

多目标优化控制问题可行解的存在性

袁嘉宁

西南交通大学数学学院, 四川 成都

收稿日期: 2021年12月7日; 录用日期: 2022年1月13日; 发布日期: 2022年1月20日

摘要

本文主要考虑在欧式空间中, 控制集合是一般可分度量空间的情况下, 初始和终端状态满足等式和不等式约束的多目标优化控制问题。讨论其可行解的存在条件, 并用不动点定理证明。

关键词

多目标优化控制问题, 终端约束, 可行解

Existence of the Feasible Solutions for Multiobjective Optimal Control Problems

Jianing Yuan

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Dec. 7th, 2021; accepted: Jan. 13th, 2022; published: Jan. 20th, 2022

Abstract

In this paper, we are devoted to considering the existence of the feasible solutions for multiobjective optimal control problems on Euclidean space, where the endpoints satisfy some equality and inequality type constraints, and the control set is a separable metric space. And we prove it with the fixed point theorem.

Keywords

Multiobjective Optimal Control Problem, Endpoints-Constraint, Feasible Solution



1. 引言

令 $n, r, j, k \in \mathbb{N}$, $T > 0$, U 是度量空间。记 \mathbb{R}^n 为 n 维欧式空间, $W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n)$ 为从 $[0, T]$ 映到 \mathbb{R}^n 的绝对连续函数集合, \mathcal{U} 为从 $[0, T]$ 映到 U 的可测函数集合。给定映射 $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi_0 = (\phi_{-r}, \phi_{-r+1}, \dots, \phi_{-1})^T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad \phi = (\phi_{-r}, \phi_{-r+1}, \dots, \phi_{-1}, \phi_1, \dots, \phi_j)^T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r+j},$$

$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, 考虑如下控制系统:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), a.e. t \in [0, T] \quad (1)$$

其中 $u(\cdot) \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m) \cap \mathcal{U}$, $x(\cdot) \in W^{1,1}([0, T], \mathbb{R}^n)$ 且满足端点约束

$$\begin{cases} \phi_i(x(0), x(T)) \leq 0, i = 1, \dots, j \\ \psi(x(0), x(T)) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

对于上述系统, 记 \mathcal{P} 为所有可行解的集合, 即

$\mathcal{P} = \{(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U} \times W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^n) \mid (x(\cdot), u(\cdot)) \text{ 满足 (1)(2)}\}$, 其中 $u(\cdot)$ 为可行控制, $x(\cdot)$ 为可行轨线。记 \mathcal{U}_{ad} 为所有可行控制的集合。

与上述控制系统相关的优化控制问题:

(MCP) 最小化性能指标(目标函数)

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \triangleq \phi_0(x(0), x(T)) \quad (3)$$

当 $r=1$ 时, (MCP) 为单目标优化控制问题, 当 $r>1$ 时为多目标优化控制问题。生活中优化控制的数学模型大都是多目标优化控制问题, 例如[1]中考虑的三位水平井设计优化问题就是两个目标的优化控制问题; [2]中废水管理的数学模型所用到的优化控制问题有不止一个目标函数。力学和经济学领域也出现了多目标优化控制问题, 为解决此类问题, 研究多目标优化控制问题的优化条件是必要的, 而在研究这些条件之前, 我们必须保证解的存在性。

如今对于多目标优化控制问题的研究大部分对控制集合 U 是有凸性、闭性或其他要求的, 例如[3] [4] [5] [6] [7] [8] 及其中的参考文献。这就使得结论的适用性非常局限, 因为生活中的数学问题大多没有这么好的条件。在本篇论文中, 我们只需要 U 是可分度量空间, 来研究这种情况下具有端点约束的多目标优化控制问题可行解的存在性。

此篇论文结构如下: 第二部分为主要结论做准备, 给出需要的假设、定义和引理; 第三部分叙述主要结论; 第四部分证明此结论。

2. 准备

首先我们给出定理需要的假设:

(C1) U 是一个可分的度量空间;

