Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(9), 1679-1684
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.119187

Hans汉斯

复射影空间中B型实超曲面上Sasaki磁场下轨道

刘晓周，包图雅*

内蒙古民族大学数理学院，内蒙古 通辽
Email: *nmdbty@126.com

收稿日期：2021年8月18日；录用日期：2021年9月20日；发布日期：2021年9月29日

摘 要

研究流形上的曲线对认识流形有重要的作用，而曲线的指标是描述曲线的有力工具。本文计算了复射影空间中B型实超曲面上Sasaki磁场下二阶相切的轨道的外在测地曲率和外在复挠率。

关键词

复射影空间，B型实超曲面，Sasaki磁场，轨道，二阶相切

Trajectories for Sasakian Magnetic Fields on Real Hypersurfaces of Type B in Complex Projective Space

Xiaozhou Liu, Tuya Bao*

College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia
Email: *nmdbty@126.com

Received: Aug. 18th, 2021; accepted: Sep. 20th, 2021; published: Sep. 29th, 2021

Abstract

The study of curves on manifolds plays an important role in the considering of manifolds, and the index of curves is a powerful tool for describing curves. In this paper, we calculate the extrinsic geodesic curvature and extrinsic complex torsion of extrinsic tangentially of order two trajectories for Sasakian magnetic fields on real hypersurfaces of type B in complex projective space.

*通讯作者。

文章引用: 刘晓周, 包图雅. 复射影空间中 B 型实超曲面上 Sasaki 磁场下轨道[J]. 理论数学, 2021, 11(9): 1679-1684.
DOI: 10.12677/pm.2021.119187

Keywords

Complex Projective Space, Real Hypersurfaces of Type B, Sasakian Magnetic Fields, Trajectories, Tangentially of Order Two

1. 引言

静磁场是 3 维欧氏空间中散度等于零的向量值函数 $\mathbb{B}=(B_1,B_2,B_3)$ [1]。单位质量的带单位电荷的带电粒子在静磁场中做常速度运动，是因为该带电粒子在静磁场中受到的洛伦兹力为 $v\times\mathbb{B}=\Omega_{\mathbb{B}}v$，其中 v 是带电粒子的速度，而 $\Omega_{\mathbb{B}}$ 是一个反对称矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$。利用反对称矩阵 $\Omega_{\mathbb{B}}$ 在 3 维欧氏空间中引进了 2-形式 $B(u,v)$ 的定义，即 $B(u,v)=\langle u,\Omega_{\mathbb{B}}v\rangle$ [1]。另一方面，2-形式 $B=B_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+B_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+B_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$，对该 2-形式 $B(u,v)$ 进行一次微分得 $\mathrm{d}B=\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$。当 $\mathrm{d}B=0$ 时，2-形式 $B(u,v)$ 是闭的，从而散度等于零的问题等价于该 2-形式 $B(u,v)$ 是闭的。T. Adachi 把欧式空间中静磁场的概念推广到 Kähler 流形上引进了 Kähler 磁场的定义[2]，推广到非平坦复流形中的实超曲面上引进了 Sasaki 磁场的定义[3]。

非平坦复空间 CM^n 包括复射影空间 CP^n 和复双曲空间 CH^n。实超曲面是 n 维非平坦复空间 CM^n 中的实 $(2n-1)$ 维子流形。实超曲面 M 上有近切触度量结构 $(\phi,\xi,\eta,\langle\,,\rangle)$，该结构由张量 $\phi(v)=Jv-\eta(v)N$、向量场 $\xi=-JN$、1-形式 $\eta(v)=\langle v,\xi\rangle$ 和 Kähler 流形上的度量 $\langle\,,\rangle$ 所决定，其中 N 是非平坦复空间 CM^n 中的实超曲面 M 上的单位法向量，v 是实超曲面 M 的切空间 T_pM 上的向量。Kimura 把复射影空间 CP^n 中的 Hopf 齐性实超曲面 M 分为 A_1 型、A_2 型、B 型、C 型、D 型和 E 型[4]。

