Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1673-1678
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119186

Fock空间中有界小Hankel算子的符号

王尔敏，施业成*

岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江
Email: wem0913@sina.com, *09ycshi@sina.cn

收稿日期：2021年8月17日；录用日期：2021年9月19日；发布日期：2021年9月26日

摘 要

对于 $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 1 < p_2 < p_1 < \infty$，本文考察当小 **Hankel** 算子 $h_{\overline{f}}^{\alpha_2}$ 从 $F_{\alpha_1}^{p_1}$ 到 $\overline{F}_{\alpha_2}^{p_2}$ 有界时，其符号函数 f 有何性质。

关键词

小Hankel算子，Fock空间，符号函数

The Symbol Functions of Bounded Small Hankel Operators between Different Fock Space

Ermin Wang, Yecheng Shi*

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong
Email: wem0913@sina.com, *09ycshi@sina.cn

Received: Aug. 17^{th}, 2021; accepted: Sep. 19^{th}, 2021; published: Sep. 26^{th}, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 王尔敏, 施业成. Fock空间中有界小Hankel算子的符号[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1673-1678.
DOI: 10.12677/pm.2021.119186

Abstract

For $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 1 < p_2 < p_1 < \infty$, we study the property of symbol functions f when the small Hankel operators $h_f^{\alpha_2}$ are bounded from $F_{\alpha_1}^{p_1}$ to $\overline{F}_{\alpha_2}^{p_2}$.

Keywords

Small Hankel Operators, Fock Spaces, Symbol Function

1. 引言

设 $\mathbf{C}^n$ 是 n 维复欧式空间. 对 $\mathbf{C}^n$ 中任意两点 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 和 $w = (w_1, \cdots, w_n)$, 记 $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}$, $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$. 任给定 $\alpha > 0$, 考虑 $\mathbf{C}^n$ 上的 Gauss 概率测度

$$dv_\alpha(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n e^{-\alpha|z|^2} dv(z),$$

其中 $dv(z)$ 是 $\mathbf{C}^n$上的标准体积测度.

当 $1 \leq p < \infty$ 时, L_α^p 表示 $\mathbf{C}^n$ 上所有满足

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \left(\frac{p\alpha}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbf{C}^n} \left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p dv(z) < \infty$$

的 Lebesgue 可测函数 f 的全体. 当 $p = \infty$时, 用 L_α^∞ 表示 $\mathbf{C}^n$ 上满足

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} : z \in \mathbf{C}^n\} < \infty$$

的 Lebesgue 可测函数 f 的全体. 显然 L_α^p 在 $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ 范数意义下构成一个 Banach 空间.

令 $H(\mathbf{C}^n)$ 表示 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数的全体, 用 H^∞ 表示 $\mathbf{C}^n$ 上有界解析函数的全体. 定义 Fock 空间

$$F_\alpha^p = L_\alpha^p \bigcap H(\mathbf{C}^n).$$

容易验证 F_α^p 是 L_α^p 的闭子空间. 因此, F_α^p 也是 Banach 空间. 关于 Fock 空间的一些理论可见文献 [1–4].

设 $K_\alpha(z,w)$ 是 F_α^2 的再生核函数, 我们有 $K_\alpha(z,w)=e^{\alpha\langle z,w\rangle}$, 见 [3]. 用 $k_z(w)=\frac{K_\alpha(w,z)}{||K_\alpha(\cdot,z)||_{2,\alpha}}$ 表示其标准化再生核. 众所周知, 从 L_α^2 到 F_α^2 的正交投影 P_α 可表示为

$$P_\alpha f(z)=\int_{\mathbf{C}^n}K_\alpha(z,w)f(w)dv_\alpha(w).$$

当 $1\le p\le\infty$ 时, P_α 的上述积分表达式是从 L_α^p 到 F_α^p 的线性算子. 当 $f\in F_\alpha^p$ 时, 有 $P_\alpha f=f$. 令

$$\Gamma_\alpha=\left\{\sum_{j=1}^{m}a_jK_\alpha(\cdot,z_j):m\in N,z_j\in\mathbf{C}^n\text{ and }a_j\in\mathbf{C}\right\}.$$