(C2) 映射 $f(= f(t, x, u)): [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于 t 可测, 关于 x 是 C^1 的, 关于 u 连续。映射

$\phi(=\phi(x_1, x_2)): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r+j}$ 和 $\psi(=\psi(x_1, x_2))=(\psi_1, \dots, \psi_k)^T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是 C^1 的。且存在常数 $K > 0$, 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, s. t.

$$\begin{aligned} |f(t, x, u) - f(t, \hat{x}, u)| &\leq K|x - \hat{x}|, \\ |\phi(x_1, x_2) - \phi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)| &\leq K(|x_1 - \hat{x}_1| + |x_2 - \hat{x}_2|), \\ |\psi(x_1, x_2) - \psi(\hat{x}_1, \hat{x}_2)| &\leq K(|x_1 - \hat{x}_1| + |x_2 - \hat{x}_2|), \\ |f(t, x_0, u)| &\leq K \end{aligned}$$

对于任意的 $(t, u) \in [0, T] \times U$, 任意的 $x, \hat{x}, x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

接下来给出一些定义和记号:

Definition 2.1: 我们称可行解 $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{P}$ 为(MCP)的弱有效最优解, 如果不存在可行解 $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{P}$, s. t. $\phi_i(x(0), x(T)) < \phi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)), i \in \{-r, \dots, -1\}$ 。

在这一部分里我们假设 $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 是(MCP)的弱有效最优解。为了方便, 对于任意定义在 $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times U$ 上的映射 φ , 我们记 $\varphi[t] = \varphi(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), a.e. t \in [0, T]$ 。

关于 $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, 我们令 $I_{A_0} = \{i \in 1, \dots, j \mid \phi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) = 0\} \cup \{-r, \dots, -1\}$, $I_N = \{1, \dots, j\} \setminus I_{A_0}$ 。

接下来给出证明主要结论需要用到的引理。

Lemma 2.1: 令集合 $F = \{\nabla_x \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T))W + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T))X_{u,W}(T), \forall W \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}\}$,

其中 $X_{u,W}(\cdot)$ 对于 a.e. $t \in [0, T]$ 满足

$$\begin{cases} \dot{X}_{u,W}(t) = \nabla_x f[t]X_{u,W}(t) + f(t, \bar{x}(t), u(t)) - f[t], \\ X_{u,W}(0) = W, \forall W \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (4)$$

则 F 是凸集。

证明: 令 $R(T) = \{X_{u,W}(T) \mid W \in \mathbb{R}^n, u(\cdot) \in \mathcal{U}\}$, 显然我们只需要证明 $R(T)$ 是凸集。

对于 $\forall u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}, W_1, W_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, 下证 $\alpha X_{u_1, W_1}(T) + (1-\alpha)X_{u_2, W_2}(T) \in R$ 。

由(4)式, $X_{u_j, W_j}(T) = W_j + \int_0^T (\nabla_x f[s]X_{u_j, W_j}(s) + f(s, \bar{x}(s), u_j(s)) - f[s])ds$, $j = 1, 2$ 。

$$\alpha X_{u_1, W_1}(T) + (1-\alpha)X_{u_2, W_2}(T)$$

$$\text{则} = \alpha W_1 + (1-\alpha)W_2 + \int_0^T (\nabla_x f[s]X_{u_2, W_2}(s) + f(s, \bar{x}(s), u_2(s)) - f[s])ds$$

$$+ \alpha \int_0^T (\nabla_x f[s](X_{u_1, W_1}(s) - X_{u_2, W_2}(s)) + f(s, \bar{x}(s), u_1(s)) - u_2(s))ds$$

由 Liapounoff 定理, $\exists E \subseteq [0, T]$, $|E| = \alpha T$, s. t.

