Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1649-1656
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119183

Hans汉斯

二维Fisher-KPP方程的显式Richardson外推法

李志君

南昌航空大学，数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 1612037445@qq.com

收稿日期：2021年8月13日；录用日期：2021年9月15日；发布日期：2021年9月22日

摘 要

本文研究二维Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (Fisher-KPP)方程的显式差分格式，运用能量分析法证明了在满足$r=\tau/h^2\le 1/4$时，差分格式的解是有界的，且在无穷范数意义下有$O(\tau+h^2)$的收敛阶。然后，通过发展一类Richardson外推法，在无穷范数意义下得到了收敛阶为$O(\tau^2+h^4)$的外推解。最后，数值结果验证了格式的有效性和理论结果的正确性。

关键词

Fisher-KPP方程，显式差分格式，收敛性，Richardson外推法

The Explicit Richardson Extrapolation Method for Two-Dimensional Fisher-KPP Equation

Zhijun Li

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi
Email: 1612037445@qq.com

Received: Aug. 13th, 2021; accepted: Sep. 15th, 2021; published: Sep. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, an explicit difference scheme is investigated for two-dimensional Fisher-KPP equation. Under the condition of $r=\tau/h^2\le 1/4$, the boundedness of the solution of the difference scheme is proven using the energy analysis method. It is proved that it has a convergence order of $O(\tau+h^2)$

文章引用: 李志君. 二维 Fisher-KPP 方程的显式 Richardson 外推法[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1649-1656.
DOI: 10.12677/pm.2021.119183

in maximum norm. Then by developing a class of Richardson extrapolation method, the extrapolation solution with convergence order of $O\left(\tau^2+h^4\right)$ in maximum norm is obtained. Finally, numerical results confirm the efficiency of the schemes and the correctness of theoretical results.

Keywords

Fisher-KPP Equation, Explicit Difference Scheme, Convergence, Richardson Extrapolation Method

1. 引言

Fisher 方程是一类非线性反应扩散方程。在 1937 年由 R. A. Fisher [1]和 Kolmogorov 等人[2]提出，用于描述雄性突变体在无限长的栖息地中的繁殖，因此也被称为 Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (Fisher-KPP)方程。本文研究如下二维 Fisher-KPP 方程的初边值问题

$$u_t=a\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+bu\left(1-u^p\right),\ (x,y)\in\Omega,\ t\in(0,T], \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y,t),\ (x,y)\in\Gamma,\ t\in(0,T], \tag{3}$$

其中 $a>0$， $b>0$， $p\in Z^+$， $\Omega=(0,1)\times(0,1)$， Γ 为 Ω 的边界，且当 $(x,y)\in\Gamma$ 时有 $u_0(x,y)=\varphi(x,y,0)$。

许多学者已经对 Fisher 型方程进行了理论研究(见文献[3] [4] [5] [6]及其参考文献)。方程的数值求解也引起了数学工作者的广泛关注。近年来，发展了许多数值方法用于求解 Fisher 型方程。例如，伪谱方法[7]、Petrov-Galerkin 有限元方法[8]、指数 B 样条 Galerkin 方法[9]等等。有限差分法[10] [11] [12] [13]是偏微分方程常用的，最受欢迎的数值解法之一。文献[14] [15] [16] [17]已经建立了相关的显式或隐式差分格式，它们的精度为时间一阶或二阶，空间二阶。为提高计算效率，本文对二维 Fisher-KPP 方程建立显式差分法及其 Richardson 外推算法，得到了收敛阶为 $O\left(\tau^2+h^4\right)$ 的数值解。

2. 差分格式

2.1. 预备知识

首先对求解区域 $\bar{\Omega}\times[0,T]$ 进行网格剖分，取正整数 M 和 N，使得 $h=1/M$， $\tau=T/N$。这里 h， τ 分别是空间网格步长和时间网格步长。令 $x_i=ih$， $y_j=jh\ (0\le i,j\le M)$， $t_k=k\tau\ (0\le k\le N)$， $\Omega_h=\left\{\left(x_i,y_j\right)|0\le i,j\le M\right\}$， $\Omega_\tau=\left\{t_k|0\le k\le N\right\}$， $\gamma=\left\{(0,j),(M,j)|0\le j\le M\right\}\cup\left\{(i,0),(i,M)|0\le i\le M\right\}$，记 $\Omega_{h\tau}=\Omega_h\times\Omega_\tau$。