易知Γ_α 是 F_α^p 和 f_α^∞的稠子集, 其中$0<p<\infty$. 为方便起见, 我们令

$$\overline{F}_\alpha^p=\{\overline{f}:f\in F_\alpha^p\}.$$

用 $\overline{P}_\alpha$ 表示从 L_α^p 到 $\overline{F}_\alpha^p$ 的正交投影. 对任意的 $a\in\mathbf{C}^n$, 设 $t_a(z)=z+a$, 如果 $\mathbf{C}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数 f 满足 $f\circ t_a\in L^1(\mathbf{C}^n,dv_\alpha)$, 则称 f 符合条件 (I_1). 显然, f 符合条件 (I_1) 当且仅当

$$\int_{\mathbf{C}^n}|K_\alpha(z,a)||f(z)|dv_\alpha(z)<\infty,\quad a\in\mathbf{C}^n.$$

当 f 符合条件 (I_1) 时, 由 f 诱导的小 Hankel 算子 h_f 可在 F_α^p 上稠定义为

$$h_fg(z)=\overline{P}_\alpha(f\,g)(z)=\int_{\mathbf{C}^n}K_\alpha(w,z)f(w)g(w)dv_\alpha(w). \tag{1.1}$$

本文主要目的是研究不同 Fock 空间之间的有界小 Hankel算子 $h_{\overline{f}}$ 的符号 f 具有什么性质. 在第二部分, 我们先给出一些预备知识. 在第三部分, 当 $1<p_2<p_1<\infty$时, 我们证明若 $h_{\overline{f}}^{\alpha_2}:F_{\alpha_1}^{p_1}\to\overline{F}_{\alpha_2}^{p_2}$ 有界, 则其符号 f 必然在一特定的 Fock 空间里.

2. 预备知识

给定 $a\in\mathbf{C}^n$, $r>0$, 记 $B(a,r)=\{z\in\mathbf{C}^n:|z-a|<r\}$. 若 $\mathbf{C}^n$中的序列 $\{a_k\}$ 满足:

1) $\bigcup_{k=1}^\infty B(a_k,r)=\mathbf{C}^n$;

2) $\{B(a_k,\frac{r}{4})\}_{k=1}^\infty$ 互不相交.

则称 $\{a_k\}$ 为 $\mathbf{C}^n$中的一个 r 格. 容易验证, 任给定 $\delta>0$, 总存在和 r,δ 相关的正数 m 使得每个 $\mathbf{C}^n$ 中的点都属于至多 m 个集合$\{B(a_k,\delta)\}$.

给定 $r>0$, 容易选取 $a_k\in\mathbf{C}^n$, 使得 $\{a_k\}$ 是一个 r 格.

为了证明主要结论, 我们需要 Fock 空间的原子分解定理, 见文献 [5].

引理 2.1　令 $1 \le p \le \infty$. $r_0 > 0$, r 满足 $0 < r < r_0$, 函数 f 具有如下形式:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{\alpha\langle z, a_k\rangle - \frac{\alpha}{2}|a_k|^2}, \tag{2.1}$$

其中 $\{\lambda_k\} \in l^p$, $\{a_k\}$ 是一个 r 格. 则 $f \in F^p_\alpha$, 且存在与 f 无关的常数 C, 使得对任意的 $f \in F^p_\alpha$, 都有

$$C^{-1}\|f\|_{p,\alpha} \le \inf \|\{\lambda_k\}\|_{l^p} \le C\|f\|_{p,\alpha}$$

其中下确界是取遍所有可以得到形如 (2.1)式的 $\{\lambda_k\}$.

其次, 我们给出下面的对偶定理, 见文献 [3].

引理 2.2 设 $\alpha, \beta > 0, 1 \le p < \infty$, q 是 p 的共轭指标, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则在结对

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \lim_{R\to\infty} \int_{|z|<R} f(z)\overline{g(z)} e^{-\gamma|z|^2} dv(z)$$

下, F^p_α 的对偶空间是 F^q_β, f^∞_α 的对偶空间是 F^1_β, 其中 $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$.

