Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 125-131
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121017

集值广义强向量拟均衡问题系统解的本质连通区

何　芳[*]，陈剑尘，邢秋菊

南昌航空大学，数学与信息科学学院，江西　南昌

收稿日期：2021年12月11日；录用日期：2022年1月17日；发布日期：2022年1月24日

摘　要

本文在集值广义强向量拟均衡问题(SVGSVQEP)系统解为通有稳定性的前提下，当约束映射为连续时，目标映射为锥凸的条件下，得到了在构成空间M中集值广义强向量拟均衡问题(SVGSVQEP)系统解至少存在一个本质连通区的结论。由于集值广义强向量拟均衡问题以及变分不等式问题一系列非线性优化问题解的本质连通区都是在单值映射的条件下研究，论文基于这些结论主要修改相关假设条件，将单值映射推广到集值映射，问题解推广到系统解，更进一步得到了集值广义强向量拟均衡问题系统解本质连通区的存在性定理。

关键词

强向量，拟均衡问题，本质连通区，系统解

Essential Connected Components of System Solutions for Set-Valued Generalized Strong Vector Quasi-Equilibrium Problems

Fang He[*], Jianchen Chen, Qiuju Xing

School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Dec. 11th, 2021; accepted: Jan. 17th, 2022; published: Jan. 24th, 2022

Abstract

In this paper, under the premise that the system solution of the set-valued generalized strong

[*]第一作者。

文章引用：何芳，陈剑尘，邢秋菊．集值广义强向量拟均衡问题系统解的本质连通区[J]．理论数学，2022，12(1): 125-131. DOI: 10.12677/pm.2022.121017

vector quasi-equilibrium problem (SVGSVQEP) is universally stable, when the constraint mapping is continuous and the target mapping is cone-convex, we obtain the set-valued generalized strong vector quasi-equilibrium problem in the composition space. There is at least one essential connected area in the system solution of the equilibrium problem (SVGSVQEP). Since the existence, stability, and essential connected parts of the solutions to a series of nonlinear optimization problems of set-valued generalized strong vector quasi-equilibrium problems and variational inequalities problems are essentially studied under the condition of single-valued mapping, the paper mainly modifies the relevant assumptions based on these conclusions, and the single-valued mapping is extended to set-valued mapping, the problem solution is extended to the system solution, and the existence theorem of the essential connected region of the system solution of the set-valued generalized strong vector quasi-equilibrium problem is further obtained.

Keywords

Strong Vector, Quasi-Equilibrium Problem, Essential Connected Region, System Solution

1. 引言

众所周知，本质连通区是研究向量拟均衡问题稳定性的重要课题。自 1952 年 Kinoshita [1]引入不动点集的本质连通区概念以来，有许多学者对本质连通区进行了相关研究。舒振武[2]研究了在集值映射空间 M 上，当支付和策略集同时扰动，*Nash* 平衡点集关于最优反应映射的混合 δ -扰动时，得到了每个有限博弈 *Nash* 点集本质连通区的存在性。李盛强[3]研究当目标映射为上半连续的紧凸映射时，得到了每个拟变分不等式解集至少存在一个本质连通区的结论。陈剑尘和王进朵[4]研究当目标函数 S、T 扰动时，得到锥凸对称拟均衡问题本质连通区的存在性定理。孟旭东和张传美[5]在实局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间中，当给定的空间 M 中的集值映射为连续非空紧凸值时，得到了广义强向量拟均衡问题解集的本质连通区的存在性。

自 2004 年俞建，杨辉[6]得出了一个统一的本质连通区的存在性定理以来，Cotrina John [7]、曾静[8]赵亚莉和孙媛媛[9]、向淑文和周永辉[10]分别研究了向量优化问题，集值广义强向量拟均衡问题以及变分不等式问题一系列非线性优化问题解的存在性、稳定性和本质连通区。但大部分数学研究本质连通区都是在单值映射的条件下研究拟均衡问题解的本质连通区，本文主要修改了[5]-[10]的相关条件，将单值映射推广至集值映射，问题解推广为系统解，更进一步地得到了集值广义强向量拟均衡问题系统解本质连通区的存在性定理。