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^T (\nabla_x f[s](X_{u_1, W_1}(s) - X_{u_2, W_2}(s)) + f(s, \bar{x}(s), u_1(s)) - u_2(s))ds \\ &= \int_{[0, T] \cap E} (\nabla_x f[s](X_{u_1, W_1}(s) - X_{u_2, W_2}(s)) + f(s, \bar{x}(s), u_1(s)) - u_2(s))ds \end{aligned}$$

$$\text{令 } X_{u,W}(t) = \begin{cases} X_{u_1, W_1}(t), & t \in E \\ X_{u_2, W_2}(t), & t \in [0, T] \setminus E \end{cases}, \quad u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in E \\ u_2(t), & t \in [0, T] \setminus E \end{cases},$$

$$\exists W = \alpha W_1 + (1-\alpha)W_2 \in \mathbb{R}^n, \text{ s. t.}$$

$$\alpha X_{u_1, W_1}(T) + (1 - \alpha) X_{u_2, W_2}(T) = W + \int_0^T (\nabla_x f[s] X_{u, W}(s) + f(s, \bar{x}(s), u(s)) - f[s]) ds \in R(T).$$

因此 $R(T)$ 是凸集, 故 F 是凸集。证毕。

Lemma 2.2: 若 $0 \in \text{Int } F$, 其中 $\text{Int } F$ 是集合 F 的内部, 则 $\exists \delta_0 > 0$,

$$\exists (u_1(\cdot), W_1), \dots, (u_{k+1}(\cdot), W_{k+1}) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n, \text{ s.t.}$$

$B(\delta_0) \subseteq \text{co} \left\{ \nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right\}_{\eta=1}^{k+1}$, 其中 $\text{co } A$ 记为集合 A 的凸包, $X_{u_\eta, W_\eta}(\cdot)$ 是(4)式中 (u, W) 替换为 (u_η, W_η) 的解。

证明: 事实上, 由 $0 \in \text{Int} \left\{ \nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u, W}(T) \right\} \subseteq \mathbb{R}^k$,

$\exists (u_1(\cdot), W_1), \dots, (u_{k+1}(\cdot), W_{k+1}) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ 满足 $(u_2 - u_1, W_2 - W_1), \dots, (u_{k+1} - u_1, W_{k+1} - W_1)$ 线性无关, 使得 $\exists \delta_0 > 0$, 且 $B(\delta_0) \subseteq \text{co} \left\{ \nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right\}_{\eta=1}^{k+1}$ 。

Lemma 2.3: 对于 $\varepsilon > 0$, $\exists E_\varepsilon \subseteq [0, T]$, 令 $u^\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t), & t \in E_\varepsilon \\ \bar{u}(t), & t \notin E_\varepsilon \end{cases}$, 相应的 $x^\varepsilon(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{x}^\varepsilon(t) = f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)), & a.e. t \in [0, T] \\ x^\varepsilon(0) = \bar{x}(0) + \varepsilon W \end{cases}, \quad (5)$$

且 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^\varepsilon(t) = \bar{x}(t)$ 。则 $x^\varepsilon(t) - \bar{x}(t) = \varepsilon X_{u, W}(t) + o(\varepsilon)$ 。

证明: 由(5)式, $x^\varepsilon(t) = \bar{x}(0) + \varepsilon W + \int_0^t f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds$,

由状态方程(1), $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \int_0^t f[s] ds$ 。记

$$\begin{aligned} y^\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon} (x^\varepsilon(t) - \bar{x}(t)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon W + \int_0^t f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds - \int_0^t f[s] ds \right) \\ &= W + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (f(s, x^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) - f(s, \bar{x}(s), u^\varepsilon(s))) ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (f(s, \bar{x}(s), u^\varepsilon(s)) - f[s]) ds \\ &= W + \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial f(s, \bar{x}(s) + \tau(x^\varepsilon(s) - \bar{x}(s)), u^\varepsilon(s))}{\partial x} y^\varepsilon(s) d\tau ds \\ &\quad + \int_0^t (f(s, \bar{x}(s), u(s)) - f[s]) ds + \frac{1}{\varepsilon} \gamma(t) \end{aligned}$$

