Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 54-61
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121008

Hans汉斯

θ-型Calderón-Zygmund算子与Lipschitz函数生成的交换子的有界性

朱晓朦

牡丹江师范学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2021年12月3日；录用日期：2022年1月11日；发布日期：2022年1月18日

摘 要

本文研究了θ-型Calderón-Zygmund算子与Lipschitz函数$b\in\dot{\Lambda}_\gamma\left(\mathbb{R}^n\right)$生成的交换子，当$\theta$满足一类Dini条件时，证明了交换子在$\gamma=\beta+n/p$时是从Lebesgue空间$L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$到Campanato空间$C^{p,\beta}\left(\mathbb{R}^n\right)$有界的。

关键词

θ-型Calderón-Zygmund算子，交换子，Lipschitz空间，Campanato空间

Boundedness of Commutators with θ-Type Calderón-Zygmund Operators and Lipschitz Function

Xiaomeng Zhu

Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Dec. 3rd, 2021; accepted: Jan. 11th, 2022; published: Jan. 18th, 2022

Abstract

In this paper, we consider the boundedness of commutators with θ-type Calderón-Zygmund Operators and Lipschitz Function $b\in\dot{\Lambda}_\gamma\left(\mathbb{R}^n\right)$. When θ satisfies a class of Dini type conditions, it is

文章引用: 朱晓朦. θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 54-61. DOI: 10.12677/pm.2022.121008

proved that commutators are bounded from Lebesgue spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ to Campanato spaces $C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)$ when $\gamma=\beta+n/p$.

Keywords

θ-Type Calderón-Zygmund Operators, Commutators, Lipschitz Spaces, Campanato Spaces

1. 引言与结果

设 T 为经典 Calderón-Zygmund 算子，b 为局部可积函数，把 T 与 b 生成的交换子定义为

$$T_b(f)=bT(f)-T(bf). \tag{1}$$

1976 年，Coifman，Rochberg 和 Weiss [1]证明了当 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 时，交换子 T_b 的 L^p 有界性 $(1<p<\infty)$，并利用交换子的有界性给出了 BMO 空间的一种等价刻画。1995 年，Pérez [2]建立了交换子 T_b 当 $p=1$ 时的 $L\log L$ 型的弱型估计。

1978 年，Janson [3]证明了当 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ 时交换子 T_b 的 (L^p,L^q) 有界性，其中 $1<p<\infty$，$0<\gamma<1$，$1/q=1/p-\gamma/n$。1995 年，Paluszyński [4]在 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ 时建立了交换子 T_b 从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间的有界性，由此可以给出 Lipschitz 空间的等价刻画。2015 年，Zhang，Shi，Huang [5]证明了 T 与 Lipschitz 函数生成的交换子是从 Lebesgue 空间到 Campanato 空间的有界性。

另一方面，自 20 世纪 50 年代 Calderón 和 Zygmund 引入高维奇异积分算子以来，$\mathbb{R}^n$ 上的 Calderón-Zygmund 算子及其各种推广得到了广泛研究。1985 年，Yabuta [6]在研究 Coifman 和 Meyer [7]提出的一些伪微分算子时，引入了如下定义的 θ-型 Calderón-Zygmund 算子，并研究了这类算子在各种函数空间的加权有界性。

定义 1.1 [6]设 θ 是 $(0,\infty)$ 上的非负非减函数且 $\int_0^1\theta(t)t^{-1}\mathrm{d}t<\infty$，称定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{(x,x):x\in\mathbb{R}^n\}$ 上的可测函数 $K(x,y)$ 是一个 θ-型核，如果

(i) $|K(x,y)|\le C|x-y|^{-n}$，当 $x\neq y$ 时；

(ii) 当 $2|x-z|<|x-y|$ 时

$$|K(x,y)-K(z,y)|+|K(y,x)-K(y,z)|\le C|x-y|^{-n}\theta\left(\frac{|x-z|}{|x-y|}\right).$$

称线性算子 $T:S(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n)$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子，如果

