Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1657-1664
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119184

简单波和二维非线性波动系统的特征分解

冯　恬

长安大学理学院，陕西 西安
Email: fengtian4779@163.com

收稿日期：2021年8月13日；录用日期：2021年9月15日；发布日期：2021年9月22日

摘　要

本文考虑具有广义Chaplygin气体的二维非线性波动系统，对可压缩欧拉系统进行简化，得到了自相似平面上压力变量和倾斜角变量沿着特征线的简单波和一些特征分解，这些结果是Courant和Friedrichs专著中关于可约方程的著名定理的推广。

关键词

非线性波动系统，特征分解，简单波

Simple Waves and Characteristic Decompositions of the Two-Dimensional Nonlinear Wave System

Tian Feng

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: fengtian4779@163.com

Received: Aug. 13th, 2021; accepted: Sep. 15th, 2021; published: Sep. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, we consider a two-dimensional nonlinear wave system with generalized Chaplygin gas which is simplified model of the compressible Euler system and get simple waves and some characteristic decompositions for the pressure variable and inclination angle variables along the characteristic curves in the self-similar plane. These results are generalization of the well-known theorem on reducible equations in Courant and Friedrichs's monograph.

文章引用: 冯恬. 简单波和二维非线性波动系统的特征分解[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1657-1664.
DOI: 10.12677/pm.2021.119184

Keywords

Nonlinear Wave Systems, Characteristic Decomposition, Simple Waves

1. 引言

黎曼不变量的存在在双曲守恒律系统解的构造中起着基础性的作用，例如波动方程中 D'Alembert 公式的构造，以及奇点的发展证明[1]。对于二维定常等熵无旋欧拉方程组，由于黎曼不变量的存在，任何与定常状态相邻的解都是一个简单波[2]。黎曼不变量帮助我们得出任何与常状态相邻的双曲状态的解都是简单波的结论，然而，由于黎曼不变量对于 $n>2$ 可能一般不存在，这种方法有局限性。

Dai 和 Zhang [3]首次为压力梯度系统揭示了特征分解是作为构建全局平滑解斑块的强大工具。Li、Zhang 和 Zheng [4]使用特征分解技术研究了准线性双曲系统，证明了一个非常重要的结果，绝热欧拉系统在自相似平面上相邻的一个恒定状态是一个简单波，其中物理变量(u,v,c,p,ρ)沿着波的直线特征族是恒定的。Hu 和 Sheng [5]建立了广义 2 阶拟线性严格双曲方程组特征分解存在的一个充分条件。通过使用特征分解技术，我们不仅发现了黎曼变量，而且还发现了在一些双曲系统中所谓的 Riemann 变量。因此特征分解方法是处理拟线性双曲系统问题的一种有效方法[4] [6] [7] [8] [9]。

本文考虑二维非线性波动系统

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x+(\rho v)_y=0, \\ (\rho u)_t+p_x=0, \\ (\rho v)_t+p_y=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ρ 为密度，(u,v) 为速度，状态方程 $p=p(\rho)$ 是 ρ 的赋值函数，系统(1.1)是通过忽略气体动力学中二维可压缩 Euler 方程速度(u,v)的二次项而得到的，Čanić、Keyfitz、Kim [10]分别推导了非线性波动系统和可压缩气体动力学绝热方程的混合系统，并证明了所产生的混合系统具有复杂的非线性相关性。Hu 和 Wang [11]提出了压力的特征分解，并利用分解建立先验估计，构造了带有 Chaplygin 气体的系统(1.1)的半双曲片的全局解。本文我们推导了压力变量和角变量的一些有趣的特征分解。

在本文中，我们感兴趣的是修正的 Chaplygin 气体

$$p=A\rho-\frac{B}{\rho^{\alpha}}, \tag{1.2}$$

其中参数 $\alpha>0, A>0, B>0$，它是用来描述当前宇宙的加速膨胀[12]。注意到当 $A=0,\alpha=1$ 时，(1.2)由 Chaplygin [13]和 Tsien [14]引入，作为空气动力学中计算飞机机翼升力的合适数学近似。另一方面，对于 $A=0, 0<\alpha<1$，该模型给出了从初始尘埃类物质到渐进宇宙常数的宇宙学演化。这一广义模型以前已经被研究[15]。

