Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 20-26
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121003

Stolz公式及其在数列极限中的应用

王　杰

云南财经大学，云南　昆明

收稿日期：2021年11月28日；录用日期：2022年1月4日；发布日期：2022年1月11日

摘　要

本文的主要研究方向是讨论数学分析中的一个重要公式：Stolz公式。Stolz公式一般适用于*/∞型数列极限和0/0型数列极限的计算和证明问题。本文一开始给出了两种不同类型的Stolz定理，其次通过相关例题研究了Stolz公式在数列不定式极限中的应用。

关键词

Stolz公式，数列极限，应用

Stolz Formula and Its Application in Sequence Limit

Jie Wang

Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Nov. 28th, 2021; accepted: Jan. 4th, 2022; published: Jan. 11th, 2022

Abstract

The main research direction of this paper is to discuss an important formula in mathematical analysis: Stolz formula. Stolz formula is generally applicable to the calculation and proof of */∞ type sequence limit and 0/0 type sequence limit. In this paper, two different types of Stolz theorems are given at first, and then the application of Stolz formula in the limit of infinitive series is studied by some examples.

Keywords

Stolz Formula, Sequence Limit, Application

文章引用: 王杰. Stolz 公式及其在数列极限中的应用[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 20-26.
DOI: 10.12677/pm.2022.121003

1. 引言

极限问题是数学分析中的重要问题，也是一大难题。其中有两个主要的问题：一是证明极限的存在性问题，二是求极限的值。这两个问题之间有着密不可分的关系。即如果能够求出极限的值，那么极限的存在性自然也就被证明了。相反，如果能够证明极限的存在性，那么后面再进行极限的计算也就顺理成章了。虽然求极限的方法有很多，但有些方法使用起来会比较复杂，有些方法使用起来就比较简单。因此，对于同一个问题，选择什么样的方法去解决，这是一个值得考虑和讨论的问题。

在数学分析课程中，在处理数列极限的问题时往往会使用到 Stolz 公式。再参照以往文献，文献[1]主要讨论的是关于 Stolz 定理的一个证明方法，即运用极限运算的法则，极限的定义和等价替换等方法来完成了对 Stolz 定理的一个证明。文献[2]不仅证明了 Stolz 定理，而且对其进行了推广，并用推广的 Stolz 公式去证明洛必达法则和其他一些定理。文献[3]首先对 Stolz 定理的定义进行了描述，然后直接利用 Stolz 定理解决了几个困难的数列极限计算问题。文献[4]给出了 Stolz 定理，并对 Stolz 公式进行了适当的推广，研究了 Stolz 定理及其推广形式在对解决数列不定式极限问题方面的应用。文献[5]主要研究的是如何求解数列问题和证明数列问题，体现了 Stolz 定理对极限求值和极限证明的价值。在文献[6]和[7]中，作者以一种全新的方法证明了 Stolz 定理，并列举了几个典型例题，通过这些典型例题，体现了 Stolz 公式在数列计算中的优越性。文献[8]首先用简单的方法对 Stolz 定理进行了证明，然后用 Stolz 公式去证明洛必达法则和一些简单的数列极限。

本文则是把几个文献的内容进行整合，对 Stolz 定理进行了分类证明，并通过典型例题分别说明了 Stolz 定理在求解数列极限和证明数列极限中的应用。

2. Stolz 公式及其证明

2.1. */∞型 Stolz 公式

定理 1.1：设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，其中 $\{x_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$ (A 可以为实数、$\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A .$$

虽然说 Stolz 公式对于某种类型的数列极限问题尤为重要，但是许多教材中并未详细的给出定理的证明或者给出的证明较为复杂，下面本文将分别从 A 为实数、$+\infty$、$-\infty$ 给出 Stolz 公式的详细证明过程。

(1) A 为实数

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = A$，所以对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^+$，使得当 $n > N_1$ 时，$\left| \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - A \right| < \varepsilon$，即 $A - \varepsilon < \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} < A + \varepsilon$，由于 $\{x_n\}$ 严格单调递增，所以 $x_n - x_{n-1} > 0$。进而可以化解为

$$(A-\varepsilon)(x_n - x_{n-1}) < y_n - y_{n-1} < (A+\varepsilon)(x_n - x_{n-1}),$$