(iii) T 能扩张成从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的有界线性算子；

(iv) 存在一个 θ-型核 $K(x,y)$，使得对所有的 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，成立

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{supp} f,$$

其中 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的无穷次可微函数空间。

显然，θ-型 Calderón-Zygmund 算子是经典 Calderón-Zygmund 算子的推广，当 $\theta(t)=t^\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ 时，θ-型 Calderón-Zygmund 算子就是经典 Calderón-Zygmund 算子。

以下总是用 T 表示 θ-型 Calderón-Zygmund 算子。设 b 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数，把 T 和 b 生成的交换子定义为

$$T_b(f)=bT(f)-T(bf).$$

近二十几年来，θ-型 Calderón-Zygmund 算子的交换子也得到了深入研究。2002 年，Liu 和 Lu [8]建立了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的交换子的 $L\log L$ 型的弱型估计。2005 年，张和徐[9]建立了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的高阶交换子的加权尖锐估计。

2006 年，程和束[10]证明了当 b 为 Lipschitz 函数时交换子 T_b 的 (L^p,L^q) 有界性以及从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间的有界性。

受 Zhang，Shi，Huang [5]的启发，本文将研究 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子从 Lebesgue 空间到 Campanato 空间的有界性。为叙述我们的定理，首先回忆几个定义。

以下我们约定，用 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的球体，$B(x_0,r)$ 表示以 x_0 为中心，以 r 为半径的球体。用 $|B|$ 表示球 B 的 Lebesgue 测度，对 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f，记 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$。

定义 1.2 令 $0<\gamma<1$，如果存在一个常数 $C<\infty$，使得对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$，有

$$|b(x)-b(y)|\le C|x-y|^\gamma, \tag{2}$$

称函数 b 属于 Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)$。将满足(2)式的最小常数 C 定义为 b 的模，并记为 $\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}$。

定义 1.3 设 $1\le p<\infty$，$-n/p\le\beta<1$，Campanato 空间 $C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n),\|f\|_{C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)}:=\sup_B\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

这里的上确界遍取 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球体 B。

本文的定理如下。

定理 1.1 设 T 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子且 θ 满足 $\int_0^1\theta(t)t^{-1}\mathrm{d}t<\infty$。设 $1<p<\infty$，$-n/p\le\beta<0$，$0<\gamma=\beta+n/p<\min\{1,n/p\}$。如果 $b\in\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)$，则 T_b 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。即存在常数 $C>0$，使对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，有

$$\|T_b(f)\|_{C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. 引理

为证明定理，我们需要下面的引理。

引理 2.1 [4]令 $1\le p\le\infty$，$0<\gamma<1$。那么有

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_B \frac{1}{|B|^{1+\gamma/n}} \int_B |f(x) - f_B| \mathrm{d}x \approx \sup_B \left(\frac{1}{|B|^{1+p\gamma/n}} \int_B |f(x) - f_B|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

对于 $p = \infty$，

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_B \frac{1}{|B|^{\gamma/n}} \sup_{x \in B} |f(x) - f_B|.$$

引理 2.2 [6]设 T 是定义 1.1 中所述的 θ-型 Calderón-Zygmund 算子。如果 $1 < p < \infty$ 且 $\omega \in A_p$，那么存在常数 $C(p,\omega) > 0$，使对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，有

$$\|Tf\|_{L^p(\omega)} \le C(p,\omega)\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

引理 2.3 [11]假设 $\tilde{B}$ 和 B 为 $\mathbb{R}^n$ 上的两个球且 $\tilde{B} \subset B$。设 $0 < \gamma < 1$，则对 $f \in \dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)$，有

$$|f_{\tilde{B}} - f_B| \le C\|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)} |B|^{\gamma/n}.$$

3. 定理的证明

对于任意的球 B，假设球 B 的球心为 x_0，半径为 r。对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，需要估计

$$\frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - (T_b f)_B|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