设 $\left\{v_{ij}^k|0\le i,j\le M,0\le k\le N\right\}$ 为 $\Omega_{h\tau}$ 上的网格函数，定义差分算子如下：

$$\delta_t v_{ij}^k=\frac{1}{\tau}\left(v_{ij}^{k+1}-v_{ij}^k\right),\ \delta_t^2 v_{ij}^k=\frac{1}{\tau^2}\left(v_{ij}^{k-1}-2v_{ij}^k+v_{ij}^{k+1}\right),$$

$$\delta_x^2 v_{ij}^k=\frac{1}{h^2}\left(v_{i-1,j}^k-2v_{ij}^k+v_{i+1,j}^k\right),\ \delta_y^2 v_{ij}^k=\frac{1}{h^2}\left(v_{i,j-1}^k-2v_{ij}^k+v_{i,j+1}^k\right).$$

设 $w=\left\{w_{ij}\left|0\le i,j\le M\right.\right\}$ 为 Ω_h 上的网格函数，引进如下范数：$\|w\|_\infty=\max\limits_{0\le i,j\le M}\left|w_{ij}\right|$。

引理 1 [18] 设 $\left\{F^k\left|k\ge 0\right.\right\}$ 为非负序列，且满足 $F^{k+1}\le(1+c\tau)F^k+\tau g$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 c 和 g 为非负常数，则有 $F^k\le e^{ck\tau}\left(F^0+\dfrac{g}{c}\right)$，$k=0,1,2,\cdots$。

2.2. 差分格式解的收敛性及有界性

定义 $\Omega_{h\tau}$ 上的网格函数 $U_{ij}^k=u\left(x_i,y_j,t_k\right)$，$0\le i,j\le M$，$0\le k\le N$。设 $u(x,y,t)\in C^{(4,4,2)}\left(\bar{\Omega}\times[0,T]\right)$。

在结点 $\left(x_i,y_j,t_k\right)$ 处考虑微分方程(1)，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i,y_j,t_k\right)=a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i,y_j,t_k\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i,y_j,t_k\right)\right]+bu\left(x_i,y_j,t_k\right)-b\left[u\left(x_i,y_j,t_k\right)\right]^{p+1},1\le i\le M-1,0\le k\le N-1. \tag{4}$$

分别用向前差商和二阶中心差商离散时间和空间导数，得到

$$\delta_t U_{ij}^k=a\left(\delta_x^2 U_{ij}^k+\delta_y^2 U_{ij}^k\right)+bU_{ij}^k-b\left(U_{ij}^k\right)^{p+1}+R_{ij}^k,\ 1\le i,j\le M-1,\ 0\le k\le N-1. \tag{5}$$

其中

$$R_{ij}^k=\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x_i,y_j,\xi_{ij}^k\right)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\eta_{ij}^k,y_j,t_k\right)-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x_i,\zeta_{ij}^k,t_k\right),$$
$$t_k<\xi_{ij}^k<t_{k+1},\ x_{i-1}<\eta_{ij}^k<x_{i+1},\ y_{j-1}<\zeta_{ij}^k<y_{j+1}.$$

由初边值条件(2)和(3)，有

$$U_{ij}^0=u_0\left(x_i,y_j\right),\ 0\le i,j\le M, \tag{6}$$

$$U_{ij}^k=\varphi\left(x_i,y_j,t_k\right),\ (i,j)\in\gamma,\ 1\le k\le N. \tag{7}$$

此外，存在常数 c_1，使得

$$\left|R_{ij}^k\right|\le c_1\left(\tau+h^2\right),\ 1\le i,j\le M-1,\ 0\le k\le N-1. \tag{8}$$

在(5)式中略去小量项 R_{ij}^k，并用数值解 u_{ij}^k 代替解析解 U_{ij}^k，得到如下显式差分格式：

$$\delta_t u_{ij}^k=a\left(\delta_x^2 u_{ij}^k+\delta_y^2 u_{ij}^k\right)+bu_{ij}^k-b\left(u_{ij}^k\right)^{p+1},\ 1\le i,j\le M-1,\ 0\le k\le N-1, \tag{9}$$

$$u_{ij}^0=u_0\left(x_i,y_j\right),\ 0\le i,j\le M, \tag{10}$$

$$u_{ij}^k=\varphi\left(x_i,y_j,t_k\right),\ (i,j)\in\gamma,\ 1\le k\le N. \tag{11}$$