本文的内容是在复射影空间 $CP^n(c)$ 中 B 型实超曲面上开展的，复射影空间 $CP^n(c)$ 中 B 型实超曲面是绕全实全测地 $RP^n(c/4)$ 的半径为 r 的管 $R(r)$，其中 $0<r<\pi\big/\left(2\sqrt{c}\right)$，B 型实超曲面也可以理解成半径为 $\pi\big/\left(2\sqrt{c}\right)-r$ 的绕复超二次曲面 CQ^{n-1} 的管[4]。$CP^n(4)$ 中绕全实全测地 $RP^n(1)$ 的管 $R(r)$ $(0<r<\pi/4)$ 是 B 型实超曲面，在 S^{2n+1} 中的等距映射下它被表示为 $\varpi^{-1}(R(r))=\left\{(z_0,\cdots,z_n)\in C^{n+1}\,\middle|\,|z_0|^2+\cdots+|z_n|^2=1,\left|z_0^2+\cdots+z_n^2\right|=\cos 2r\right\}$。复射影空间 $CP^n(c)$ 中 B 型实超曲面有三个主曲率，分别是对应与 ξ 垂直方向的主曲率 $\lambda_1=-\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r$ 和 $\lambda_2=\frac{\sqrt{c}}{2}\tan\frac{\sqrt{c}}{2}r$，对应于 ξ 方向的主曲率为 $\delta=\sqrt{c}\tan\sqrt{c}r$ [4]。

在非平坦复空间 CM^n 中的实超曲面 M 上，定义 2-形式 $F_\phi(u,v)=\langle u,\phi(v)\rangle$，其中 $u,v\in T_pM$。2-形式 $F_\phi(u,v)=\langle u,\phi(v)\rangle$ 是闭的，2-形式 $F_\phi(u,v)=\langle u,\phi(v)\rangle$ 的常数倍 $F_\kappa=\kappa F_\phi\ (\kappa\in R)$ 称为 Sasaki 磁场[3]。单位质量的带单位电荷的带电粒子在 Sasaki 磁场下的运动轨迹是满足等式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\kappa\phi\dot\gamma$ 的弧长参数化的光滑曲线，被称为 Sasaki 磁场下轨道。当 $\kappa=0$，带电粒子的运动轨迹是测地线。当 $\kappa\neq0$，带电粒子的运动轨迹的形状是多样的，通常对特殊的形状进行研究。

对于轨道的研究，一种方法就是通过等距映射把轨道放到其外围空间进行考虑。设 M 是实超曲面，$\tilde{M}$ 是其外围流形，$l: M \to \tilde{M}$ 是等距浸入映射。当等距浸入映射 l 把 M 上的光滑曲线 γ 映射到 M 的外围空间 $\tilde{M}$ 上时，称曲线 $l \circ \gamma$ 为曲线 γ 的外在形状。通常考虑曲线的特殊的外在形状，如测地线、圆等。实超曲面 M 上由弧长参数化的光滑曲线如果满足 $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t_0)+\left\|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right\|^2\dot{\gamma}(t_0)=0$，则称曲线的外在形状是圆[5]。2017 年包图雅和 T. Adachi 研究了复射影空间中 A_1 型实超曲面上 Sasaki 磁场下的外在圆轨道，进而给出了 A_1 型实超曲面的特征[6]。

在此基础上，包图雅和 T. Adachi 弱化条件，考虑更一般的情况，在 2016 年研究了 Kähler 流形中实超曲面上 Sasaki 磁场下轨道二阶相切的条件，并由此给出了 Kähler 流形中的实超曲面的特征[5]，在 2018 年利用二阶相切的 Sasaki 磁场下的轨道研究了复双曲空间中 B 型实超曲面的特征[7]。当 $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t_0)+\left\|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right\|^2\dot{\gamma}(t_0)$ 没有与 M 相切的分量，称曲线的外在形状是二阶相切[5]。

通过对实超曲面上曲线的外在形状上的指标进行分析，例如测地曲率和复挠率，可以得到实超曲面的特征。实超曲面 M 上弧长参数化的光滑曲线 γ 的外在测地曲率 k 被定义为 $k=\left\|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right\|$，其外在复挠率 τ 被定义为 $\tau=\left\langle \dot{\gamma}, J\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right\rangle/k$。本文在文献[5]的基础上，利用高斯公式 $\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\left\langle A_M X, Y\right\rangle N$ 和魏因加尔吞公式 $\tilde{\nabla}_X N=-A_M X$ 计算了复射影空间中 B 型实超曲面上 Sasaki 磁场下二阶相切的轨道的外在测地曲率和外在复挠率。