为了进一步研究系统(1.1)的内在特征，我们的主要系统是(1.1)在自相似变量$(\xi,\eta)=(x/t,y/t)$下的系统

$$\begin{cases} \xi\rho_\xi + \eta\rho_\eta - (\rho u)_\xi - (\rho v)_\eta = 0, \\ \xi(\rho u)_\xi + \eta(\rho u)_\eta - p_\xi = 0, \\ \xi(\rho v)_\xi + \eta(\rho v)_\eta - p_\eta = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

我们写(1.3)为矩阵形式

$$LW_\xi + QW_\eta = 0, \tag{1.4}$$

其中

$$a(p) = \frac{1}{\rho'(p)} = A + B\alpha\rho^{-\alpha-1}, \quad W = (p,u,v)',$$

$$L = \begin{pmatrix} u-\xi & a\rho & 0 \\ \xi u - a & a\rho\xi & 0 \\ \xi v & 0 & a\rho\xi \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} v-\eta & 0 & a\rho \\ \eta u & a\rho\eta & 0 \\ \eta v - a & 0 & a\rho\eta \end{pmatrix}.$$

通过简单计算，我们得到(1.4)的特征方程

$$\det(Q-\lambda L) = a^2\rho^2(\eta-\lambda\xi)\left((a-\xi^2)\lambda^2 + 2\xi\eta\lambda + a - \eta^2\right) = 0. \tag{1.5}$$

并且特征值为

$$\lambda_0 = \frac{\eta}{\xi}, \quad \lambda_\pm = \frac{\xi\eta \pm \sqrt{a(\xi^2+\eta^2-a)}}{\xi^2-a}. \tag{1.6}$$

系统(1.4)在 $\xi^2+\eta^2 = a$ 处改变了类型，且当 $\xi^2+\eta^2 > a$ 时为双曲型。我们注意到系统(1.1)的特征值与 (u,v) 无关，这意味着(1.1)可以转化为一个仅关于 p 的偏微分方程。

2. 预备知识

我们首先将 p 从 (ρu) 和 (ρv) 中解耦得到一个二阶拟线性方程

$$\left(a(p)-\xi^2\right)p_{\xi\xi} - 2\xi\eta p_{\xi\eta} + \left(a(p)-\eta^2\right)p_{\eta\eta} + b(p)\left(\xi p_\xi + \eta p_\eta\right)^2 - 2\left(\xi p_\xi + \eta p_\eta\right) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $b(p) = -\dfrac{\rho''(p)}{\rho(p)} = \dfrac{a'(p)}{a(p)}$，(2.1)的特征值是

$$\Lambda_\pm = \lambda_\pm = \frac{\xi\eta \pm \sqrt{a(\xi^2+\eta^2-a)}}{\xi^2-a}. \tag{2.2}$$

2.1. 四个角变量

在这里，我们使用了倾角变量 α,β [8]，它首次提出是在 Courant 和 Friedrichs 的专著中[2]，同时流角可以被定义为 $\sigma := (\alpha+\beta)/2$，并且马赫角 $\omega := (\alpha-\beta)/2$，我们可以用这些变量表示 (ξ,η) 为

$$\xi = -\sqrt{a}\frac{\cos\sigma}{\sin\omega}, \quad \eta = -\sqrt{a}\frac{\sin\sigma}{\sin\omega}. \tag{2.3}$$

注意到这与[4]的结果一致，现在我们再次推导细节。因为 $\tan\alpha = \Lambda_+, \tan\beta = \Lambda_-$。

$$\tan\alpha = \frac{\xi\eta + \sqrt{a(\xi^2+\eta^2-a)}}{\xi^2-a}, \quad \tan\beta = \frac{\xi\eta - \sqrt{a(\xi^2+\eta^2-a)}}{\xi^2-a}. \tag{2.4}$$

对上述公式进行相减和相乘，我们有

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{2\sqrt{a\left(\xi^2+\eta^2-a\right)}}{\xi^2-a},\quad \tan\alpha\times\tan\beta=\frac{\eta^2-a}{\xi^2-a}. \tag{2.5}$$

为了消除η^2，我们注意到$\eta^2-a=\tan\alpha\times\tan\beta\times\left(\xi^2-a\right)$，并且得到

$$\left(\tan\alpha-\tan\beta\right)\left(\xi^2-a\right)=2\sqrt{a\left[\xi^2+\tan\alpha\times\tan\beta\times\left(\xi^2-a\right)\right]}.$$