2.3. 差分格式的收敛性分析

定理 1 设 $\left\{U_{ij}^k\left|0\le i,j\le M,0\le k\le N\right.\right\}$ 是方程(5)~(7)的解，$\left\{u_{ij}^k\left|0\le i,j\le M,0\le k\le N\right.\right\}$ 是差分格式(9)~(11)的解。令 $e_{ij}^k=U_{ij}^k-u_{ij}^k$，$0\le i,j\le M$，$0\le k\le N$。记 $L=\max\limits_{\substack{0\le x,y\le 1\\0\le t\le T}}\left|u(x,y,t)\right|$。则当网格比 $r=\dfrac{a\tau}{h^2}\le\dfrac{1}{4}$ 且满足

$$\tau\le\frac{L}{2c_2},\ h\le\sqrt{\frac{L}{2c_2}} \tag{12}$$

时，有如下误差估计

$$\left\|e^k\right\|_\infty \le c_2\left(\tau+h^2\right),\ 0\le k\le N, \tag{13}$$

$$\left\|u^k\right\|_\infty \le c_3 \tag{14}$$

成立。这里 $c_2=\exp\left\{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]bT\right\}\dfrac{c_1}{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]b}$， $c_3=2L$ 。

证明 将(5)式~(7)式分别和(9)式~(11)式相减，得到误差方程

$$\delta_t e_{ij}^k = a\left(\delta_x^2 e_{ij}^k+\delta_y^2 e_{ij}^k\right)+bU_{ij}^k-b\left(U_{ij}^k\right)^{p+1}-bu_{ij}^k+b\left(u_{ij}^k\right)^{p+1}+R_{ij}^k,\ 1\le i,j\le M-1,\ 0\le k\le N-1, \tag{15}$$

$$e_{ij}^0=0,\ 0\le i,j\le M, \tag{16}$$

$$e_{ij}^k=0,\ (i,j)\in\gamma,\ 0\le k\le N. \tag{17}$$

由(16)式可知，当 $k=0$ 时，$\left\|e^0\right\|_\infty=0$ 显然成立。

由三角不等式可得

$$\left\|u^0\right\|_\infty \le \left\|U^0\right\|_\infty+\left\|e^0\right\|_\infty \le L\le 2L=c_3. \tag{18}$$

因而(13)式和(14)式对 $k=0$ 都成立。

假设(13)式对 $0\le k\le l\quad(0\le l\le n-1)$成立，即

$$\left\|e^k\right\|_\infty \le c_2\left(\tau+h^2\right),\ 0\le k\le l.$$

由(12)式，有 $\left\|u^k\right\|_\infty \le \left\|U^k\right\|_\infty+\left\|e^k\right\|_\infty \le L+c_2\left(\tau+h^2\right)\le 2L=c_3$ 。

下面证明当 $k=l+1$ 时，(13)式和(14)式仍然是成立的。

整理(15)式可得

$$\begin{aligned} e_{ij}^{k+1} &= r\left(e_{i-1,j}^k+e_{i+1,j}^k+e_{i,j-1}^k+e_{i,j+1}^k\right)+\left(1-4r\right)e_{ij}^k+b\tau e_{ij}^k \\ &\quad -b\tau e_{ij}^k\left[\left(U_{ij}^k\right)^p+\left(U_{ij}^k\right)^{p-1}\left(u_{ij}^k\right)+\cdots+\left(U_{ij}^k\right)\left(u_{ij}^k\right)^{p-1}+\left(u_{ij}^k\right)^p\right]+\tau R_{ij}^k. \end{aligned} \tag{19}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \left\|e^{k+1}\right\|_\infty &\le \left\|e^k\right\|_\infty+b\tau\left\|e^k\right\|_\infty+b\tau\left\|e^k\right\|_\infty\left[L^p+L^{p-1}(2L)+\cdots+L(2L)^{p-1}+(2L)^p\right]+\tau c_1\left(\tau+h^2\right) \\ &\le \left\|e^k\right\|_\infty+b\tau\left\|e^k\right\|_\infty+b\tau\left\|e^k\right\|_\infty\left[\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]+\tau c_1\left(\tau+h^2\right) \\ &\le \left\{1+\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]b\tau\right\}\left\|e^k\right\|_\infty+\tau c_1\left(\tau+h^2\right). \end{aligned} \tag{20}$$

