Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 132-147
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121018

Sobolev型分数阶随机发展方程非局部问题Mild解的存在性

白玉洁

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年12月15日；录用日期：2022年1月17日；发布日期：2022年1月24日

摘 要

本文利用不动点定理和预解算子理论讨论了 **Hilbert** 空间中 **Sobolev** 型 $\alpha \in (1, 2)$ 阶 **Riemann-Liouville** 分数阶随机发展方程非局部问题 **mild** 解的存在性。

关键词

Riemann-Liouville分数阶导数，**Sobolev** 型分数阶随机发展系统，不动点定理，
非紧性测度

Existence of Mild Solutions for Nonlocal Problems of Fractional Stochastic Evolution Equations of Sobolev Type

Yujie Bai

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 15^{th}, 2021; accepted: Jan. 17^{th}, 2022; published: Jan. 24^{th}, 2022

文章引用: 白玉洁. Sobolev型分数阶随机发展方程非局部问题Mild解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 132-147.
DOI: 10.12677/pm.2022.121018

Abstract

In this paper, by utilizing the resolvent operator theory and the fixed point theorem, the existence of mild solutions for nonlocal problems of Riemann-Liouville fractional stochastic evolution equations of Sobolev-type with order $\alpha \in (1, 2)$ is discussed in Hilbert spaces.

Keywords

Riemann-Liouville Fractional Derivative, Stochastic Fractional Evolution Systems of Sobolev Type, Fixed Point Theorem, The Measure of Noncompactness

1. 引言

分数阶微分方程广泛应用于科学和工程技术的各个领域, 且比整数阶微分方程更准确地描述现实生活中现象的动力学行为. 例如, 粘弹性、电化学、多孔介质流动、空气动力学等现象都可以通过分数阶微分方程来建模, 因此激励了许多学者对该类方程的理论和实践进行探索. 在文献 [1]中, Ponce 利用预解族的紧性分别研究了 $\alpha \in (0, 1)$ 阶和 $\alpha \in (1, 2)$ 阶 Caputo 型分数阶发展方程和 Riemann-Liouville 型分数阶发展方程非局部问题 mild 解的存在性.

此外, Sobolev 型发展方程常出现在各种物理问题中, 如流体通过裂隙岩石的流动、热力学、小振幅长波的传播等. 因此, 近年来与之相关的问题引起了人们的广泛关注. 例如, Brill [2]和Showalter [3]建立了 Banach 空间中 Sobolev 型半线性发展方程解的存在性结果. 另一方面, 噪声或随机扰动在现实世界是无法避免的. 因此, 考虑带有随机效应的分数阶微分方程具有实际意义. 特别地, 化学、物理和生物科学中的许多动态过程的数学模型都可以用随机微分方程组来描述. 在文献 [4]中, Mahmudov 讨论了在 Hilbert 空间中 Sobolev 型分数阶半线性随机发展方程 mild 解的存在性及近似可控性. 在文献 [5] 中, Benchaabane 等人利用算子半群理论、分数阶微积分和随机分析技术建立了保证 Sobolev 型 $\alpha \in (0, 1)$ 阶分数阶随机发展方程解的存在性和唯一性的一组充分条件. 此后, 在文献 [6]中, 作者利用 Picard 迭代技巧得到了 Sobolev 型 $\alpha \in (1, 2)$ 阶 Caputo 型和 Riemann-Liouville 型分数阶随机发展方程 mild 解的存在唯一性.

据我们所知, Sobolev 型 $\alpha \in (0,1)$ 阶发展方程解的存在性已经得到了广泛的研究, 而关于 $\alpha \in (1,2)$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶随机发展方程 mild 解的存在性的研究结果相对较少. 受上述文献的启发, 本文将利用预解算子理论和不动点定理研究 Hilbert 空间中具有非局部条件的 Sobolev 型 Riemann-Liouville 分数阶随机发展方程

$$\begin{cases} D_t^\alpha(Ex(t)) = Ax(t) + f(t,x(t)) + \sigma(t,x(t))\frac{dW(t)}{d(t)}, & t \in I' := (0,a], \\ E(g_{2-\alpha} * x)(0) = x_0 - g(x), \quad E(g_{2-\alpha} * x)'(0) = x_1 - h(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

mild 解的存在性, 其中 $1 < \alpha < 2$, D_t^α 是 α 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数, 状态函数 $x(t)$ 取值于 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$, $A : D(A) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是稠定闭线性算子, $E : D(E) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是闭线性算子, $x_0,\ x_1 \in \mathbb{H}$, 函数 $f,\ g,\ h,\ \sigma$ 是下文给定的适当函数.