然后我们有

$$\frac{\xi}{\sqrt{a}}=\pm\frac{\cos\alpha\pm\cos\beta}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}. \tag{2.6}$$

虽然每种情况都是有意义的，但是为了方便，我们选择

$$\frac{\xi}{\sqrt{a}}=-\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}. \tag{2.7}$$

最后将α和β的表达式代入(2.7)，我们得到(2.3)的第一个方程，应用$\left(\tan\alpha+\tan\beta\right)\left(\xi^2-a\right)=2\xi\eta$，我们获得(2.3)的第二个方程。

2.2. 一阶特征形式

首先，我们引入一些基本符号

$$\begin{aligned}
&\partial^+=\partial_\xi+\Lambda_+\partial_\eta,\quad \partial^-=\partial_\xi+\Lambda_-\partial_\eta,\quad \partial^0=-\xi\partial_\xi-\eta\partial_\eta,\\
&\bar\partial^+=\cos\alpha\partial_\xi+\sin\alpha\partial_\eta,\quad \bar\partial^-=\cos\beta\partial_\xi+\sin\beta\partial_\eta,\\
&\bar\partial^0=\cos\sigma\partial_\xi+\sin\sigma\partial_\eta,\quad \bar\partial^\perp=\sin\sigma\partial_\xi-\cos\sigma\partial_\eta.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\bar\partial^+=\cos\alpha\partial^+,\quad \bar\partial^-=\cos\beta\partial^-,\quad \bar\partial^0=\frac{\partial^0}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\\
&\bar\partial^++\bar\partial^-=2\cos\omega\bar\partial^0,\quad \bar\partial^+-\bar\partial^-=-2\sin\omega\bar\partial^\perp.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

性质 2.1 对于非线性波动系统(1.1)，有下式成立

$$\begin{aligned}
&\bar\partial^\pm\omega=\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{a}}+\frac{b\tan\omega}{2}\bar\partial^\pm p,\quad \bar\partial^\pm\sigma=\mp\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{a}},\\
&\bar\partial^-\alpha=\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}}+\frac{b\tan\omega}{2}\bar\partial^-p,\quad \bar\partial^+\alpha=\frac{b\tan\omega}{2}\bar\partial^+p,\\
&\bar\partial^+\beta=-\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}}-\frac{b\tan\omega}{2}\bar\partial^+p,\quad \bar\partial^-\beta=-\frac{b\tan\omega}{2}\bar\partial^-p,\\
&\bar\partial^\perp\sigma=\frac{\sin\omega}{\sqrt{a}},\quad \bar\partial^0\sigma=0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

证明：证明的方法以前已经介绍[7]，因此对我们来说很容易证明这些公式，我们首先证明$\bar\partial^\pm\sigma$和$\bar\partial^\pm\omega$，微分公式(2.3)，我们有

$$\bar\partial^\pm\xi=-\frac{a'\bar\partial^\pm p}{2\sqrt{a}}\frac{\cos\sigma}{\sin\omega}+\sqrt{a}\frac{\sin\sigma\sin\omega\bar\partial^\pm\sigma+\cos\sigma\cos\omega\bar\partial^\pm\omega}{\sin^2\omega}, \tag{2.11}$$

$$\overline{\partial}^{\pm}\eta=-\frac{a'\overline{\partial}^{\pm}p}{2\sqrt{a}}\frac{\sin\sigma}{\sin\omega}-\sqrt{a}\frac{\cos\sigma\sin\omega\overline{\partial}^{\pm}\sigma-\sin\sigma\cos\omega\overline{\partial}^{\pm}\omega}{\sin^2\omega}. \tag{2.12}$$

结合(2.11)和(2.12)，我们得到

$$\cos(\alpha-\sigma)=-\frac{a'\overline{\partial}^{+}p}{2\sqrt{a}}\frac{1}{\sin\omega}+\sqrt{a}\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\overline{\partial}^{+}\omega,$$
$$\cos(\beta-\sigma)=-\frac{a'\overline{\partial}^{-}p}{2\sqrt{a}}\frac{1}{\sin\omega}+\sqrt{a}\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\overline{\partial}^{-}\omega.$$

通过计算发现

$$\overline{\partial}^{\pm}\omega=\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{a}}+\frac{b\tan\omega}{2}\overline{\partial}^{\pm}p. \tag{2.13}$$