运用引理 1 可得

$$\begin{aligned} \left\|e^{k+1}\right\|_\infty &\le \exp\left\{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]bk\tau\right\}\left\{\left\|e^0\right\|_\infty+\frac{c_1\left(\tau+h^2\right)}{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]b}\right\} \\ &\le \exp\left\{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]bT\right\}\frac{c_1}{\left[1+\left(2^{p+1}-1\right)L^p\right]b}\left(\tau+h^2\right) \\ &= c_2\left(\tau+h^2\right). \end{aligned} \tag{21}$$

此外，由三角不等式可知

$$\left\|u^{k+1}\right\|_\infty \le \left\|U^{k+1}\right\|_\infty + \left\|e^{k+1}\right\|_\infty \le L + c_2\left(\tau + h^2\right) \le 2L = c_3. \tag{22}$$

故(13)式和(14)式对 $k = l+1$ 时也成立。定理证毕。

3. Richardson 外推算法

记差分格式(9)~(11)的解为 $u_{ij}^k\left(h,h,\tau\right)$，令 $f\left(u\right) = bu\left(1-u^p\right)$。

定理 2 设定解问题

$$v_t = a\left(v_{xx}+v_{yy}\right) - p\left(x,y,t\right) + f'\left(u\right)v,\ \left(x,y\right)\in\Omega,\ t\in\left(0,T\right], \tag{23}$$

$$v\left(x,y,0\right) = 0,\ \left(x,y\right)\in\bar{\Omega}, \tag{24}$$

$$v\left(x,y,t\right) = 0,\ \left(x,y\right)\in\Gamma,\ t\in\left[0,T\right] \tag{25}$$

和

$$w_t = a\left(w_{xx}+w_{yy}\right) - q\left(x,y,t\right) + f'\left(u\right)w,\ \left(x,y\right)\in\Omega,\ t\in\left(0,T\right], \tag{26}$$

$$w\left(x,y,0\right) = 0,\ \left(x,y\right)\in\bar{\Omega}, \tag{27}$$

$$w\left(x,y,t\right) = 0,\ \left(x,y\right)\in\Gamma,\ t\in\left[0,T\right] \tag{28}$$

存在光滑解，其中

$$p\left(x,y,t\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\left(x,y,t\right),\ q\left(x,y,t\right) = -\frac{a}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(x,y,t\right) - \frac{a}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\left(x,y,t\right),$$

则有

$$u_{ij}^k = u\left(x_i,y_j,t_k\right) + \tau v\left(x_i,y_j,t_k\right) + h^2 w\left(x_i,y_j,t_k\right) + O\left(\tau^2+h^4\right),\ 1\le i,j\le M-1,\ 1\le k\le N.$$

定义 Richardson 外推法的数值解为

$$\left(u_e\right)_{ij}^k = \begin{cases} \dfrac{m^2}{m^2-1} u_{mi,mj}^{m^2 k}\left(\dfrac{h}{m},\dfrac{h}{m},\dfrac{\tau}{m^2}\right) - \dfrac{1}{m^2-1} u_{ij}^k\left(h,h,\tau\right), & 1\le i,j\le M-1,\ 1\le k\le N, \\ \varphi\left(x_i,y_j,t_k\right), & \left(i,j\right)\in\gamma,\ 1\le k\le N, \end{cases}$$

其中 $m\ge 2$ 且 $m\in N^+$，则当 $r = \tau/h^2 \le 1/4$ 时，有

$$\max_{\substack{0\le i,j\le M\\ 1\le k\le N}} \left|u\left(x_i,y_j,t_k\right) - \left(u_e\right)_{ij}^k\right| = O\left(\tau^2+h^4\right)$$

证明 由(5)式可知

$$R_{ij}^k = p\left(x_i,y_j,t_k\right)\tau + q\left(x_i,y_j,t_k\right)h^2 + O\left(\tau^2+h^4\right),\ 1\le i,j\le M-1,\ 1\le k\le N-1.$$