2. 预备知识

设 I 为非空指标集，对 $\forall i \in I$， X_i, Y_i, Z_i 是实局部凸的 Hausdorff 拓扑空间， $D_i \subset X_i$， $K_i \subset Y_i$ 为非空紧凸子集，令 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$， $Z = \prod_{i\in I} Z_i$， $D = \prod_{i\in I} D_i$， $K = \prod_{i\in I} K_i$， $C_i : D \to 2^{Z_i}$，并且对 $\forall x \in D$， $C_i(x)$ 为闭凸点锥。

对 $\forall i \in I$，定义集值映射：

$$T_i : D \to 2^{K_i}，\quad S_i : D \to 2^{D_i}，\quad F_i : D_i \times K_i \times D_i \to 2^{Z_i}。$$

本文考虑集值广义强向量拟均衡问题(简称 SVGSVQEP)：

存在 $\overline{x}\in D$，满足 $\forall i\in I$，$\overline{x_i}\in S_i\left(\overline{x}\right)$，且存在 $\overline{y_i}\in T_i\left(\overline{x}\right)$ 使得

$$F\left(\overline{x_i},\overline{y_i},u_i\right)\subset C_i\left(\overline{x}\right),\quad \forall u_i\in S_i\left(\overline{x}\right),$$

系统的本质连通区的存在性。

SVGSVQEP 的几类特殊情况：

1) 当 $F_i:D_i\times K_i\times D_i\to 2^{Z_i}$ 退化为单值映射 $F:A\times B\times A\to Z$ 时，SVGSVQEP 退化为单值的广义向量拟均衡问题解，即 $\left(x_0,y_0\right)\in A\times B$，使得

$$x_0\in S\left(x_0\right),\quad y_0\in T\left(x_0\right),\quad F\left(x_0,y_0,u\right)\geq 0,\quad \forall u\in S\left(x_0\right)。$$

该问题在文献[8]中研究过。

2) 当指标集 $I=1$，集值映射 $F_i:D_i\times K_i\times D_i\to 2^{Z_i}$ 退化为单值映射 $f:E\times D\times E\to 2^{Z}$ 时，则 SVGSVQEP 退化为具有控制结构的广义强向量拟均衡问题解，即 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)\in E\times D$，使得

$$\overline{x}\in S\left(\overline{x}\right),\quad \overline{y}\in T\left(\overline{x}\right),\quad f\left(\overline{x},\overline{y},x\right)\subset C,\quad \forall x\in S\left(\overline{x}\right)。$$

该问题在文献[5]中研究过。

3) 当锥 C 的对偶锥 C^* 不具有弱紧基的条件下，则 SVGSVQEP 退化为集值广义强向量拟均衡问题解，即找 $\left(x_0,y_0\right)\in A\times B$，使得

$$x_0\in S\left(x_0\right),\quad y_0\in T\left(x_0\right),\quad F\left(x_0,y_0,u\right)\subset C,\quad \forall u\in S\left(x_0\right)。$$

该问题在文献[9]中研究过。

定义 1.1 [11] 设 X 是 Hausdorff 拓扑向量空间，Y 是拓扑空间，$F:X\to 2^{Y}$ 是集值映射。

i) 称 F 在点 $x_0\in X$ 处为上半连续当且仅当对 $F\left(x_0\right)$ 的任何邻域 V，存在点 x_0 的邻域 $U\left(x_0\right)$，使得

$$F\left(x\right)\subset V,\quad \forall x\in U\left(x_0\right)。$$

称 F 在 X 上上半连续当且仅当 F 在 X 上的每一点都上半连续。

ii) 称 F 在点 $x_0\in X$ 处为下半连续当且仅当对 $\forall y_0\in F\left(x_0\right)$ 及点 y_0 的任何邻域 V，存在点 x_0 的邻域 $U\left(x_0\right)$，使得

