Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 14-19
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121002

基于拓扑度的代数基本定理的证明

王学蕾

山东农业大学，信息科学与工程学院，山东 泰安

收稿日期：2021年11月28日；录用日期：2022年1月3日；发布日期：2022年1月10日

摘 要

本文用拓扑度理论给出了代数基本定理的证明。首先构造同伦方程，把复杂问题约化成一个简单问题；通过对同伦方程所有解的先验界估计，构造出有界开集；最后利用拓扑度的同伦不变性和存在性定理，给出定理的证明。

关键词

代数基本定理，拓扑度，先验界

Proof of the Fundamental Theorem of Algebra Based on Topological Degree

Xuelei Wang

College of Information Science and Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an Shandong

Received: Nov. 28^{th}, 2021; accepted: Jan. 3^{rd}, 2022; published: Jan. 10^{th}, 2022

Abstract

In the paper, proof of fundamental theorem of algebra is obtained by topological

文章引用: 王学蕾. 基于拓扑度的代数基本定理的证明[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 14-19.
DOI: 10.12677/pm.2022.121002

degree theory. Frist we construct a homotopy equation, which can reduce a complex problem into a simpler one. Through a priori estimate for the possible solutions of homotopy equation, we gain a bounded open set; then we prove the theorem by the homotopy invariance and existence theorem of topological degree.

Keywords

Fundamental Theorem of Algebra, Topological Degree, Priori Bound

1. 引言

代数基本定理是高等代数中非常重要的一个定理. 它的经典证明及其发展历史，可以参考文献 [1]. 在一般的高等代数教材, 如 [2]中都是只有定理内容，没有证明. 代数基本定理最为简单的证明是利用复变函数中的Liouville定理 [3]或者Rouche定理 [3]得到的. 文 [4]，总结了复变函数中和抽象代数中利用伽罗华群理论的证明；文 [5] [6]利用解析函数的性质，分别用最大模、最小模原理、柯西积分定理、留数定理给出代数基本定理的证明；文 [7]用代数拓扑中的同伦群和基本群同样得到了定理的结论，并把定理结论推广到更一般的函数类；文 [8]使用同调群和映射度等工具，给出代数基本定理的两种代数拓扑证明. 王海坤在文 [9]中，利用齐次线性方程组解的理论给出了代数基本定理的一个简洁的代数证明.

本文不同于上述的复变函数和代数拓扑的方法, 我们用非线性泛函中的拓扑度 [10] [11]的同伦不变性和可解性，给出了定理的证明. 利用同伦不变性可以把一个复杂的问题约化为一个相对简单的问题. 应用拓扑度关键是有界开集的构造，也就是同伦方程一切可能解的先验界估计. 再利用简单方程的度不等于零，得到原方程的解存在性，即 n 次多项式在复数范围内至少有一个根.在文章的最后，给出应用实例.

代数基本定理 [1]　在复平面上，n 次多项式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \tag{1}$$

至少有一个根.

下面我们给出拓扑度的一些预备知识.

拓扑度的定义 [11]　设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中有界开集，$f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $p \in \mathbb{R}^m$, $p \notin f(\partial\Omega)$. 当 p 是 f 的正则值时, 定义映射f在 Ω 中关于 p 点的拓扑度为

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(x_j)$$

其中 $J_f(x)$ 表示映射 f 的Jacobi行列式, $x_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 表示方程 $f(x) = p$ 在 Ω 内的解.

Kronecker存在定理 [11]　设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中有界开集, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ 连续, $p \notin f(\partial\Omega)$. 若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, 则 $f(x) = p$ 在 Ω内 必有解.

拓扑度的同伦不变性 [11]　设 $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ 连续，令 $h_\lambda(x) = H(x, \lambda)$. 若 $p \notin h_\lambda(\partial\Omega)$. $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\deg(h_\lambda, \Omega, p)$ 恒等于常数(对于$\forall 0 \leq \lambda \leq 1$).

拓扑度的定义、性质及性质的证明，可以参考文献 [11].

从1912年 Brouwer 创立拓扑度理论，其间经 Leray、Schauder 等数学家不断推广完善，直至现在，拓扑度方法已成为研究非线性问题的基本方法之一.

利用拓扑度理论解决问题，关键在于有界开集 Ω 的构造，也就是方程所有可能解的先验界的估计. 下文中，我们把 $\deg(f, \Omega, p)$ 简记为 $D(f, \Omega, p)$.

2. 代数基本定理证明

证明　映射 $f : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$，且 f 是 C^∞ 类函数. 令

$$g :\ \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(z) = z^n - 1.$$

考虑同伦方程

$$h_\lambda(z) = H(z, \lambda) = \lambda f(z) + (1 - \lambda)g(z) = z^n + \lambda(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) + (1 - \lambda), \quad \lambda \in [0, 1] \tag{2}$$

则 $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 是 C^∞ 类函数，且 $H(\cdot, 1) = f$, $H(\cdot, 0) = g$.