于是误差方程(15)~(17)可写为

$$\delta_t e_{ij}^k = a\left(\delta_x^2 e_{ij}^k + \delta_x^2 e_{ij}^k\right) + f\left(U_{ij}^k\right) - f\left(u_{ij}^k\right) + p\left(x_i,y_j,t_k\right)\tau + q\left(x_i,y_j,t_k\right)h^2 + O\left(\tau^2+h^4\right), 1\le i,\ j\le M-1, 0\le k\le N-1, \tag{29}$$

$$e_{ij}^0 = 0,\ 0\le i,j\le M, \tag{30}$$

$$e_{ij}^k = 0,\ \left(i,j\right)\in\gamma,\ 0\le k\le N \tag{31}$$

记 $V_{ij}^k = v\left(x_i,y_j,t_k\right)$，$W_{ij}^k = w\left(x_i,y_j,t_k\right)$，$0\le i,j\le M$，$0\le k\le N$。

应用与(5)式同样的方法离散(23)~(25)，可得

$$\delta_t V_{ij}^k = a\left(\delta_x^2 V_{ij}^k + \delta_y^2 V_{ij}^k\right) - p\left(x_i, y_j, t_k\right) + f'\left(u_{ij}^k\right)V_{ij}^k + O\left(\tau + h^2\right),\ 1 \le i, j \le M-1,\ 0 \le k \le N-1, \tag{32}$$

$$V_{ij}^0 = 0,\ 0 \le i, j \le M, \tag{33}$$

$$V_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in \gamma,\ 1 \le k \le N-1. \tag{34}$$

类似地，对(26)~(28)离散，可得

$$\delta_t W_{ij}^k = a\left(\delta_x^2 W_{ij}^k + \delta_y^2 W_{ij}^k\right) - q\left(x_i, y_j, t_k\right) + f'\left(u_{ij}^k\right)W_{ij}^k + O\left(\tau + h^2\right),\ 1 \le i, j \le M-1,\ 0 \le k \le N-1, \tag{35}$$

$$W_{ij}^0 = 0,\ 0 \le i, j \le M, \tag{36}$$

$$W_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in \gamma,\ 1 \le k \le N-1. \tag{37}$$

记 $s_{ij}^k = e_{ij}^k + \tau V_{ij}^k + h^2 W_{ij}^k$， $0 \le i, j \le M$， $0 \le k \le N$ 。

由 Taylor 展开式有

$$f\left(u_{ij}^k - \tau V_{ij}^k - h^2 W_{ij}^k\right) = f\left(u_{ij}^k\right) - f'\left(u_{ij}^k\right)\left(\tau V_{ij}^k + h^2 W_{ij}^k\right) + O\left(\tau^2 + h^4\right). \tag{38}$$

将(32)式~(34)式和(35)式~(37)式分别同乘 τ 和 h^2，并将所得结果和(29)式~(31)式相加，再运用(38)式得到

$$\delta_t s_{ij}^k = a\left(\delta_x^2 s_{ij}^k + \delta_y^2 s_{ij}^k\right) + f\left(U_{ij}^k\right) - f\left(u_{ij}^k - \tau V_{ij}^k - h^2 W_{ij}^k\right) + O\left(\tau^2 + h^4\right),\ 1 \le i, j \le M-1,\ 0 \le k \le N-1,$$

$$s_{ij}^0 = 0,\ 0 \le i, j \le M,$$

$$s_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in \gamma,\ 1 \le k \le N.$$

当 $r \le 1/4$ 且 τ 和 h 充分小时，运用与定理 1 相同的证明方法，可得 $\left\|s^k\right\|_\infty = O\left(\tau^2 + h^4\right)$， $1 \le k \le N$ ，即

$$u\left(x_i, y_j, t_k\right) - u_{ij}^k(h, h, \tau) + \tau V_{ij}^k + h^2 W_{ij}^k = O\left(\tau^2 + h^4\right),\ \ 1 \le i, j \le M-1,\ 1 \le k \le N.$$