2. 主要结果

引理[5]设 γ 是 Kähler 流形 $\tilde{M}$ 中 Hopf 实超曲面 M 上 Sasaki 磁场 F_κ 下的轨道。

1) 当构造挠率 $\rho_\gamma(t_0)=\pm 1$，那么 γ 的外在形状是二阶相切的，这时 $k(t_0)=|\delta|$。

2) 当构造挠率 $\rho_\gamma(t_0)\neq \pm 1$，并且 $\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$ 是主曲率向量，那么 γ 的外在形状是二阶相切当且仅当下面条件中的一个成立：

i) $\lambda-\kappa\rho_\gamma(t_0)+(\delta-\lambda)\rho_\gamma^2(t_0)=0$，

ii) $\kappa+(\delta-\lambda)\rho_\gamma(t_0)=0$，

这里 λ 表示 $\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$ 的主曲率。对应 i)情形的测地曲率 $k(t_0)=|\kappa|$，对应 ii)情形的测地曲率和复挠率满足：

$$k^2(t_0)=\kappa^2-2\kappa\lambda\rho_\gamma(t_0)+\lambda^2 \tag{2.1}$$

$$\text{和 } k(t_0)\tau(t_0)=\kappa\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)-\lambda\rho_\gamma(t_0). \tag{2.2}$$

3) 当测地曲率 $k(t_0)\neq|\kappa|$，如果 $\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$ 不是主曲率向量，那么 γ 的外在形状不是二阶相切。

引理中条件 1)下和条件 2)中 i)下的外在形状为二阶相切的轨道的外在测地曲率和外在复挠率无需再计算，但对于条件 2)中 ii)下的外在形状为二阶相切的轨道的外在测地曲率和外在复挠率虽然有公式可代入，但对于不同的非平坦复空间中的不同的实超曲面有不同的值和不同的关系，利用外在测地曲率和外在复挠率的关系找出对应实超曲面的特征是比较有意思的研究。下面具体计算复射影空间 $CP^n(c)$ 中 B 型实超曲面对应条件 2)中 ii)情形的外在测地曲率和外在复挠率。

定理 设 γ 是复射影空间 $CP^n(c)$ 中 B 型实超曲面上 Sasaki 磁场下二阶相切轨道，当 $\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$ 是主曲率向量，并且 γ 满足 $\rho_\gamma(t_0)\neq\pm1$、$\kappa+(\delta-\lambda_i)\rho_\gamma(t_0)=0\,(i=1,2)$，这时 γ 的外在测地曲率 k 和外在复挠率 τ 如下：

1) 当 $\delta=-\lambda_i\,(i=1,2)$ 时，$k_{\lambda_1}(t_0)=k_{\lambda_2}(t_0)=\dfrac{\sqrt{5c}}{2}$，$\tau_{\lambda_1}(t_0)=-\tau_{\lambda_2}(t_0)=\left(3-4\rho_\gamma^2(t_0)\right)\rho_\gamma(t_0)$；

2) 当 $\delta\neq-\lambda_i\,(i=1,2)$ 时，有

DOI: 10.12677/pm.2021.119187

i) $k_{\lambda_1}^2(t_0)\tau_{\lambda_1}^2(t_0)=\dfrac{4\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left[2k_{\lambda_1}^2(t_0)\left(u^2-1\right)^2-cu^2\left(u^2+3\right)\right]^2}{c^2u^4\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)^3}$，

ii) $k_{\lambda_2}^2(t_0)\tau_{\lambda_2}^2(t_0)=\dfrac{4u^2\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left[2k_{\lambda_2}^2(t_0)\left(u^2-1\right)^2-c\left(3u^2+1\right)\right]^2}{c^2\left(3u^2+1\right)\left(5u^2-1\right)^3}$。

其中$k_{\lambda_i}(t_0)$和$\tau_{\lambda_i}(t_0)$是对应于主曲率$\lambda_i(i=1,2)$的测地曲率和复挠率。

证明 令$\cot\dfrac{\sqrt{c}}{2}r=u$，则对于复射影空间$CP^n(c)$中B型实超曲面对应与$\xi$垂直方向的主曲率$\lambda_1=-\dfrac{\sqrt{c}}{2}\cot\dfrac{\sqrt{c}}{2}r=-\dfrac{u\sqrt{c}}{2}$和$\lambda_2=\dfrac{\sqrt{c}}{2}\tan\dfrac{\sqrt{c}}{2}r=\dfrac{\sqrt{c}}{2u}$，对应于$\xi$方向的主曲率$\delta=\sqrt{c}\tan\sqrt{c}r=\dfrac{2u\sqrt{c}}{u^2-1}$。

1) 如果$\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$的主曲率是$\lambda_i(i=1,2)$，当$\kappa+(\delta-\lambda_i)\rho_\gamma(t_0)=0(i=1,2)$，即$\kappa=(\lambda_i-\delta)\rho_\gamma(t_0)(i=1,2)$时，考虑(2.1)式。

当$\kappa^2-2\kappa\lambda_1\rho_\gamma(t_0)=0$，即$\delta=-\lambda_1$时，有$u=\sqrt{5}$，代入到(2.1)式，得到$k_{\lambda_1}(t_0)=-\lambda_1=\dfrac{\sqrt{5c}}{2}$，