用 $B^* = 8B$ 表示球 B 的 8 倍同心扩张，令 $f_1 = f\chi_{B^*}$，$f_2 = f - f_1$。则对任何实数 c，由 Minkowski 和 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - (T_b f)_B|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - c + c - (T_b f)_B|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| T_b f(y) - c - \frac{1}{|B|} \int_B (T_b f(z) - c) \mathrm{d}z \right|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \\
&\le \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - c|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left| \frac{1}{|B|} \int_B (T_b f(z) - c) \mathrm{d}z \right|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \\
&\le \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - c|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(z) - c| \mathrm{d}z \\
&\le \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - c|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(z) - c|^p \mathrm{d}z \right)^{1/p} \\
&\le \frac{2}{|B|^{\beta/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T_b f(y) - c|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

取 $c = -\left(T\left((b - b_B) f_2\right)\right)_B$ 并注意到 $T_b f = T_{b-b_B} f$，得

$$\frac{1}{|B|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|T_b f(y)-(T_b f)_B\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

$$\le \frac{2}{|B|^{\beta/n+1/p}}\left(\int_B\left|T_{b-b_B} f(y)+\left(T\left((b-b_B)f_2\right)\right)_B\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

$$\le \frac{2}{|B|^{\beta/n+1/p}}\left(\int_B\left|(b(y)-b_B)Tf(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}+\frac{2}{|B|^{\beta/n+1/p}}\left(\int_B\left|T\left((b-b_B)f_1\right)(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

$$+\frac{2}{|B|^{\beta/n+1/p}}\left(\int_B\left|T\left((b-b_B)f_2\right)(y)-\left(T\left((b-b_B)f_2\right)\right)_B\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

$$:= I_1+I_2+I_3$$

对 I_1，注意到 $1<p<\infty$ 和 $0<\gamma<1$，根据引理 2.1 和引理 2.2，得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|(b(y)-b_B)Tf(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\|b-b_B\|_{L^\infty}\left(\int_B|Tf(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\|b-b_B\|_{L^\infty}\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

下面估计 I_2。根据引理 2.1，引理 2.2，引理 2.3 有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|T\left((b-b_B)f_1\right)(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left\|T\left((b-b_B)f_1\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\left\|(b-b_B)f_1\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\left\|(b-b_B)f\chi_{B^*}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\left\|(b-b_B)f\chi_{B^*}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\left\|b-b_{B^*}\right\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p(B^*)}+\frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\left|B^*\right|^{\gamma/n}\|f\|_{L^p(B^*)} \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

接下来估计 I_3。对于任意的 $\omega, y\in B=B(x_0,r)$，当 $z\in 2^k B^*\setminus 2^{k-1}B^*\ (k=1,2,\cdots)$ 时，有

$$2|y-\omega|<|y-z| \text{ 和 } \frac{|y-\omega|}{|y-z|}<2^{-k}.$$

因为θ为非减函数，所以有$\theta\left(\frac{|y-\omega|}{|y-z|}\right)<\theta\left(2^{-k}\right)$。于是

$$\begin{aligned}
&\left|T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(y)-T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(\omega)\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\left|K(y,z)-K(\omega,z)\right|\left|\left(b(z)-b_B\right)f_2(z)\right|\mathrm{d}z \\
&\le \int_{\left(B^*\right)^c}\left|K(y,z)-K(\omega,z)\right|\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&\le C\int_{\left(B^*\right)^c}\theta\left(\frac{|y-\omega|}{|y-z|}\right)\frac{1}{|y-z|^n}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kB^*\setminus 2^{k-1}B^*}\theta\left(\frac{|y-\omega|}{|y-z|}\right)\frac{1}{|y-z|^n}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kB^*}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(y)-\left(T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)\right)_B\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&= \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|\frac{1}{|B|}\int_B T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(y)-T\left(\left(b-b_B\right)f_2\right)(\omega)\mathrm{d}\omega\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{2}{|B|^{\gamma/n}}\left(\int_B\left|\frac{1}{|B|}\int_B C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kB^*}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}\omega\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\gamma/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^kB^*}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\left(\int_B\left|\frac{1}{|B|}\int_B\mathrm{d}\omega\right|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\int_{2^kB^*}\left|b(z)-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\int_{2^kB^*}\left|b(z)-b_{2^kB^*}\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&+\frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta\left(2^{-k}\right)}{\left|2^kB^*\right|}\int_{2^kB^*}\left|b_{2^kB^*}-b_B\right|\left|f(z)\right|\mathrm{d}z \\
&:= I_{3,1}+I_{3,2}
\end{aligned}$$

