 2021, 64(4): 655-668.