研究 Sobolev 型微分方程时, 我们通常假设:

(1) E, A 是闭线性算子;

(2) $D(E) \subset D(A)$, E 是双射的;

(3) E^{-1} 是紧算子.

在这种情况下, $-AE^{-1}$ 是一个有界线性算子, 它可以生成一个一致连续半群, 参见文献 [5] [7].

本文在不假设算子 E^{-1} 的存在性和紧性的情况下, 运用算子对 (A,E) 生成的 $(\alpha,\alpha-1)$-预解族 $\{S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的一些性质和 Laplace 变换来定义系统 (1.1) 的 mild 解, 并在没有预解算子 $S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)$ 紧性的条件下, 利用不动点定理和预解算子理论证明了系统 (1.1) mild 解的存在性.

2. 预备知识

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 表示带有滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 且满足常规条件的完全概率空间.在$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 中$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 为取值于 $\mathbb{H}$ 的 Q-维纳过程, 其中 Q 为有界线性协方差算子且 $trQ < +\infty$. 设 $\ell_k \geqslant 0$ 是一个有界序列, $\{e_k\}_{k\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个标准正交系, 满足

$$Qe_k = \ell_k e_k,\ k = 1,\ 2,\ 3\cdots.$$

设 $\{\beta_k\}_{k\geqslant 1}$ 是一个独立布朗运动且满足

$$\langle W(t), x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\ell_k}\langle e_k, x\rangle \beta_k(t),\ \forall\, x \in \mathbb{H},\ t \geqslant 0.$$

设 $\mathcal{F}_t$ 是由 $\{W(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ 生成的 σ-代数. 令 $L_2^0 := L_2(Q^{\frac{1}{2}}, Y)$. 则 L_2^0 是一个实可分 Hilbert 空间, 具有范数 $\|\pi\|^2_{L_2^0} = tr[\pi Q\pi^*]$, $L^2(\Omega, \mathbb{H})$ 表示 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中所有强 $\mathcal{F}_b$-可测随机变量构成的空间. $C(I, L^2(\Omega, \mathbb{H}))$ 是从 $I := [0,a]$ 到 $L^2(\Omega, \mathbb{H})$ 的连续映射空间, 且满足期望条件

$$\sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 < \infty.$$

设 $C(I,\mathbb{H})$ 为 $C(I,L^2(\Omega,\mathbb{H}))$ 的闭子空间, 由可测的和 $\mathcal{F}_t$-适应的 $\mathbb{H}$-值过程 $x\in C(I,L^2(\Omega,\mathbb{H}))$ 组成, 其范数定义为

$$\|x\|_C=(\sup_{t\in I}E\|x(t)\|^2)^{\frac{1}{2}},\ \forall\, x\in C(I,\mathbb{H}),$$

则 $(C(I,\mathbb{H}),\ \|\cdot\|_C)$ 为 Banach 空间. $\mathcal{B}(\mathbb{H}):=\mathcal{B}(\mathbb{H},\mathbb{H})$ 表示从 $\mathbb{H}$ 到自身的有界线性算子全体按范数 $\|\cdot\|$ 构成的空间.

定义 2.1 [8] [1] 对 $\forall\,\alpha>0$, 设

$$g_\alpha(t)=\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数. 一般地, 函数 f 和 g 的卷积定义为

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

定义 2.2 [8] [1] 函数 $u\in L^1(I)$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶积分定义为

$$J_t^\alpha u(t):=(g_\alpha*u)(t)=\int_0^t g_\alpha(t-s)u(s)ds,\quad t>0.$$

特别地, 令 $J_t^0u(t)=u(t)$, 由卷积的性质, 积分算子 $\{J_t^\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ 满足半群律

$$J_t^\alpha J_t^\beta=J_t^{\alpha+\beta},\quad \alpha,\ \beta\geqslant 0.$$

定义 2.3 [8] [1] 设函数 $u\in L^1(I)$ 满足 $g_{n-\alpha}*u\in W^{n,1}(I)$, $u\in L^1(I)$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义为

$$D_t^\alpha u(t):=D_t^n(g_{n-\alpha}*u)(t)=\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t g_{n-\alpha}(t-s)u(s)ds,\quad t>0,$$

其中 $D_t^n=\dfrac{d^n}{dt^n}$, $n=[\alpha]$ 表示大于或等于 α 的最小正整数.