下面构造有界开集 Ω, 即证明 $H(z, \lambda) = 0$ 的所有可能解是有界的. 注意到 $\lambda \in [0, 1]$,

$$z^n + \lambda(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) + (1 - \lambda) = 0,$$

上式两边取模，得

$$|z|^n \leq |a_1| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_n| + 1 \tag{3}$$

若同伦方程的解无界，对任意正整数 m，都存在$\lambda_m \in [0, 1]$，$z_m \in \mathbb{C}$，使得

$$H(z_m, \lambda_m) = 0 \text{ 且 } |z_m| \geq m,$$

将 z_m 代入 (3)式，且两边同除以 $|z_m|$，得

$$1 \leq |a_1| \cdot |z_m|^{-1} + \cdots + |a_n| \cdot |z_m|^{-n} + |z_m|^{-n}$$

$$\leq |a_1| \cdot m^{-1} + \cdots + |a_n| \cdot m^{-n} + m^{-n} \to 0(m \to \infty)$$

矛盾. 因此同伦方程 $H(z, \lambda) = 0$ 的所有可能解是有界的, 即存在 $M > 0$, 使得 $|z| < M$, 令$r = \max\{M, 2\}$, $B(r)$ 表示以坐标原点为心, 半径为 r 的开圆, 则方程的所有解 $z \in B(r)$. $B(r)$ 可取作 Ω. 因此 $p = 0 \notin h_\lambda(\partial\Omega)$.

下面计算简单方程 $g(z) = z^n - 1 = 0$ 在$z \in B(r)$ 中的拓扑度，即 $D(g, B(r), 0)$.

$g(z) = 0$ 有 n 个根，即1 的 n 次方根，记为

$$z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

利用复数与有序实数对的对应，把复平面上的函数看做 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的映射, 即 $z = (x, y) \to g(z) = (u(x, y), v(x, y))$, 计算Jacobi行列式的符号.

$$J_g(z) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

因为 $g(z) = (u(x, y), v(x, y))$ 是解析函数，所以 $u(x, y), v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程，即 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, 因而 $J_g(z) = u_x^2 + v_x^2 = |g'(z)|^2 = |nz^{n-1}|^2 = n^2$，故

$$D(g, B(r), 0) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} J_g(z_k) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} n^2 = n$$

根据拓扑度的同伦不变性，可得

$$D(f, B(r), 0) = D(H(\cdot, 1), B(r), 0) = D(H(\cdot, 0), B(r), 0) = D(g, B(r), 0) = n \neq 0$$

由拓扑度的Kronecker存在定理，$f(z) = 0$ 至少有一个根.

注：同伦方程若取作$z^n = 0$ ，则0是方程的 n 重根，因为在 0 处的导数值是零，因此 0 是临界值，不能直接计算拓扑度，需要用正则值去逼近，不如直接取单位根计算度更简单.

3. 例子

下面举例说明结论的正确性.

$f(z) = z^5 + z^3 + 6z$ 在$B(1) = \{z : |z| < 1\}|$ 内显然有根 $z = 0$. 下面用拓扑度方法来证明这一结论. 构造同伦方程

$$h_\lambda(z) = H(z, \lambda) = \lambda f(z) + (1 - \lambda)g(z) = \lambda(z^5 + z^3 + 6z) + (1 - \lambda) \cdot 6z, \quad \lambda \in [0, 1]$$

当 $z \in B(1)$, 即 $|z| = 1$ 时,

$$|H(z,\lambda)| = |\lambda(z^5 + z^3) + 6z| \geq |6z| - |\lambda(z^5 + z^3)|$$

$$\geq |6z| - |z^5 + z^3| \geq |6z| - (|z|^5 + |z|^3|) \geq 6 - 2 = 4 > 0.$$

因此 $p = 0 \notin h_\lambda(\partial\Omega)$, 而 $g(z) = 6z$ 在开集 $B(1)$ 内只有一个根 $z_1 = 0$, $u(x,y) = 6x, v(x,y) = 6y$, 计算 $z_1 = 0$ 处的Jacobi行列式.

$$J_g(z) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

所以 $D(g, B(1), 0) = \ \mathrm{sgn} J_g(z_1) = 1$. 应用同伦不变性, 知

$$D(f, B(1), 0) = D(H(\cdot,1), B(1), 0) = D(H(\cdot,0), B(1), 0) = D(g, B(1), 0) = 1 \neq 0.$$

由拓扑度的Kronecker存在定理，$f(z) = 0$ 在开集 $B(1)$ 内至少有一个根. 验证了结论的正确性.

致 谢

本文得到国家自然科学基金(No. 61573228)、江苏省自然科学基金(No. BK20181058)的支持.

参考文献

[1] 倪佳. 代数基本定理的研究历史[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2021: 53-61.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 27-28.

[3] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 124-125, 258-261.

[4] 柴凤娟. 代数学基本定理的几种证明方法[J]. 数学学习与研究, 2019(10): 84-85.

[5] 陈继理. 复函数在代数基本定理证明中的应用[J]. 杭州师范学院学报(自然科学版), 2004, 3(3): 277-278.

[6] 韦煜. 代数基本定理的复分析证法[J]. 大学数学, 2005, 21(4): 111-114.

[7] 孙艳红, 高会双. 代数基本定理的拓扑证明及推广[J]. 井冈山大学学报(自然科学版), 2018, 39(4): 17-20.

[8] 张绍飞. 代数基本定理的拓扑证明[J]. 北京航空航天大学学报, 1994, 20(1): 111-114.

[9] 王海坤. 多项式的重根判别式和代数基本定理的简证[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(11): 128-132.

[10] Mawhin, J. (1979) Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. *ACBMS Regional Conference Series in Mathematics*, **40**, 42-50.
https://doi.org/10.1090/cbms/040

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 87-135.