3. 有界小Hankel算子的符号

在这部分, 对于 $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 1 < p_2 < p_1 < \infty$, 我们来讨论从 $F^{p_1}_{\alpha_1}$ 到 $\overline{F}^{p_2}_{\alpha_2}$ 的有界小 Hankel 算子 $h^{\alpha_2}_f$ 的符号函数 f 有何性质. 我们得到以下定理.

定理3.1.　设 $1 < p_2 < p_1 < \infty$, 且 $h^{\alpha_2}_{f} : F^{p_1}_{\alpha_1} \to \overline{F}^{p_2}_{\alpha_2}$ 有界. 则 $f \in F^q_\beta$, 其中 $q = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}, \beta = \frac{{\alpha_2}^2}{\alpha_1+\alpha_2}$. 进一步, 有

$$\|f\|_{q,\beta} \le C\|h^{\alpha_2}_f\|.$$

证明.　现假设 $h^{\alpha_2}_f : F^{p_1}_{\alpha_1} \to \overline{F}^{p_2}_{\alpha_2}$ 有界. 固定 $0 < r < r_0$, 其中 r_0 如定理 A 中给出, 令 $\{a_k\}$ 是一个 r 格. 则对任意的 $\{\lambda_k\} \in l^{p_1}$, 引理 2.1 告诉我们, 函数

$$g_t(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k r_k(t) k_{a_k}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k r_k(t) e^{\alpha_1\langle z, a_k\rangle - \frac{\alpha_1}{2}|a_k|^2}$$

属于 $F^{p_1}_{\alpha_1}$, 且 $\|g_t\|_{p_1,\alpha_1} \le C\|\{\lambda_k\}\|_{l^{p_1}}$. 由 $h^{\alpha_2}_f : F^{p_1}_{\alpha_1} \to \overline{F}^{p_2}_{\alpha_2}$ 是有界的, 我们可以得到

$$\|h^{\alpha_2}_f g_t\|^{p_2}_{p_2,\alpha_2} \le \|h^{\alpha_2}_f\|^{p_2} \cdot \|g_t\|^{p_2}_{p_1,\alpha_1} \le C\|h^{\alpha_2}_f\|^{p_2} \cdot \|\{\lambda_k\}\|_{l^{p_1}}.$$

同时, 由 Fubini 定理和 Khinchine 不等式可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|h_{\bar{f}}^{\alpha_2} g_t\|_{p_2,\alpha_2}^{p_2} dt \\
= &\int_{\mathbf{C}^n} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|z|^2} dv(z) \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k r_k(t) h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_k}(z)\right|^{p_2} dt \\
\geq &\ C \int_{\mathbf{C}^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_k}(z)|^2\right)^{\frac{p_2}{2}} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|z|^2} dv(z) \\
\geq &\ C \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(a_j,r)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_k}(z)|^2\right)^{\frac{p_2}{2}} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|z|^2} dv(z).
\end{aligned}$$

固定 j, 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_k}(z)|^2 \geq |\lambda_j|^2 |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_j}(z)|^2.$$

再结合 $|h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_j}(\cdot)|^q$ 的次调和性, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(a_j,r)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_k}(z)|^2\right)^{\frac{p_2}{2}} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|z|^2} dv(z) \\
\geq &\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^q \int_{B(a_j,r)} |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_j}(z)|^{p_2} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|z|^2} dv(z) \\
\geq &\ C \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{p_2} |h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_j}(a_j)|^{p_2} e^{-\frac{p_2\alpha_2}{2}|a_j|^2}.
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
|h_{\bar{f}}^{\alpha_2} k_{a_j}(a_j)| &= \left|\int_{\mathbf{C}^n} \overline{f(w)} e^{\alpha_2\langle w,a_j\rangle} e^{\alpha_1\langle w,a_j\rangle - \frac{\alpha_1}{2}|a_j|^2} dv_{\alpha_2}(w)\right| \\
&= e^{-\frac{\alpha_1}{2}|a_j|^2} \left|\int_{\mathbf{C}^n} \overline{f(w)} e^{(\alpha_1+\alpha_2)\langle w,a_j\rangle} dv_{\alpha_2}(w)\right| \\
&=: e^{-\frac{\alpha_1}{2}|a_j|^2} |J|.
\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{p_2} e^{-\frac{p_2}{2}(\alpha_1+\alpha_2)|a_j|^2} |J|^{p_2} \leq C \|h_{\bar{f}}^{\alpha_2}\|^{p_2} \cdot \|\{|\lambda_k|^{p_2}\}\|_{l^{\frac{p_2}{p_1}}}^{p_2}.$$