类比推理可得

$$(A-\varepsilon)(x_{n-1}-x_{n-2})<y_{n-1}-y_{n-2}<(A+\varepsilon)(x_{n-1}-x_{n-2}),$$

$$\cdots$$

$$(A-\varepsilon)(x_{N_1+1}-x_{N_1})<y_{N_1+1}-y_{N_1}<(A+\varepsilon)(x_{N_1+1}-x_{N_1})。$$

将上面各式相加得

$$(A-\varepsilon)(x_n-x_{N_1})<y_n-y_{N_1}<(A+\varepsilon)(x_n-x_{N_1}),$$

即

$$y_{N_1}+(A-\varepsilon)(x_n-x_{N_1})<y_n<(A+\varepsilon)(x_n-x_{N_1})+y_{N_1},$$

同时除以 x_n 得

$$\frac{y_{N_1}}{x_n}+(A-\varepsilon)\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)<\frac{y_n}{x_n}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{x_{N_1}}{x_n}\right)+\frac{y_{N_1}}{x_n}。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，故当 $n\to\infty$ 时，x_{N_1}/x_n，y_{N_1}/x_n 都等于 0，所以 $(A-\varepsilon)<\dfrac{y_n}{x_n}<(A+\varepsilon)$，即 $\left|\dfrac{y_n}{x_n}-A\right|<\varepsilon$。因此，根据极限的定义可证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=A$。

(2) $A=+\infty$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=A=+\infty$，所以 $\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}>1$，

即 $y_n-y_{n-1}>x_n-x_{n-1}>0$，所以 $\{y_n\}$ 严格单调递增。又由于

$$\begin{aligned}y_n-y_N&=(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_{N+1}-y_N)\\&>(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{N+1}-x_N)=x_n-x_N\end{aligned},$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，应用(1)的结果可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}}=0。$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{x_n}{y_n}}=+\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}。$$

(3) $A=-\infty$。

由(2)知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-y_n)-(-y_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty,$$

即

DOI: 10.12677/pm.2022.121003

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{-y_n}{x_n}=-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}。$$

注： 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\infty$ 时，$\{x_n\}$ 严格单调递增，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 时，不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\infty$。

2.2. 0/0 型 Stolz 公式

定理 2.2： 设 $\{x_n\}$ 严格单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=A$ (A 为实数、$\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}。$$

(1) A 为实数

对于 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=A$，所以 $\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，有

$$A-\varepsilon<\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}<A+\varepsilon,x_n-x_{n+1}>0，$$

变形可得

$$(A-\varepsilon)(x_n-x_{n+1})<y_n-y_{n+1}<(A+\varepsilon)(x_n-x_{n+1})，$$

类似*/∞型(1)的证明，有 $(A-\varepsilon)(x_n-x_{n+p})<y_n-y_{n+p}<(A+\varepsilon)(x_n-x_{n+p})$，令 $p\to+\infty$，则由 $x_{n+p}\to0$，$y_{n+p}\to0$，可以得到 $(A-\varepsilon)x_n<y_n<(A+\varepsilon)x_n$，由于 $x_n>0$，并且有 $(A-\varepsilon)<\frac{y_n}{x_n}<(A+\varepsilon)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=A$。

(2) $A=+\infty$。

对于 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=+\infty$，所以 $\exists N\in N$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}>\varepsilon$。与上述论证类似地有 $y_n-y_{n+p}>\varepsilon(x_n-x_{n+p})$。当 $p\to+\infty$ 时，由 $y_{n+p}\to0$，$x_{n+p}\to0$，得到 $y_n>\varepsilon x_n$，即 $\frac{y_n}{x_n}>\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=+\infty$。

(3) $A=-\infty$。

证明过程与 2.2 (2)的证明过程类似，此处省略。

以上即是对 Stolz 公式的说明以及证明，当然 Stolz 公式除了它本身的特点外及意义外，它在数列极限的运算，特别是一些和式数列极限的运算中有着特别重要的作用，不仅能简便运算，而且有的数列极限只能用 Stolz 公式来进行计算，下面就将通过几个数列极限的典型例题来对 Stolz 公式在数列极限中的应用进行讨论。

3. Stolz 公式在数列极限中的应用

在数学分析中极限占据了一个非常重要的地位，可以说极限是整个数学分析的基础。因此，如何求解极限就是一个根本性的问题。再者，在经过大量的极限运算以后我们知道等价无穷小代换和洛必达法