移项得

$$u_{ij}^k(h, h, \tau) = u\left(x_i, y_j, t_k\right) + \tau v\left(x_i, y_j, t_k\right) + h^2 w\left(x_i, y_j, t_k\right) + O\left(\tau^2 + h^4\right),\ 1 \le i, j \le M-1,\ 1 \le k \le N. \tag{39}$$

同理有

$$u_{mi,mj}^{m^2k}\left(\frac{h}{m}, \frac{h}{m}, \frac{\tau}{m^2}\right) = u\left(x_i, y_j, t_k\right) + \frac{\tau}{m^2} v\left(x_i, y_j, t_k\right) + \left(\frac{h}{m}\right)^2 w\left(x_i, y_j, t_k\right) + O\left(\left(\frac{\tau}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^4\right), 1 \le i,\ j \le M-1, 1 \le k \le N. \tag{40}$$

将(40)式和(39)式两边分别同乘 $\frac{m^2}{m^2-1}$ 和 $\frac{1}{m^2-1}$，并将所得结果相减可得

$\frac{m^2}{m^2-1} u_{mi,mj}^{m^2k}\left(\frac{h}{m}, \frac{h}{m}, \frac{\tau}{m^2}\right) - \frac{1}{m^2-1} u_{ij}^k(h, h, \tau) = u\left(x_i, y_j, t_k\right) + O\left(\tau^2 + h^4\right)$， $1 \le i, j \le M-1$， $1 \le k \le N$ 。定理证毕。

注 外推解收敛所需的网格比仍是 $r = \frac{\tau/m^2}{(h/m)^2} = \tau/h^2 \le 1/4$，即外推法无需对网格比增加更严格的条件。

4. 数值实验

算例 考虑如下经典二维 Fisher-KPP 方程的初边值问题

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u(1-u),\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ t\in(0,1].$$

初边值条件由其如下精确解确定：

$$u(x,y,t) = \left[1+\exp\left(-\frac{5}{6}t + \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y\right)\right]^{-2}.$$

记

$$E_\infty(h,\tau) = \max_{\substack{0\le i,j\le M\\1\le k\le N}} \left|u(x_i,y_j,t_k) - u_{ij}^k(h,h,\tau)\right|,\ (RE)_\infty(h,\tau) = \max_{\substack{0\le i,j\le M\\1\le k\le N}} \left|u(x_i,y_j,t_k) - (u_e)_{ij}^k\right|.$$

此时显式差分格式的数值解及 Richardson 外推解在无穷范数意义下的收敛阶分别定义为：

$$\text{order1} = \log_2\left(E_\infty(2h,4\tau)/E_\infty(h,\tau)\right),\ \text{order2} = \log_2\left((RE)_\infty(2h,4\tau)/(RE)_\infty(h,\tau)\right).$$

表 1 的数值结果表明，当 $\tau = h^2/4$ 时，显式差分格式(9)~(11)的解在无穷范数意义下具有 $O(h^2)$ 的收敛阶，这说明该格式在时间方向上是一阶收敛、空间方向上是二阶收敛，从而验证了定理 1 的正确性。

表 2 的数值结果表明，当 $\tau = h^2/4$ 时，Richardson 外推解在无穷范数意义下具有 $O(h^4)$ 的收敛阶，这也说明 Richardson 外推法在时间方向上是二阶收敛、空间方向上是四阶收敛。

Table 1. Maximum error and convergence order for numerical solutions u^k

表 1. 数值解 u^k 的最大误差及收敛阶($\tau = h^2/4$)

h	$E_\infty(h,\tau)$	order1	CPU
1/2	2.1101e−04	*	0.001378s
1/4	5.6321e−05	1.9056	0.001461s
1/8	1.4438e−05	1.9639	0.002593s
1/16	3.6340e−06	1.9902	0.021669s
1/32	9.1009e−07	1.9975	0.066269s
1/64	2.2790e−07	1.9976	0.912329s

Table 2. Maximum error and convergence order for numerical solutions $(u_e)^k$

表 2. 数值解 $(u_e)^k$ 的最大误差及收敛阶($\tau = h^2/4$, $m = 2$)

h	$(RE)_\infty(h,\tau)$	order2	CPU
1/2	1.2472e−05	*	0.000634s
1/4	5.8465e−07	4.4150	0.002817s
1/8	3.8934e−08	3.9085	0.025330s
1/16	2.4753e−09	3.9756	0.333668s
1/32	1.5596e−10	3.9883	5.435336s