下面的估计会用到以下不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\theta\left(2^{-k}\right)\le C\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty. \tag{3}$$

对于$I_{3,1}$，使用 Hölder 不等式，引理 2.1 和(3)式，有

$$
\begin{aligned}
I_{3,1} &= \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}\int_{2^kB^*}|b(z)-b_{2^kB^*}||f(z)|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}\|b-b_{2^kB^*}\|_{L^\infty}\int_{2^kB^*}|f(z)|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}|2^kB^*|^{\gamma/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{2^kB^*}|f(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\left(\int_{2^kB^*}\mathrm{d}z\right)^{1/p'} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(2^{-k})|2^kB^*|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{2^kB^*}|f(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p} \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(2^kB^*)}\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k+3)\beta}\theta(2^{-k}) \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(2^{-k}) \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

对于 $I_{3,2}$，使用 Hölder 不等式，引理 2.3 和(3)式，有

$$
\begin{aligned}
I_{3,2} &= \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}\int_{2^kB^*}|b_{2^kB^*}-b_B||f(z)|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}|2^kB^*|^{\gamma/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\int_{2^kB^*}|f(z)|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-k})}{|2^kB^*|}|2^kB^*|^{\gamma/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{2^kB^*}|f(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}\left(\int_{2^kB^*}\mathrm{d}z\right)^{1/p'} \\
&\le \frac{C}{|B|^{\beta/n}}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(2^{-k})|2^kB^*|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(2^kB^*)} \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k+3)\beta}\theta(2^{-k}) \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(2^{-k}) \\
&\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

综合以上讨论，便可得到 $\|T_b(f)\|_{C^{p,\beta}(\mathbb{R}^n)}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$。

定理证毕。

基金项目

黑龙江省省属本科高校中央支持地方高校改革发展资金(优秀青年人才)项目(No. 2020YQ07)；牡丹江师范学院科研团队项目(D211220637)。

参考文献

[1] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954

[2] Pérez, C. (1995) Endpoint Estimates for Commutators of Singular Integral Operators. *Journal of Functional Analysis*,

128, 163-185. https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1027

[3] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[4] Paluszyński, M. (1995) Characterization of the Besove Spaces via the Commutator Operator of Coifman Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-17. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[5] Zhang, L., Shi, S.G. and Huang, H. (2015) New Characterizations of Lipschitz Space via Commutors on Morrey Spaces. *Advances in Mathematics* (*China*), **44**, 899-907.

[6] Yabuta, K. (1985) Generalizations of Calderón-Zygmund Operators. *Studia Mathematica*, **82**, 17-31. https://doi.org/10.4064/sm-82-1-17-31

[7] Coifman, R.R. and Meyer, Y. (1978) Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque. Soc. Math. France, Paris.

[8] Liu, Z.G. and Lu, S.Z. (2002) Endpoint Estimates for Commutators of Calderón-Zygmund Type Operators. *Kodai Mathematical Journal*, **25**, 79-88. https://doi.org/10.2996/kmj/1106171078

[9] 张璞，徐罕. Calderón-Zygmund 型算子交换子的加权尖锐估计[J]. 数学学报, 2005, 48(4): 625-636.

[10] 程美芳，束立生. θ 型 Calderón-Zygmund 奇异积分算子交换子在 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性[J]. 数学研究, 2006, 39(4): 375-378.

[11] DeVore, R.A. and Sharpley, R.C. (1984) Maximal Functions Measuring Smoothness. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **47**, 4-113. https://doi.org/10.1090/memo/0293