其中, $\|\gamma(t)\| \leq \varepsilon^2$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 此时 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^\varepsilon(t) = X_{u, W}(t)$ 。

故有 $x^\varepsilon(t) - \bar{x}(t) = \varepsilon X_{u, W}(t) + o(\varepsilon)$ 。证毕。

3. 主要结论

这一部分中, 我们给出可行控制的存在性定理, 也就是本文主要结论。

Theorem 3.1: 假设(C1)-(C2)成立, $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 是(MCP)的弱有效最优解。若 $0 \in \text{Int } F$, 则一定能在 $\bar{u}(\cdot)$ 附近找到可行控制。即: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists u_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$, 满足 $d(\bar{u}(\cdot), u_\varepsilon(\cdot)) < \delta, \text{ s.t.}$

$$\|u_c^\varepsilon(\cdot) - \bar{u}(\cdot)\|_{L^\infty} < \varepsilon.$$

Remark 3.1: 可行控制的存在性即为可行解的存在性。

4. 证明主要结论

这一部分我们应用第二部分的几个引理和不动点定理证明 Theorem 3.1。

Proof: Step 1. 对于 $\forall \alpha > 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$, s. t. 对 $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\exists E_\varepsilon \subset [0, T]$ 满足 $|E_\varepsilon| = \varepsilon T$, 使得下述性质成立:

(i) 对于任意的 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{k+1})^T$ 满足

$$\nu_\eta \geq 0, \quad \eta = 1, \dots, k+1; \quad \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta = 1 \quad (6)$$

$\exists E_\nu^1, \dots, E_\nu^{k+1} \subset [0, T]$, $\exists L > 0$ 使得

$$\begin{aligned} |E_\nu^\eta| &= \nu_\eta T, \\ \bigcup_{\eta=1}^{k+1} E_\nu^\eta &= [0, T], \\ E_\nu^p \cap E_\nu^q &= \emptyset, \quad \text{if } p \neq q, \\ \sum_{\eta=1}^{k+1} H(E_\nu^\eta, E_{\hat{\nu}}^\eta) &\leq L|\nu - \hat{\nu}| \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_{k+1})^T$ 满足(6)。

(ii) 令 $u_\nu^\varepsilon(t) = \sum_{\eta=1}^{k+1} I_{E_\nu^\eta \cap E_\varepsilon^c}(t) u_\eta(t) + I_{E_\varepsilon^c}(t) \bar{u}(t)$, 即 $u_\nu^\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{\eta=1}^{k+1} I_{E_\nu^\eta}(t) u_\eta(t), & t \in E_\varepsilon \\ \bar{u}(t), & t \notin E_\varepsilon \end{cases}$ 。记 $x_\nu^\varepsilon(\cdot)$ 是以 $u_\nu^\varepsilon(\cdot)$ 为

控制, 以 $\bar{x}(0) + \varepsilon \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta W_\eta$ 为初值的轨线, 则由 Lemma 2.3,

$$\left| x_\nu^\varepsilon(t) - \bar{x}(t) - \varepsilon X_{\sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta u_\eta, \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta W_\eta}(t) \right| < \frac{\alpha}{2} \varepsilon. \quad (8)$$

与([6] Lemma 4.5)中的证明相似, 我们可以证明 $\left| X_{\sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta u_\eta, \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta W_\eta}(t) - \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta X_{u_\eta, W_\eta}(t) \right| < \frac{\alpha}{2}$, 则(8)式为

$$\left| x_\nu^\varepsilon(t) - \bar{x}(t) - \varepsilon \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta X_{u_\eta, W_\eta}(t) \right| < \alpha \varepsilon. \quad (9)$$

Step 2. 对于给定的 $\alpha > 0$, 存在 $\tilde{\varepsilon}_0 \in (0, \varepsilon_0]$, 使得 $\forall \varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}_0]$ 和 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{k+1})^T$ 满足(6)式, 有

$$\left| \psi(x_\nu^\varepsilon(0), x_\nu^\varepsilon(T)) - \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) - \varepsilon \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right| \leq \alpha \varepsilon.$$