同理，我们有

$$\overline{\partial}^{\pm}\sigma=\mp\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{a}}. \tag{2.14}$$

由于 $\alpha=\sigma+\omega,\beta=\sigma-\omega$，所以 $\overline{\partial}^{\pm}\alpha,\overline{\partial}^{\pm}\beta$ 的结果也可以获得，根据(2.9)，我们可以直接得到余下公式的证明。

3. 特征分解

这一节，我们将给出变量 p,α,β 的二阶特征分解，其中 p 的分解是最重要的。

定理 3.1 压力 p 在非线性波动系统中满足

$$\begin{cases}\overline{\partial}^{-}\overline{\partial}^{+}p=\partial^{+}p\left(\dfrac{b}{4\cos^2\omega}\partial^{+}p+\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{4\cos^2\omega}\right)\partial^{-}p+\dfrac{\sin2\omega}{\sqrt{a}}\right),\\ \overline{\partial}^{+}\overline{\partial}^{-}p=\partial^{-}p\left(\dfrac{b}{4\cos^2\omega}\partial^{-}p+\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{4\cos^2\omega}\right)\partial^{+}p+\dfrac{\sin2\omega}{\sqrt{a}}\right).\end{cases} \tag{3.1}$$

证明： 回顾(2.8)中 $\overline{\partial}^{\pm}$ 的定义，我们获得

$$p_{\xi}=\frac{\sin\alpha\overline{\partial}^{-}p-\sin\beta\overline{\partial}^{+}p}{\sin2\omega},\quad p_{\eta}=\frac{\cos\beta\overline{\partial}^{+}p-\cos\alpha\overline{\partial}^{-}p}{\sin2\omega}. \tag{3.2}$$

和

$$\begin{aligned}\overline{\partial}^{-}\overline{\partial}^{+}p&=\left(\cos\beta\partial_{\xi}+\sin\beta\partial_{\eta}\right)\left(\cos\alpha\partial_{\xi}+\sin\alpha\partial_{\eta}\right)p\\&=\left(-\sin\alpha\, p_{\xi}\overline{\partial}^{-}\alpha+\cos\alpha\, p_{\eta}\overline{\partial}^{-}\alpha\right)+\left(\cos\alpha\overline{\partial}^{-}p_{\xi}+\sin\alpha\overline{\partial}^{-}p_{\eta}\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

将(3.2)代入(3.3)，我们有

$$-\sin\alpha\, p_{\xi}\overline{\partial}^{-}\alpha+\cos\alpha\, p_{\eta}\overline{\partial}^{-}\alpha=-\frac{b\tan\omega}{2\sin2\omega}\left(\overline{\partial}^{-}p\right)^2+\frac{b\tan\omega}{2\tan2\omega}\overline{\partial}^{-}p\overline{\partial}^{+}p+\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}\tan2\omega}\overline{\partial}^{+}p-\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}\sin2\omega}\overline{\partial}^{-}p. \tag{3.4}$$

和

$$\begin{aligned}\cos\alpha\overline{\partial}^{-}p_{\xi}+\sin\alpha\overline{\partial}^{-}p_{\eta}&=\cos\alpha\cos\beta\left(p_{\xi\xi}+\left(\tan\alpha+\tan\beta\right)p_{\xi\eta}+\tan\alpha\tan\beta\, p_{\eta\eta}\right)\\&=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a-\xi^2}\left(\left(a-\xi^2\right)p_{\xi\xi}-2\xi\eta\, p_{\xi\eta}+\left(a-\eta^2\right)p_{\eta\eta}\right)\\&=\frac{b}{4\cos^2\omega}\left(\overline{\partial}^{+}p+\overline{\partial}^{-}p\right)^2+\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}\sin2\omega}\left(\overline{\partial}^{+}p+\overline{\partial}^{-}p\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