定义 2.4 [6] 设函数 f 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上. 若积分

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt$$

收敛, 则 f 的 Laplace 变换为

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt.$$

Riemann-Liouville 型分数阶导数的 Laplace 变换为

$$\widehat{D_t^{\alpha}}u(\lambda)=\lambda^{\alpha}\widehat{u}(\lambda)-\sum_{k=0}^{n-1}(g_{n-\alpha}*u)^{(k)}(0)\lambda^{n-1-k}, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha>0,\ n=[\alpha]$.

下面, 我们介绍一些关于分数阶预解族 $\{S_{\alpha,\beta}^{E}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的基本概念, 更多细节参见文献 [8] [1].

定义

$$\rho_E(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:(\lambda E-A):D(E)\cap D(A)\to\mathbb{H}\text{ 可逆},$$

$$(\lambda E-A)^{-1}\in\mathcal{B}(\mathbb{H},D(E)\cap D(A))\}$$

为算子对 (A,E) 的预解集, 其中 $D(A)$ 和 $D(E)$ 分别表示算子 A 和 E 的定义域. 对 $\forall\,\lambda>0$, 我们称 $R(\lambda E,A):=(\lambda E-A)^{-1}$ 为算子 A 的 E-预解算子.

定义 2.5 [9]　设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 是一个 C_0-半群. 若存在常数 $M\geqslant 1,\ \omega\geqslant 0$ 满足

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\quad t\geqslant 0,$$

则称 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 (M,ω) 型的或指数有界的.

定义 2.6 [10]　设 $A:D(A)\subseteq\mathbb{H}\to\mathbb{H},\ E:D(E)\subseteq\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 是 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中的闭线性算子, 满足 $D(A)\cap D(E)\neq\{0\}$. 对 $\forall\,\alpha,\ \beta>0$, 若存在 $\omega\geqslant 0$ 和强连续函数 $S_{\alpha,\beta}^{E}:[0,\infty)\to\mathcal{B}(\mathbb{H})$, 使得 $S_{\alpha,\beta}^{E}(t)$ 是 (M,ω) 型的, $\{\lambda^{\alpha}:Re\lambda>\omega\}\subset\rho_E(A)$, 且对 $\forall\,x\in\mathbb{H}$, 有

$$\lambda^{\alpha-\beta}R(\lambda^{\alpha}E,A)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S_{\alpha,\beta}^{E}(t)xdt,\quad Re\lambda>\omega, \tag{2.2}$$

则称 $\{S_{\alpha,\beta}^{E}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由算子对 (A,E) 生成的 (α,β)-预解族.

注 2.1　对 $\forall\,1<\alpha<2$, 取 $\beta=\alpha-1>0$, 根据 (2.2) 式可得

$$\lambda R(\lambda^{\alpha}E,A)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S_{\alpha,\alpha-1}^{E}(t)xdt,\quad Re\lambda>\omega,\ x\in\mathbb{H},$$

则称 $\{S_{\alpha,\alpha-1}^{E}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由算子对 (A,E) 生成的 (M,ω) 型的 $(\alpha,\alpha-1)$-预解族. 特别地, 取 $\beta=1$, 由 (2.2) 式可知

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha}E,A)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}S_{\alpha,1}^{E}(t)xdt,\quad Re\lambda>\omega,\ x\in\mathbb{H},$$

则称 $\{S_{\alpha,1}^{E}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由算子对 (A,E) 生成的 $(\alpha,1)$-预解族.

对 $\forall\,\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$, 由 $\widehat{g_\alpha}(\lambda)=\lambda^{-\alpha}$ 和 $\widehat{D_t^\alpha}u(\lambda)=\lambda^\alpha\widehat{u}(\lambda)$ 知

$$\begin{aligned}\widehat{S^E_{\alpha,\beta+\gamma}}(\lambda)&=\lambda^{\alpha-(\beta+\gamma)}E(\lambda^\alpha E-A)^{-1}\\&=\frac{1}{\lambda^\gamma}\lambda^{\alpha-\beta}E(\lambda^\alpha E-A)^{-1}\\&=\frac{1}{\lambda^\gamma}\widehat{S^E_{\alpha,\beta}}(\lambda)\\&=(\widehat{g_\gamma*S^E_{\alpha,\beta}})(\lambda).\end{aligned}$$