证明过程与([6] Lemma 4.5)相似。

Step 3. 由 Lemma 2.2 及上述证明过程, 我们有

$$\left| \varepsilon^{-1} \left(\psi(x_\nu^\varepsilon(0), x_\nu^\varepsilon(T)) - \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \right) - \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right| \leq \delta_0$$

定义映射

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: co \left\{ \nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right\}_{\eta=1}^{k+1} \\ &\rightarrow co \left\{ \nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right\}_{\eta=1}^{k+1} \\ \mathcal{F} &\left(\sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right) \\ &= -\tilde{\varepsilon}_0^{-1} \left(\psi(x_{v_0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(0), x_{v_0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(T)) + \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right) \end{aligned}$$

由 Brouwer 不动点定理, $\exists v^0 = (v_0^1, \dots, v_0^{k+1})^T$ 满足(6)使得

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\left(\sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta^0 \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right) \\ &= -\tilde{\varepsilon}_0^{-1} \left(\psi(x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(0), x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(T)) + \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta^0 \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \right) \\ &= \sum_{\eta=1}^{k+1} \nu_\eta^0 \left(\nabla_1 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W_\eta + \nabla_2 \psi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u_\eta, W_\eta}(T) \right) \end{aligned}$$

故有 $\psi(x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(0), x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(T)) = 0$ 。

另一方面, 当 $i \in I_N$ 时, $\phi_i(x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(0), x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(T)) = \phi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + O(\varepsilon) < 0$,

当 $i \in I_{A_0}$ 时 $\phi_i(x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(0), x_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(T)) = \varepsilon \left(\nabla_1 \phi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) W + \nabla_2 \phi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) X_{u, W}(T) \right) + O(\varepsilon^2) < 0$ 。

这就说明 $u_{v_0^0}^{\tilde{\varepsilon}_0}(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ 。证毕。

参考文献

- [1] Yu, Y.S. and Liu, C.Y. (2007) Optimization of Multi-Objective Optimal Control Problems and Its Application in Designing of Horizontal Well. *Journal of Lanzhou University of Technology*, **33**, 4.
- [2] Alvarez-Vazquez, L.J., Garcia-Chan, N., Martinez, A. and Vazquez-Mendez, M.E. (2010) Multi-Objective Pareto-Optimal Control: An Application to Wastewater Management. *Computational Optimization Applications*, **46**, 135-157. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9190-9>
- [3] Kien, B.T., Wong, N.-C. and Yao, J.-C. (2018) Necessary Conditions for Multi-Objective Optimal Control Problem with Free End-Time. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **56**, 4069-4097. <https://doi.org/10.1137/17M1161750>
- [4] Kaya, C.Y. and Maurer, H. (2014) A Numerical Method for Nonconvex Multi-Objective Optimal Control Problems. *Computational Optimization and Applications*, **57**, 685-702. <https://doi.org/10.1007/s10589-013-9603-2>
- [5] Zhu, Q.J. (2000) Hamiltonian Necessary Conditions for a Multiobjective Optimal Control Problem with Endpoint Constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **39**, 97-112. <https://doi.org/10.1137/S0363012999350821>
- [6] Deng, L. and Zhang, X. (2021) Second Order Necessary Conditions for Endpoints-Constrained Optimal Control Problems on Riemannian Manifolds. *Journal of Differential Equations*, **272**, 854-910. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.10.005>
- [7] Bellaassali, S. and Jourani, A. (2004) Necessary Optimality Conditions in Multiobjective Dynamic Optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **42**, 2043-2061. <https://doi.org/10.1137/S0363012902406576>
- [8] Ngo, T.-N. and Hayek, N. (2017) Necessary Conditions of Pareto Optimality for Multiobjective Optimal Control Problems under Constraints. *Optimization*, **66**, 149-177. <https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1261349>