$$F\left(x\right)\cap V\neq\phi,\quad \forall x\in U\left(x_0\right)。$$

称 F 在 X 上下半连续当且仅当 F 在 X 上每一点都下半连续。

iii) 称 F 在 X 上连续当且仅当 F 在 X 上既上半连续也是下半连续。

iv) 称 F 为 usco 映射当且仅当 F 上半连续同时具有非空紧值。

定义 1.2 [12] 设 $\left(X,d\right)$ 为度量空间，A 为 X 的一个子集，$x\in X$，定义 $d\left(x,A\right)=\inf_{y\in A}d\left(x,y\right)$。$\forall\lambda\in R^{+}$，记 $\lambda+A=\left\{x\in X:d\left(x,A\right)<\lambda\right\}$，则 X 的两个子集 A，B 之间的 Hausdorff 距离定义为

$$H\left(A,B\right)=\inf\left\{\lambda:A\subset\lambda+B \text{ 且 } B\subset\lambda+A\right\}。$$

注 1.1 根据定义可知 $H\left(A,B\right)=\max\left\{\sup_{x\in A}d\left(x,B\right),\sup_{y\in B}d\left(x,A\right)\right\}$。

引理 1.1 [13] 设 E_1 和 E_2 均为赋范线性空间，$A\subset E_1$，$B\subset E_2$ 均为非空紧凸集，$T_1:A\to 2^{B}$，$T_2:A\to 2^{B}$ 均为 A 上有非空紧凸值且上(下)半连续的映射，$\lambda\left(x\right)$ 和 $\mu\left(x\right)$ 均为 A 上的连续函数，且 $\lambda\left(x\right)\geq 0$，$\mu\left(x\right)\geq 0$，$\lambda\left(x\right)+\mu\left(x\right)=1$，$\forall x\in A$，则

$$T(x)=\lambda(x)T_1(x)+\mu(x)T_2(x).$$

是 A 上具有非空紧凸值且上(下)半连续的映射。

引理 1.2 [14] 设 A，B，C 为 E 中非空有界集，则

$$h(A,\lambda B+\mu C)\le \lambda h(A,B)+\mu h(A,C),$$

其中 h 为 Hausdorff 度量，$\lambda\ge 0$，$\mu\ge 0$ 并且 $\lambda+\mu=1$。

引理 1.3 [15] (Zorn)如果半序集 X 的任一全序子集都有上界(下界)，则 X 中必含极大元(极小元)。

3. SVGSVQEP 系统解的本质连通区

以下恒假设

$$M=\left\{(T_i,S_i)\middle| T_i:D\to 2^{K_i}\text{ 上半连续且具有非空凸集,}\right.\\ \left.S_i:D\to 2^{D_i}\text{ 连续且具有非空闭凸}\right\}。$$

引理 2.1 $\psi:M\to 2^{D_i}$ 是一个 usco 映射。

证明： 可使用文献[5]中定理 3.1 的方法进行证明，故证明省略。

设 $u=(T_i,S_i)$ 且 $x_i\in\psi(u)$，$x_i\in\psi(u)$ 的连通分支是 $\psi(u)$ 中包含 x 的所有连通子集的并集[16]。由于 D 是紧集以及连通分支是 $\psi(u)$ 的连通闭子集，可知连通分支是连通紧集，假设 Λ 为指标集，有 $\psi(u)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\psi_\alpha(u)$，对 $\forall\alpha\in\Lambda$，$\psi_\alpha(u)$ 是 $\psi(u)$ 中的非空连通子集，并且对任意 $\alpha,\beta\in\Lambda$ $(\alpha\ne\beta)$，$\psi_\alpha(u)\cap\psi_\beta(u)=\varnothing$。

定义 2.1 [17]对任意 $y\in\psi(u)$，所有 $\psi(u)$ 中包含 y 中的连通子集的和集(必是连通的)称为 $\psi(u)$ 的一个连通区(分支)。