根据 Laplace 变换的唯一性, 可得

$$S^E_{\alpha,\beta+\gamma}(t)=(g_\gamma*S^E_{\alpha,\beta})(t),\quad t\geqslant 0.$$

当 $1<\alpha<2,\ \beta=\alpha-1,\ \gamma=1$ 时, 有

$$S^E_{\alpha,\alpha}(t)=(g_1*S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)=\int_0^t S^E_{\alpha,\alpha-1}(s)ds,\quad t\geqslant 0.$$

因此, 对 $\forall\,x\in\mathbb{H}$, 有

$$R(\lambda^\alpha E,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}S^E_{\alpha,\alpha}(t)dt,\quad Re\lambda>\omega.$$

类似于文献 [6], 利用 Laplace 变换的性质 (2.1) 式和 (2.2) 式, 我们给出如下定义.

定义 2.7 若随机过程 $x\in C(I,\mathbb{H})$ 满足积分方程

$$\begin{aligned}x(t)=&\,S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)(x_0-g(x))+S^E_{\alpha,\alpha}(t)(x_1-h(x))\\&+\int_0^t S^E_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s,x(s))ds+\int_0^t S^E_{\alpha,\alpha}(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s),\quad t\in I,\end{aligned}\tag{2.3}$$

则称 x 为非局部问题 (1.1) 的 mild 解.

注 2.2 由 Laplace 变换的唯一性, 非局部问题 (1.1) 的 mild 解也可以写成

$$\begin{aligned}x(t)=&\,S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)(x_0-g(x))+(g_1*S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)(x_1-h(x))+\int_0^t(g_1*S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds\\&+\int_0^t(g_1*S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s),\quad t\in I.\end{aligned}\tag{2.4}$$

引理 2.1 [8] 若算子对 (A,E) 生成一个 (M,ω) 型的 (α,β)- 预解族 $\{S^E_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geqslant0}$, 则对任意的 $\gamma>0$, (A,E) 也生成一个 $(\frac{M}{\omega^\gamma},\omega)$ 型的 $(\alpha,\beta+\gamma)$-预解族 $\{S^E_{\alpha,\beta+\gamma}(t)\}_{t\geqslant0}$.

引理 2.2 [8] 设 $\alpha>0,\ 1<\beta\leqslant 2$. 若 $\{S^E_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geqslant0}$ 是由算子对 (A,E) 生成的 (M,ω) 型的 (α,β)-预解族, 则对 $\forall\,t>0$, 函数 $t\mapsto\ S^E_{\alpha,\beta}(t)$ 在 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 中连续.

设 $D\subset\mathbb{H}$ 是一个非空有界闭凸集, 记

$$\gamma(D) := \inf\{\varepsilon > 0 : D \text{ 在 } \mathbb{H} \text{ 中有有限 } \varepsilon\text{−网}\}.$$

为 D 的 Hausdorff 非紧性测度, 分别用 $\gamma(\cdot)$ 和 $\gamma_C(\cdot)$ 表示空间 $\mathbb{H}$ 和 $C(I,\mathbb{H})$ 中的 Hausdorff 非紧性测度. 若 $B \subset C(I,\mathbb{H})$ 有界, 则对 $\forall\, t \in I$, $B(t) := \{u(t) : u \in B\}$ 为 $\mathbb{H}$ 中的有界子集且 $\gamma(B(t)) \leqslant \gamma_C(B)$.

引理 2.3 [11] 设 S, T 是 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 中的非空有界集, $\rho \in \mathbb{R}$, 则非紧性测度 $\gamma(\cdot)$ 满足以下性质:

(1) $\gamma(S) = 0 \Leftrightarrow S$ 为相对紧集;

(2) $S \subset T \Longrightarrow \gamma(S) \leqslant \gamma(T)$;

(3)$\gamma(S+T) \leqslant \gamma(S) + \gamma(T)$, 其中 $S+T = \{x+y :\ x \in S,\ y \in T\}$;

(4) $\gamma(S \cup T) \leqslant \max\{\gamma(S),\ \gamma(T)\}$;

(5) $\gamma(\rho S) = |\rho|\gamma(S)$.

引理 2.4 [12] 设 $\mathbb{X}$ 为 Banach 空间, 算子 $P : D(P) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 连续有界. 若对任意有界非相对紧集 $S \subset D(P)$, 有

$$\gamma(P(S)) < \gamma(S),$$

则称 P 是凝聚映射.