由此可见，Richardson 外推法提高了原显式差分格式的收敛精度。最后对比两种求解方法可以看出，Richardson 外推法不仅收敛精度更好，而且在达到相同误差时所用 CPU 更短。

5. 结论

本文对二维 Fisher-KPP 方程的初边值问题建立了一类显式差分格式。运用能量分析法证明了显式差

分格式解的收敛性和有界性。为提高计算效率，本文设计了一类 Richardson 外推方法，获得了收敛阶为 $O\left(\tau^2+h^4\right)$ 的外推解。数值结果表明，Richardson 外推法的计算效率更好。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11861047)；江西省自然科学基金面上项目(No. 20202BABL201005)。

参考文献

[1] Fisher, R.A. (1937) The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Annals of Human Genetics*, **7**, 355-369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

[2] Kolmogorov, A.N., Petrovskii, I.G. and Piscounov, N.S. (1937) Tude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiére et son application a un probléme biologique.

[3] Tyson, J.J. and Brazhnik, P.K. (2000) On Travelling Wave Solutions of Fisher's Equation in Two Spatial Dimensions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **60**, 371-391. https://doi.org/10.1137/S0036139997325497

[4] Canosa, J. (2010) On a Nonlinear Diffusion Equation Describing Population Growth. *Ibm Journal of Research & Development*, **17**, 307-313. https://doi.org/10.1147/rd.174.0307

[5] Kawahara, T. and Tanaka, M. (1983) Interactions of Travelling Fronts: An Exact Solution of a Nonlinear Diffusion Equation. *Physics Letters A*, **97**, 311-314. https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90648-5

[6] Wazwaz, A.M. and Gorguis, A. (2004) An Analytic Study of Fisher's Equation by Using Adomian Decomposition Method. *Applied Mathematics & Computation*, **154**, 609-620. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00738-0

[7] Olmos, D. and Shizgal, B.D. (2006) A Pseudospectral Method of Solution of Fisher's Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **193**, 219-242. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.06.028

[8] Tang, S. and Weber, R.O. (1991) Numerical Study of Fisher's Equation by a Petrov-Galerkin Finite Element Method. *The ANZIAM Journal*, **33**, 27-38. https://doi.org/10.1017/S0334270000008602

[9] Gorgulu, M.Z. and Dag, I. (2018) Exponential B-splines Galerkin Method for the Numerical Solution of the Fisher's Equation. *Iranian Journal of Science and Technology*, *Transactions A*: *Science*, **42**, 2189-2198. https://doi.org/10.1007/s40995-017-0403-x

[10] 陈景良，邓定文. 非线性延迟波动方程的两类差分格式[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 508-517. https://doi.org/10.12677/PM.2020.105062

[11] 何丽，王希，胡劲松. 广义 BBM-KdV 方程的一个守恒 C-N 差分格式[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 428-435. https://doi.org/10.12677/PM.2021.114055

[12] 杨欣童. 对双曲型方程两种差分格式方法的比较研究[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 261-270. https://doi.org/10.12677/PM.2021.112035

[13] 林学好. 非线性薛定谔方程的差分格式[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 496-502. https://doi.org/10.12677/PM.2021.114063

[14] Macías-Díaz, J.E. and Puri, A. (2012) An Explicit Positivity-Preserving Finite-Difference Scheme for the Classical Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov Equation. *Applied Mathematics & Computation*, **218**, 5829-5837. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.064

[15] Chandraker, V., Awasthi, A. and Jayaraj, S. (2015) A Numerical Treatment of Fisher Equation. *Procedia Engineering*, **127**, 1256-1262. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.11.481

[16] Izadi, M. (2020) A Second-Order Accurate Finite-Difference Scheme for the Classical Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov Equation. *Journal of Information and Optimization Sciences*, **42**, 1-18. https://doi.org/10.1080/02522667.2019.1696919

[17] Chandraker, V., Awasthi, A. and Jayaraj, S. (2018) Implicit Numerical Techniques for Fisher Equation. *Journal of Information and Optimization Sciences*, **39**, 1-13. https://doi.org/10.1080/02522667.2017.1374722

[18] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社, 2012: 71-136.