定义 2.2 [13] i) 设 $u\in M$，G 为 $\psi(u)$ 的非空闭子集，G 称为 $\psi(u)$ 的本质集，若对包含 G 的开邻域 O，存在 $\delta>0$，使得对 $\forall u'\in M$，并且当 $\rho(u,u')<\delta$，有

$$\psi(u')\cap O\ne\varnothing;$$

ii) 若 $\psi(u)$ 中的连通分支 $\psi_\alpha(u)$ 是本质的，则 $\psi_\alpha(u)$ 称为 $\psi(u)$ 的本质连通区；

iii) $\psi(u)$ 中的本质集 G 称为极小本质集，若 G 在 $\psi(u)$ 中所有本质集的族中按集合包含关系所定的序关系是极小元。

注 2.1 如果 $\psi(u)$ 的极小本质集存在，那么极小本质集不一定是唯一的。

注 2.2 如果 $\psi(u)$ 的闭子集 G 包含 $\psi(u)$ 的某一本质点 y，则 G 为 $\psi(u)$ 的本质集，且 $\{y\}$ 为 $\psi(u)$ 的极小本质集。

为了讨论 SVGSVQEP 系统解的本质连通区，下面介绍三个相关定理。

定理 2.1 对每个 $u\in M$，$\psi(u)$ 中至少存在一个极小本质集。

证明： 由引理 2.1 可知，$\psi:M\to 2^{D_i}$ 是上半连续的，根据上半连续的定义与定义 2.2 可知，$\psi(u)$ 本身就是一个本质集。

记 Φ 为所有本质集的全体(按包含关系进行定序)，因此 Φ 为非空。对 Φ 的任一非空全序子集 φ，由 Φ 中的每个成员都是紧的，因此 Φ 中所有成员之交仍然为紧的，故 φ 有下界。由 Zorn 引理可知，φ 有极小元，该极小元即为 $\psi(u)$ 的极小本质集。

定理 2.2 对每个 $u=(T_i,S_i)\in M$，$\psi(u)$ 的每个极小本质集均是连通的。

证明： 设 $m(u)$ 是 $\psi(u)$ 的极小本质集，因此 $m(u)$ 是 $\psi(u)$ 的闭子集。若 $m(u)$ 是不连通的，则存在 $\psi(u)$ 中的两个非空闭子集 $c_1(u)$ 与 $c_2(u)$，使得 $m(u)=c_1(u)\cup c_2(u)$，同时 $c_1(u)\cap c_2(u)=\varnothing$。$c_1(u)$，$c_2(u)$ 均

为紧集，因此存在 X 中的开集 V_1， V_2 使得 $c_1(u)\subset V_1$， $c_2(u)\subset V_2$，同时 $V_1\cap V_2=\varnothing$。

由于 $m(u)$ 是 $\psi(u)$ 的极小本质集可知，$c_1(u)$，$c_2(u)$ 均不是本质的。因此存在 X 中的开集 $O_1\supset c_1(u)$，$O_2\supset c_2(u)$，对 $\forall\delta>0$，存在 $u_1,u_2\in M$，使得 $\rho(u_1,u)<\delta$， $\rho(u_2,u)<\delta$，但

$$\psi(u_1)\cap O_1=\varnothing，\ \psi(u_2)\cap O_2=\varnothing。\tag{2.1}$$

令 $W_1=V_1\cap O_1$，$W_2=V_2\cap O_2$，则 W_1 与 W_2 都是开子集，并且 $c_1(u)\subset W_1$，$c_2(u)\subset W_2$。因 $c_1(u)$，$c_2(u)$ 都是紧子集，故存在两个开子集 U_1， U_2 使得

$$c_1(u)\subset U_1\subset\overline{U_1}\subset W_1，\ c_2(u)\subset U_2\subset\overline{U_2}\subset W_2，\ W_1\cap W_2=\varnothing。$$

因 $m(u)$ 是本质的以及 $m(u)\subset U_1\cup U_2$，故存在 $\delta'>0$ 使得对任意满足 $\rho(u,u')<\delta'$ 的 u'，有

$$\psi(u')\cap(U_1\cup U_2)\neq\varnothing。\tag{2.2}$$

因 $U_1\subset O_1$， $U_2\subset O_2$，对上述的 $\frac{\delta'}{2}>0$，由(2.1)可知，存在 $u_1,u_2\in M$，使得

$$\rho(u,u_1)<\frac{\delta'}{2}，\ \rho(u,u_2)<\frac{\delta'}{2}，\ \psi(u_1)\cap U_1=\varnothing，\ \psi(u_2)\cap U_2=\varnothing。\tag{2.3}$$