引理 2.5 [13] 设 $\sigma : I \times \Omega \to L_2^0$ 是一个强可测映射, 若 $\int_0^a E\|\sigma(\theta)\|_{L_2^0}^p d\theta < +\infty$. 则

$$E\left\|\int_0^t \sigma(\theta)dW(\theta)\right\|^p \leqslant L_\sigma \int_0^t E\|\sigma(\theta)\|_{L_2^0}^p d\theta, \quad \forall\, t \in I,\ p \geqslant 2,$$

其中 $L_\sigma > 0$ 是与 p 和 a 相关的常数.

引理 2.6 [1] (Marzur 定理) 设 D 是 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 中的一个紧子集. 则它的凸闭包 $\overline{conv(D)}$ 也是紧的.

引理 2.7 [1] (Krasnoselskii 不动点定理) 设 $\mathfrak{B}$ 为 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 中的一个非空闭凸子集. 若算子 P, $Q : \mathfrak{B} \to \mathbb{X}$ 满足

(i) 对 $\forall\, x,\ y \in \mathfrak{B}$, 有 $Px + Qy \in \mathfrak{B}$;

(ii) P 是压缩算子;

(iii) Q 是全连续算子,

则 $P+Q$ 在 $\mathfrak{B}$ 内至少有一个不动点.

引理 2.8 [14] (Sadovskii 不动点定理) 设 $\mathbb{X}$ 为 Banach 空间, $S \subset \mathbb{X}$ 为有界闭凸集. 若 $F :\ S \to S$ 为凝聚映射, 则 F 在 S 上至少存在一个不动点.

3. 主要结果及证明

在这一部分, 我们分别利用 Krasnoselskii 不动点定理和 Sadovskii 不动点定理证明系统 (1.1)

mild解的存在性.

对任意的常数 $r>0$, 定义集合 B_r 为

$$B_r := \{x \in C(I,\mathbb{H}) : E\|x(t)\|^2 \leqslant r,\ t \in I\}.$$

为证明本文的主要结论, 我们引入如下假设条件:

$(F1)$ 函数 $f: I\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 满足:

(i) 对 $\forall\, t\in I$, $f(t,\cdot):\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 连续, 对 $\forall\, x\in\mathbb{H}$, $f(\cdot,x): I\to\mathbb{H}$ 可测.

(ii) 存在函数 $m\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$, 使得

$$E\|f(t,x)\|^2 \leqslant m(t)E\|x\|^2, \quad \forall\, t\in I,\ x\in\mathbb{H}.$$

$(F2)$ 函数 $g,\ h: C(I,\mathbb{H})\to\mathbb{H}$ 连续, 且存在常数 $N_g,\ N_h>0$, 使得对 $\forall\, x,\ y\in C(I,\mathbb{H})$, 有

$$E\|g(x)\|^2 \leqslant N_g(E\|x\|^2+1), \quad E\|g(x)-g(y)\|^2 \leqslant N_g E\|x-y\|^2,$$

$$E\|h(x)\|^2 \leqslant N_h(E\|x\|^2+1), \quad E\|h(x)-h(y)\|^2 \leqslant N_h E\|x-y\|^2.$$

$(F3)$ 函数 $\sigma: I\times\mathbb{H}\to L_2^0$ 连续, 且存在常数 $N_\sigma>0$, 使得对 $\forall\, t\in I,\ x,y\in\mathbb{H}$, 有

$$E\|\sigma(t,x)\|^2 \leqslant N_\sigma(E\|x\|^2+1), \quad E\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|^2 \leqslant N_\sigma E\|x-y\|^2.$$

$(F4)$ 对 $\forall\, t\in I$, 集合 $V_\varepsilon := \{f(s,x(s)) : x\in B_r,\ s\in[0,t-\varepsilon],\ \varepsilon\in(0,t)\}$ 是紧的.

分别定义算子 $\mathcal{Q}_1,\ \mathcal{Q}_2 : C(I,\mathbb{H})\to C(I,\mathbb{H})$ 如下:

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}_1x)(t) &:= S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)(x_0-g(x)) + (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)(x_1-h(x)) \\ &\quad + \int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s), \\ (\mathcal{Q}_2x)(t) &:= \int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds.\end{aligned}$$

由定义 2.7, 系统 (1.1) 的 mild 解等价于算子 $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_1+\mathcal{Q}_2$ 的不动点, 因此, 对算子 $\mathcal{Q}$ 应用 Krasnoselskii 不动点定理证明其在 B_r 上至少存在一个不动点.