然后我们将(3.4)和(3.5)代入(3.3)得到

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+ p &= \frac{b}{4\cos^2\omega}\left(\bar{\partial}^+ p\right)^2+\left(\frac{b\tan\omega}{2\tan 2\omega}+\frac{b}{2\cos^2\omega}\right)\bar{\partial}^- p\bar{\partial}^+ p+\frac{2\sin^2\omega\left(\cos 2\omega+1\right)}{\sqrt{a}\sin 2\omega}\bar{\partial}^+ p\bar{\partial}^+ p\\&\quad+\left(-\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}\sin 2\omega}+\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^- p+\left(\frac{b\tan\omega}{2\sin 2\omega}+\frac{b}{4\cos^2\omega}\right)\left(\bar{\partial}^- p\right)^2\\&=\frac{b}{4\cos^2\omega}\left(\bar{\partial}^+ p\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{4\cos^2\omega}\right)\bar{\partial}^- p\bar{\partial}^+ p+\frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}}\bar{\partial}^+ p\\&=\bar{\partial}^+ p\left(\frac{b}{4\cos^2\omega}\bar{\partial}^+ p+\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{4\cos^2\omega}\right)\bar{\partial}^- p+\frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}}\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

$\bar{\partial}^+\bar{\partial}^- p$ 类似可得。

我们现在返回来考虑系统(1.3)的第二个和第三个方程，它们可以写成

$$\begin{cases}\partial^0\left(\rho u\right)+p_\xi=0,\\\partial^0\left(\rho v\right)+p_\eta=0.\end{cases}\tag{3.7}$$

通过一系列推导，我们可以计算出(u,v)。

进一步，我们使用定理 3.1 可以获得α,β的二阶特征分解。

定理 3.2 对于变量α和β，我们有以下二阶特征分解

$$\begin{cases}\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha+M_1\bar{\partial}^+\alpha=0,\\\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\beta+M_2\bar{\partial}^-\beta=0,\\\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha+M_3\bar{\partial}^-\alpha=\left(-\dfrac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2}-\dfrac{3\tan\omega}{\sqrt{a}}\right)\bar{\partial}^+\alpha,\\\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\beta+M_4\bar{\partial}^+\beta=\left(-\dfrac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2}-\dfrac{3\tan\omega}{\sqrt{a}}\right)\bar{\partial}^-\beta.\end{cases}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}M_1&=-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^+\alpha-\left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega}+\frac{\cos 2\omega+4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^-\alpha+\frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2}+\frac{2\tan\omega}{\sqrt{a}},\\M_2&=-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^-\beta+\left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega}+\frac{\cos 2\omega+4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^+\beta-\frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2}-\frac{2\tan\omega}{\sqrt{a}},\\M_3&=-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^-\alpha-\left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega}+\frac{\cos 2\omega+4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^+\alpha+\frac{\tan\omega}{\sqrt{a}}-\frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}},\\M_4&=-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^+\beta+\left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega}+\frac{\cos 2\omega+4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^-\beta+\frac{\tan\omega}{\sqrt{a}}-\frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

证明：由性质 2.1，我们有

$$\begin{cases}\bar{\partial}^+ p=\dfrac{2}{b\tan\omega}\bar{\partial}^+\alpha=-\dfrac{2}{b\tan\omega}\bar{\partial}^+\beta-\dfrac{2\sin 2\omega}{\sqrt{ab}},\\\bar{\partial}^- p=-\dfrac{2}{b\tan\omega}\bar{\partial}^-\alpha-\dfrac{2\sin 2\omega}{\sqrt{ab}}=-\dfrac{2}{b\tan\omega}\bar{\partial}^-\beta.\end{cases}\tag{3.9}$$

由定理 3.1，性质 2.1 和(3.9)，我们可以计算$\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\alpha &= \bar{\partial}^-\left(\frac{b\tan\omega}{2}\bar{\partial}^+ p\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(b'\bar{\partial}^- p\tan\omega + \frac{b}{\cos^2\omega}\bar{\partial}^-\omega\right)\bar{\partial}^+ p + b\tan\omega\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+ p\right] \\
&= \bar{\partial}^+\alpha\left[\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^+\alpha + \left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega} + \frac{\cos 2\omega + 4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^-\alpha - \frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2} - \frac{2\tan\omega}{\sqrt{a}}\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

类似地我们有

$$\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\beta = \bar{\partial}^-\beta\left[-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^-\beta - \left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega} + \frac{\cos 2\omega + 4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^+\beta + \frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2} + \frac{2\tan\omega}{\sqrt{a}}\right]. \tag{3.11}$$