因 $u_1,u_2\in M$，有 $u_1=\left(T_i^1,S_i^1\right)$， $u_2=\left(T_i^2,S_i^2\right)$。定义 $T':D\to 2^{K_i}$， $S':D\to 2^{D_i}$ 如下：

$$T'(x_i)=\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i^2(x)，\ \forall x\in D。$$

$$S'(x_i)=\lambda(x)S_i^1(x)+\mu(x)S_i^2(x)，\ \forall x\in D。$$

其中 $\lambda(x)=\dfrac{d\left(x,\overline{U_1}\right)}{d\left(x,\overline{U_1}\right)+d\left(x,\overline{U_2}\right)}$， $\mu(x)=\dfrac{d\left(x,\overline{U_2}\right)}{d\left(x,\overline{U_1}\right)+d\left(x,\overline{U_2}\right)}$， $\forall x\in D$。

易见，$\lambda(x)$ 与 $\mu(x)$ 都是 D 上的连续函数，对任意的 $x\in D$，有 $\lambda(x)\geq 0$，$\mu(x)\geq 0$，$\lambda(x)+\mu(x)=1$。注意到 $T_i^1(x)$， $T_i^2(x)$， $S_i^1(x)$ 与 $S_i^2(x)$ 均为连续的集值映射，由[13]中的引理 3.3 以及引理 3.4 可知，$u'=\left(T_i',S_i'\right)\in M$。

据引理 1.2 可知，

$$\begin{aligned}h_1\left(T_i(x),T_i'(x)\right)&\leq\lambda(x)h_1\left(T_i(x),T_i^1(x)\right)+\mu(x)h_1\left(T_i(x),T_i^2(x)\right)\\&\leq h_1\left(T_i(x),T_i^1(x)\right)+h_1\left(T_i(x),T_i^2(x)\right),\forall x\in D\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1\left(S_i(x),S_i'(x)\right)&\leq\lambda(x)h_1\left(S_i(x),S_i^1(x)\right)+\mu(x)h_1\left(S_i(x),S_i^2(x)\right)\\&\leq h_1\left(S_i(x),S_i^1(x)\right)+h_1\left(S_i(x),S_i^2(x)\right),\forall x\in D\end{aligned}$$

由(2.3)可知，

$$\begin{aligned}\rho(u,u')&=\sup_{x\in D}h_1\left(T_i(x),T_i'(x)\right)+\sup_{x\in D}h_2\left(S_i(x),S_i'(x)\right)\\&=\sup_{x\in D}h_1\left(T_i(x),\lambda(x)T_i^1(x)+\mu(x)T_i^2(x)\right)+\sup_{x\in D}h_2\left(S_i(x),\lambda(x)S_i^1(x)+\mu(x)S_i^2(x)\right)\\&\leq\sup_{x\in D}h_1\left(T_i(x),T_i^1(x)\right)+\sup_{x\in D}h_1\left(T_i(x),T_i^2(x)\right)+\sup_{x\in D}h_2\left(S_i(x),S_i^1(x)\right)+\sup_{x\in D}h_2\left(S_i(x),S_i^2(x)\right)\\&=\rho(u,u_1)+\rho(u,u_2)\leq\frac{\delta'}{2}+\frac{\delta'}{2}=\delta'\end{aligned}$$

由(2.2)可知，

$$\psi(u')\cap U_1 \neq \varnothing \text{ 或 } \psi(u')\cap U_2 \neq \varnothing 。 \tag{2.4}$$