当$\kappa^2-2\kappa\lambda_2\rho_\gamma(t_0)=0$，即$\delta=-\lambda_2$时，有$u=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，代入到(2.1)式，得到$k_{\lambda_2}(t_0)=\lambda_2=\dfrac{\sqrt{5c}}{2}$，

即$k_{\lambda_1}(t_0)=k_{\lambda_2}(t_0)=\dfrac{\sqrt{5c}}{2}$。

下面计算复挠率，将$\kappa=2\lambda_1\rho_\gamma(t_0)$和$k_{\lambda_1}(t_0)=-\lambda_1$代入到(2.2)式，得到$\tau_{\lambda_1}(t_0)=\left(3-4\rho_\gamma^2(t_0)\right)\rho_\gamma(t_0)$，将$\kappa=2\lambda_2\rho_\gamma(t_0)$和$k_{\lambda_2}=\lambda_2$代入到(2.2)式，得到$\tau_{\lambda_2}(t_0)=\left(-3+4\rho_\gamma^2(t_0)\right)\rho_\gamma(t_0)$，即$\tau_{\lambda_1}(t_0)=-\tau_{\lambda_2}(t_0)=\left(3-4\rho_\gamma^2(t_0)\right)\rho_\gamma(t_0)$。

2) i) 当$\kappa^2-2\kappa\lambda_1\rho_\gamma(t_0)\neq 0$，即$\delta\neq-\lambda_1$时，将$\kappa=(\lambda_1-\delta)\rho_\gamma(t_0)$代入到(2.1)式，得到$k_{\lambda_1}^2(t_0)=\left(\delta^2-\lambda_1^2\right)\rho_\gamma^2(t_0)+\lambda_1^2$，所以$\rho_\gamma^2(t_0)=\dfrac{k_{\lambda_1}^2(t_0)-\lambda_1^2}{\delta^2-\lambda_1^2}$，把$\lambda_1=-\dfrac{u\sqrt{c}}{2}$和$\delta=\dfrac{2u\sqrt{c}}{u^2-1}$代入到$\rho_\gamma^2(t_0)$中，得到$\rho_\gamma^2(t_0)=\dfrac{\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left(u^2-1\right)^2}{cu^2\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)}$。

对(2.2)式两边平方，并把$\kappa=(\lambda_1-\delta)\rho_\gamma(t_0)$和$\rho_\gamma^2(t_0)=\dfrac{\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left(u^2-1\right)^2}{cu^2\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)}$代入得到：

$$
\begin{aligned}
&k_{\lambda_1}^2(t_0)\tau_{\lambda_1}^2(t_0)=\left(\kappa\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)-\lambda_1\rho_\gamma(t_0)\right)^2\\
&=(\lambda_1-\delta)^2\rho_\gamma^2(t_0)\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)^2-2(\lambda_1-\delta)\lambda_1\rho_\gamma^2(t_0)\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)+\lambda_1^2\rho_\gamma^2(t_0)\\
&=\rho_\gamma^2(t_0)\left[(\lambda_1-\delta)^2\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)^2-2(\lambda_1-\delta)\lambda_1\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)+\lambda_1^2\right]\\
&=\frac{\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left(u^2-1\right)^2}{cu^2\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)}\left[\frac{u\sqrt{c}\left(3+u^2\right)}{2\left(1-u^2\right)}\left(\frac{2\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left(u^2-1\right)^2-cu^2\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)}{cu^2\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)}\right)+\frac{u\sqrt{c}}{2}\right]^2\\
&=\frac{4\left(4k_{\lambda_1}^2(t_0)-cu^2\right)\left[2k_{\lambda_1}^2(t_0)\left(u^2-1\right)^2-cu^2\left(u^2+3\right)\right]^2}{c^2u^4\left(3+u^2\right)\left(5-u^2\right)^3}.
\end{aligned}
$$

ii) 如果 $\dot{\gamma}(t_0)-\rho_\gamma(t_0)\xi_{\gamma(t_0)}$ 的主曲率是 $\lambda_2=\frac{\sqrt{c}}{2u}$，当 $\kappa+(\delta-\lambda_2)\rho_\gamma(t_0)=0$，即 $\kappa=(\lambda_2-\delta)\rho_\gamma(t_0)$ 时，考虑(2.1)式。