又 $\frac{p_1}{p_2}$ 的共轭指标为 $\frac{p_1}{p_1-p_2}$, 由此可知 $\left\{e^{-\frac{p_2}{2}(\alpha_1+\alpha_2)|a_j|^2} |J|^{p_2}\right\} \in l^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}$, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{q}{2}(\alpha_1+\alpha_2)|a_j|^2} |J|^q \leq C \|h_{\bar{f}}^{\alpha_2}\|^q.$$

其中 $q = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}$. 下证 $f \in F_\beta^q$, 其中 $\beta = \frac{{\alpha_2}^2}{\alpha_1+\alpha_2}$. 令 $\beta' = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 β' 是 β 的共轭指标. 由引理 2.1

可知, 对任意的 $h\in F^{q'}_{\beta'}$, 其中 q' 是 q 的共轭指标, 都存在 $\{\mu_j\}\in l^{q'}$, 其中 $\|\{\mu_j\}\|_{l^{q'}}\le C\|h\|_{q',\beta'}$, 使得

$$h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j e^{\beta'\langle z,a_j\rangle-\frac{\beta'}{2}|a_j|^2}.$$

因此, 由引理 2.2 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_{q,\beta} &\simeq \sup_{\|h\|_{q',\beta'}=1}|\langle h,f\rangle_{\alpha_2}|\\
&= C\sup_{\|\{\mu_j\}\|_{l^{q'}}\le 1}\left|\int_{\mathbf{C}^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j e^{\beta'\langle z,a_j\rangle-\frac{\beta'}{2}|a_j|^2}\right)\overline{f(z)}dv_{\alpha_2}(z)\right|\\
&= C\sup_{\|\{\mu_j\}\|_{l^{q'}}\le 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j e^{-\frac{\beta'}{2}|a_j|^2}\int_{\mathbf{C}^n}\overline{f(z)}e^{\beta'\langle z,a_j\rangle}dv_{\alpha_2}(z)\right|\\
&\le C\sup_{\|\{\mu_j\}\|_{l^{q'}}\le 1}\|\{\mu_j\}\|_{l^{q'}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}e^{\frac{-q\beta'}{2}|a_j|^2}\left(\int_{\mathbf{C}^n}\overline{f(z)}e^{\beta'\langle z,a_j\rangle}dv_{\alpha_2}(z)\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\le C\|h^{\alpha_2}_{\overline{f}}\|.
\end{aligned}$$

由此可知, $f\in F^q_\beta$, 且满足 $\|f\|_{q,\beta}\le C\|h^{\alpha_2}_{\overline{f}}\|$. 定理得证.

基金项目

本论文受国家自然科学基金青年项目(12001258), 广东省普通高校青年创新人才类项目(2019KQNCX077), 岭南师范学院科研项目(ZL1925)资助。

参考文献

[1] Berger, C.A. and Coburn, L.A. (1987) Toeplitz Operators on the Segal-Bargmann Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **301**, 813-829. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1987-0882716-4

[2] Berger, C.A. and Coburn, L.A. (1994) Heat Flow and Berezin-Toeplitz Estimates. *American Journal of Mathematics*, **116**, 563-590. https://doi.org/10.2307/2374991

[3] Janson, S., Peetre, J. and Rochberg, R. (1987) Hankel Forms and the Fock Space. *Revista Matemática Iberoamericana*, **3**, 61-138. https://doi.org/10.4171/RMI/46

[4] Tung, J. (2005) Fock Spaces. Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor.

[5] Zhu, K.H. (2012) Analysis on Fock Spaces. Springer, New York.