设 $\psi(u')\cap U_1 \neq \varnothing$，则 $\exists x \in \psi(u')\cap U_1$。

由 $x \in U_1$，得 $\lambda(x)=1$，$\mu(x)=0$，$T_i(x)=T_i^1(x)$，$S_i(x)=S_i^1(x)$。

由 $x \in \psi(u')$，得 $x \in S_i'(x)$ 且存在 $y \in T_i'(x)$，使得

$$F_i(x_i, y_i, x_i') \subset C_i(x), \quad \forall x_i' \in S_i'(x) = S_i^1(x),$$

可知 $x \in \psi(u_1)$，这与(2.3)矛盾，从而 $\psi(u')\cap U_1 = \varnothing$，同理可证 $\psi(u')\cap U_2 = \varnothing$。则

$$\psi(u')\cap(U_1\cup U_2) = \varnothing 。$$

这又与(2.4)式矛盾。因此，$m(u)$ 必是连通的。

定理 2.3 对每个 $u \in M$，$\psi(u)$ 中至少存在一个本质连通区。

证明：由定理 2.1、定理 2.2 可知，$\psi(u)$ 中至少存在一个连通的极小本质集 G，然而，G 中必包含于 $\psi(u)$ 的某个连通区 $\psi_\alpha(u)$，因 G 为本质的，根据定义可知，$\psi_\alpha(u)$ 是 $\psi(u)$ 的本质连通区。

4. 结论

本文得到了在实局部凸的 Hausdorff 空间中，将人们经常研究的单值映射改为了集值映射，问题解改为系统解时，当映射满足上连续以及序锥为闭凸的情况下，在构成的空间 M 中，证明了 SVGSVQEP 系统解至少存在一个本质连通区。

基金项目

国家科学自然基金(11061203)；江西省自然科学基金(2010GZS0176)。

参考文献

[1] Kinoshita, S. (1952) On Essential Components of the Set of Fixed Points. *Osaka Mathematical Journal*, **4**, 19-22.

[2] 舒振武. 混合 δ-扰动与 Nash 平衡的稳定性及 Ky Fan 点的一种推广[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2008.

[3] 李盛强. 广义向量拟似变分不等式的通有稳定性和本质连通区[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2012, 26(11): 115-122.

[4] 陈剑尘, 王进朵. 锥凸对称向量拟均衡问题解集的本质连通区[J]. 南昌大学学报(理科版), 2012, 36(1): 17-22.

[5] 孟旭东, 张传美. 广义强向量拟均衡问题解集的通有稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(11): 154-164.

[6] 杨辉, 俞建. 向量拟平衡问题的本质解及解集的本质连通区[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 74-84.

[7] Cotrina, J., Théra, M. and Zúñiga, J. (2020) An Existence Result for Quasi-Equilibrium Problems via Ekeland's Variational Principle. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **187**, 336-355. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01764-0

[8] 曾静, 彭再云, 张石生. 广义强向量拟平衡问题解的存在性和 Hadamard 适定性[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(6): 651-658.

[9] 赵亚莉, 孙媛媛, 鲁红, 张树义. 集值广义强向量拟均衡问题解的存在性[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(23): 258-262.

[10] Xiang, S.W. and Zhou, Y.H. (2006) On Essential Sets and Essential Components of Efficient Solutions for Vector Optimization Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **315**, 317-326. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.077

[11] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (2006) Applied Nonlinear Analysis. Courier Corporation, Chelmsford.

[12] 曼克勒斯, 芒克里斯. 拓扑学[M]. 原书第 2 版. 熊金城, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[13] 陈剑尘, 龚循华. 广义拟变分不等式解集的稳定性及本质连通区的存在性[J]. 南昌大学学报(理科版), 2004, 28(2): 105-112+117. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(99)00121-4

[14] Zhou, Y.H., Xiang, S.W., Yang, H. (2005) Stability of Solutions for Ky Fan's Section Theorem with Some Applications. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods* & *Applications*, **62**, 1127-1136. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.01.113

[15] 徐登洲. 拓扑线性空间[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1987.

[16] Ansari, Q.H. and Yao, J.-C. (1999) An Existence Result for the Generalized Vector Equilibrium Problem. *Applied Mathematics Letters*, **12**, 53-56.

[17] 黄茂胜. 一类集值映射本质连通区的存在问题[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2006.