则是求解函数极限的有力工具，而 Stolz 公式相当于是洛必达法则的离散形式，所以它可以使得一些比较难以运算的数列极限变得特别简单，同时在处理某些函数极限的时候也非常的有用，下面将给出一些具体例子。

例 1.若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ (a 为常数)，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$。

(1). **解法一**：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，于是对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N$，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。当 $n>N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{1}{n}\left[(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)\right]\right| \\ &\le \frac{1}{n}\left(|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|\right) \\ &< \frac{1}{n}N_1M+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon<\frac{1}{n}N_1M+\varepsilon\end{aligned}$$

其中 $M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\cdots,|a_n-a|\}$，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_1M}{n}>0$，所以对于上述的 ε，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $\left|\dfrac{N_1M}{n}-0\right|=\dfrac{N_1M}{n}<\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$，故根据数列定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a。$$

通过这道例题可以看出如果按照最原始的方法来解题，过程难免过于繁琐，观察式子我们会发现该式子符合*/∞型 Stolz 公式，所以可以运用 Stolz 公式来进行求解，Stolz 公式正好适用于该类分数形式的数列极限的运算，可以使计算变得简便。

解法二：(用 Stolz 公式解答)

令 $y_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$x_n=n$ 由于 $\{x_n\}$ 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则根据 Stolz 定理有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}\\ &=\lim_{n\to\infty}a_n=a\end{aligned}$$

(3)式是∞/*型，不能直接利用 Stolz 公式来进行求解，所以应该把式子先进行求倒数，使其转化为*/∞型，再直接用 Stolz 公式进行求解。

解：令 $y_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，$x_n=n$，则数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，由 Stolz 公式可得：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)}{n-(n-1)} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a\text{。}$$

通过这两个小问会发现运用 Stolz 定理就是要去找到符合 Stolz 定理条件的 x_n 和 y_n，第一问可以直接找到 x_n 和 y_n，所以可以直接利用 Stolz 公式，而第二问不能直接找到 x_n 和 y_n，必须根据数列本身的特点去构造新的数列，找到符合定理条件的 x_n 和 y_n，再利用 Stolz 公式进行求解。

例 2.证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ （a 为有限数或 $\pm\infty$），$p_n>0$ （$n=1,2,\cdots$）且 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1+p_2+\cdots+p_n)=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_1a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$。

证明令 $y_n=p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$，$x_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$，又已知 $\{x_n\}$ 严格单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，所以根据 Stolz 公式有：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_1a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(p_1a_1+p_1a_2+\cdots+p_na_n)-(p_1a_1+p_1a_2+\cdots+p_{n-1}a_{n-1})}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{p_na_n}{p_n}
\end{aligned}$$

因为 $p_n>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_na_n}{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$。

4. 结论

本文先用分类讨论的方法证明了 Stolz 定理，并通过具体的实例对 Stolz 公式在数列不定式极限中的应用进行了说明。Stolz 公式适用于分式极限的求解，但是在应用该定理时要特别注意一点，一定要先验证所求式子对定理的各个条件是否满足，如果满足条件，那么在同一个题目中，Stolz 公式就可以直接或一直使用；如果不满足条件，就要先对式子进行变形，使其满足定理的条件后，再用 Stolz 公式进行求解。对于可导函数来说，可直接利用洛必达法则进行求解比较简单，但对于某些不可导的情况，运用 Stolz 公式求解便可以避免不可导的“尴尬”，也就是说可以直接对 Stolz 公式进行推广，推广到函数极限的情况，相比于洛必达法则来说有些问题使用 Stolz 公式可变得更为简单，此定理为推广不可导函数的待定式

的极限提供了一种非常有效的方法。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[3] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[4] 钱吉林. 数学分析解题精粹[M]. 武汉: 崇文书局, 2003.

[5] 王少英, 刘文菡. Stolz 定理的证明和推广[J]. 新乡学院学报(自然科学版), 2009, 26(4): 11-12.

[6] 冯文娴, 付艳芳. Stolz 定理在求极限中的应用[J]. 价值工程, 2013, 32(26): 2.

[7] 邸聪娜, 李民良, 任蕴丽. Stolz 定理的应用[J]. 科学信息, 2009(18): 1.

[8] 韩丹. Stolz 定理的证明及其在极限求解中的应用[J]. 大连教育学院学报, 1999(3): 3.