当 $\kappa^2-2\kappa\lambda_2\rho_\gamma(t_0)\neq 0$，即 $\delta\neq-\lambda_2$ 时，将 $\kappa=(\lambda_2-\delta)\rho_\gamma(t_0)$ 代入到(2.1)式，得到 $k_{\lambda_2}^2(t_0)=(\delta^2-\lambda_2^2)\rho_\gamma^2(t_0)+\lambda_2^2$，所以 $\rho_\gamma^2(t_0)=\frac{k_{\lambda_2}^2(t_0)-\lambda_2^2}{\delta^2-\lambda_2^2}$，把 $\lambda_2=\frac{\sqrt{c}}{2u}$ 和 $\delta=\frac{2u\sqrt{c}}{u^2-1}$ 代入到 $\rho_\gamma^2(t_0)$ 中，得到 $\rho_\gamma^2(t_0)=\frac{\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left(u^2-1\right)^2}{c\left(5u^2-1\right)\left(3u^2+1\right)}$。

对(2.2)式两边平方，并把 $\kappa=(\lambda_2-\delta)\rho_\gamma(t_0)$ 和 $\rho_\gamma^2(t_0)=\frac{\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left(u^2-1\right)^2}{c\left(5u^2-1\right)\left(3u^2+1\right)}$ 代入得到：

$$
\begin{aligned}
&k_{\lambda_2}^2(t_0)\tau_{\lambda_2}^2(t_0)=\left(\kappa\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)-\lambda_2\rho_\gamma(t_0)\right)^2\\
&=(\lambda_2-\delta)^2\rho_\gamma^2(t_0)\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)^2-2(\lambda_2-\delta)\lambda_2\rho_\gamma^2(t_0)\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)+\lambda_2^2\rho_\gamma^2(t_0)\\
&=\rho_\gamma^2(t_0)\left[(\lambda_2-\delta)^2\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)^2-2(\lambda_2-\delta)\lambda_2\left(2\rho_\gamma^2(t_0)-1\right)+\lambda_2^2\right]\\
&=\frac{\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left(u^2-1\right)^2}{c\left(3u^2+1\right)\left(5u^2-1\right)}\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2u}-\frac{2u\sqrt{c}}{\left(1-u^2\right)}\right)\left(\frac{2\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left(u^2-1\right)^2-c\left(3u^2+1\right)\left(5u^2-1\right)}{c\left(3u^2+1\right)\left(5u^2-1\right)}\right)-\frac{\sqrt{c}}{2u}\right]^2\\
&=\frac{4u^2\left(4k_{\lambda_2}^2(t_0)u^2-c\right)\left[2k_{\lambda_2}^2(t_0)\left(u^2-1\right)^2-c\left(3u^2+1\right)\right]^2}{c^2\left(3u^2+1\right)\left(5u^2-1\right)^3}.
\end{aligned}
$$

致　谢

感谢 2020 年内蒙古自治区研究生科研创新项目等基金项目的资助，感谢阅读本文和对本文提出建议的人。

基金项目

2020 年内蒙古自治区研究生科研创新项目(SZ2020141)；内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划(NJYT-19-A09)；内蒙古自然科学基金(2018MS01011)；国家自然科学基金(11661062)。

参考文献

[1] Sunada, T. (1993) Magnetic Flows on a Riemann Surface. *Proceedings of KAIST Mathematics Workshop*, **8**, 93-108.

[2] Adachi, T. (1995) Kähler Magnetic Flows for a Manifold of Constant Holomorphic Sectional Curvature. *Tokyo Journal of Mathematics*, **18**, 473-483. https://doi.org/10.3836/tjm/1270043477

[3] Adachi, T. (2008) Trajectories on Geodesic Spheres in a Non-Flat Complex Space Form. *Journal of Geometry*, **90**, 1-29. https://doi.org/10.1007/s00022-008-1941-3

[4] Kimura, M. (1986) Real hypersurfaces and Complex Submanifolds in Complex Projective Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **296**, 137-149. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0837803-2

[5] Bao, T. and Adachi, T. (2016) Characterizations of Some Homogeneous Hopf Real Hypersurfaces in a Nonflat Complex Space Form by Extrinsic Shapes of Trajectories. *Differential Geometry and Its Applications*, **48**, 104-118. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2016.06.007.

[6] Bao, T. and Adachi, T. (2017) Extrinsic Circular Trajectories on Geodesic Spheres in a Complex Projective Space. *Osaka Journal of Mathematics*, **54**, 735-745.

[7] Bao, T. and Adachi, T. (2019) Extrinsic Shapes of Trajectories on Real Hypersurfaces of Type (B) in a Complex Hyperbolic Space. 6*th International Colloquium on Differential Geometry and Its Related Fields*, Veliko Tarnovo, Bulgaria, 2018, 183-202. https://doi.org/10.1142/9789811206696_0012