以相同的方式可以计算 $\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^+\bar{\partial}^-\alpha &= \bar{\partial}^+\left(\frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}} + \frac{b\tan\omega}{2}\bar{\partial}^- p\right) \\
&= \frac{2\sin^2\omega}{\sqrt{a}}\bar{\partial}^+\omega - \frac{a'\sin^2\omega}{a\sqrt{a}}\bar{\partial}^+ p + \frac{b'\tan\omega}{2}\bar{\partial}^+ p\bar{\partial}^- p + \frac{b}{2\cos^2\omega}\bar{\partial}^+\omega\bar{\partial}^- p + \frac{b\tan\omega}{2}\bar{\partial}^+\bar{\partial}^- p \\
&= \bar{\partial}^-\alpha\left[\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^-\alpha + \left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega} + \frac{\cos 2\omega + 4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^+\alpha - \frac{\tan\omega}{\sqrt{a}} + \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}}\right] \\
&\quad + \bar{\partial}^+\alpha\left(-\frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2} - \frac{3\tan\omega}{\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^-\bar{\partial}^+\beta &= \bar{\partial}^+\beta\left[-\frac{1}{\sin 2\omega}\bar{\partial}^+\beta - \left(\frac{2b'}{b^2\tan\omega} + \frac{\cos 2\omega + 4}{\sin 2\omega}\right)\bar{\partial}^-\beta - \frac{\tan\omega}{\sqrt{a}} + \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{a}}\right] \\
&\quad + \bar{\partial}^-\beta\left(-\frac{2b'\sin 2\omega}{\sqrt{a}b^2} - \frac{3\tan\omega}{\sqrt{a}}\right).
\end{aligned}$$

定理 3.2 证明完成。

同时，特征分解使我们得出以下结论。

定理 3.3 在二维非线性波动系统的自相似平面上，任何与常状态相邻的双曲状态都是一个简单波区域。

参考文献

[1] Lax, P. (1964) Development of Singularities of Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **5**, 611-613. https://doi.org/10.1063/1.1704154

[2] Courant, R. and Friedrichs, K.O. (1948) Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience, New York.

[3] Dai, Z.H. and Zhang, T. (2000) Existence of Global Smooth Solution for a Degenerate Goursat Problem of Gas Dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **155**, 277-298. https://doi.org/10.1007/s002050000113

[4] Li, J.Q., Zhang, T. and Zheng, Y.X. (2006) Simple Waves and a Characteristic Decomposition of the Two Dimensional Compressible Euler Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **267**, 1-12. https://doi.org/10.1007/s00220-006-0033-1

[5] Hu, Y.B. and Sheng, W.C. (2012) Characteristic Decomposition of the 2× 2 Quasilinear Strictly Hyperbolic Systems. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 262-267.

[6] Chen, X. and Zheng, Y.X. (2010) The Interaction of Rare Faction Waves of the Two-Dimensional Euler Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **59**, 231-256. https://doi.org/10.1512/iumj.2010.59.3752

[7] Li, J.Q., Yang, Z.C. and Zheng, Y.X. (2011) Characteristic Decompositions and Interactions of Rare Faction Waves of

2-D Euler Equations. *Journal of Differential Equations*, **250**, 782-798. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.07.009

[8] Li, J.Q. and Zheng, Y.X. (2009) Interaction of Rare Faction Waves of the Two-Dimensional Self-Similar Euler Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **193**, 623-657. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0140-6

[9] Zafar, M. and Sharma, V.D. (2014) Characteristic Decomposition of Compressible Euler Equations for a Non-Ideal Gas in Two-Dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, 1-12. https://doi.org/10.1063/1.4896080

[10] Čanić, S., Keyfitz, B.L. and Kim, E.H. (2001) Mixed Hyperbolic-Elliptic Systems in Self-Similar Flows. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, **32**, 377-399. https://doi.org/10.1007/BF01233673

[11] Hu, Y.B. and Wang, G.D. (2014) Semi-Hyperbolic Patches of Solutions to the Two-Dimensional Nonlinear Wave System for Chaplygin Gases. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1567-1590. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.020

[12] Benaoum, H.B. (2002) Accelerated Universe from Modified Chaplygin Gas and Tachyonic Fluid.

[13] Chaplygin, S. (1904) On Gas Jets. *Scientific Memoirs, Moscow University Mathematic Physics*, **21**, 1-121.

[14] Tsien, H.S. (1939) Two Dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **6**, 399-407. https://doi.org/10.2514/8.916

[15] Bento, M.C., Bertolami, O. and Sen, A.A. (2002) Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion, and Dark-Energy-Matter Unification. *Physical Review D*, **66**, Article ID: 043507. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.043507