引理 3.1 若条件 $(F1)-(F3)$ 满足, 且不等式

$$4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}(2N_g\omega^2+2N_h+a\|m\|_\infty+aL_\sigma N_\sigma) < 1 \tag{3.1}$$

成立, 则存在一个常数 $r>0$, 使得 $\mathcal{Q}: B_r\to B_r$.

证明: 显然 B_r 为 $C(I,\mathbb{H})$ 中的非空有界闭凸集, 反设对 $\forall\, r>0, \exists\, x\in B_r$, 使得 $E\|(\mathcal{Q}x)(t)\|^2 > r$. 由 $\mathcal{Q}$ 的定义, 有

$$
\begin{aligned}
& r < E\|(\mathcal{Q}x)(t)\|^2 \\
& \leqslant 4E(\|S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\|\|x_0-g(x)\|)^2 + 4E(\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)\|\|x_1-h(x)\|)^2 \\
& + 4E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds\|^2 + 4E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2 \\
& \leqslant 4M^2e^{2\omega a}E\|x_0-g(x)\|^2 + 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}E\|x_1-h(x)\|^2 \\
& + 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}\int_0^t E\|f(s,x(s))\|^2ds + 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}L_\sigma\int_0^t E\|\sigma(s,x(s))\|^2ds \\
& \leqslant 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}[(2E\|x_0\|^2+2N_g(r+1))\omega^2 + (2E\|x_1\|^2+2N_h(r+1)) + ra\|m\|_\infty + aL_\sigma N_\sigma(r+1)],
\end{aligned}
$$

上式两边同除以 r, 当 $r\to\infty$ 时, 可得

$$1 \leqslant 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}(2N_g\omega^2+2N_h+a\|m\|_\infty+aL_\sigma N_\sigma),$$

这与 (3.1) 式矛盾. 因此, 存在 $r>0$, 使得 $\mathcal{Q}: B_r\to B_r$. □

引理 3.2 若条件 $(F2)$, $(F3)$ 满足, 则算子 $\mathcal{Q}_1$ 在 B_r 中压缩.

证明: 对 $\forall\, x,\ y\in B_r,\ t\in I$, 由 (3.1) 式, 有

$$
\begin{aligned}
& E\|(\mathcal{Q}_1x)(t)-(\mathcal{Q}_1y)(t)\|^2 \\
& \leqslant 3E(\|S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\|\|g(x)-g(y)\|)^2 + 3E(\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)\|\|h(x)-h(y)\|)^2 \\
& + 3E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)[\sigma(s,x(s))-\sigma(s,y(s))]dW(s)\|^2 \\
& \leqslant 3\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}(N_g\omega^2+N_h+aL_\sigma N_\sigma)E\|x-y\|^2 \\
& < E\|x-y\|^2.
\end{aligned}
$$

故算子 $\mathcal{Q}_1$ 压缩. □

引理 3.3 若条件 $(F1)$ 满足, 则 $\mathcal{Q}_2: B_r\to B_r$ 连续.

证明: 设序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}\subset B_r$, 对 $\forall\, x\in B_r$, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. 则由 $\mathcal{Q}_2$ 的定义, 可知

$$
\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}_2x_n)(t)-(\mathcal{Q}_2x)(t)\|^2\\
&=E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)[f(s,x_n(s))-f(s,x(s))]ds\|^2\\
&\leqslant \frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}\int_0^t E\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|^2ds\\
&\leqslant \frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}\int_0^t (2E\|f(s,x_n(s))\|^2+2E\|f(s,x(s))\|^2)ds\\
&\leqslant 4r\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}\int_0^t m(s)ds.
\end{aligned}
$$

注意到, 函数 $s\mapsto m(s)$ 在 I 上可积, 当 $n\to\infty$ 时, $\int_0^t f(s,x_n(s))-f(s,x(s))ds\to 0$, 因此由 Lebesgue 控制收敛定理, 算子 $\mathcal{Q}_2: B_r\to B_r$ 连续. □

定义集合 $V:=\{\mathcal{Q}_2x : x\in B_r\}$, $V(t):=\{(\mathcal{Q}_2x)(t): x\in B_r\}$.

定理 3.1 若条件 $(F1)-(F4)$ 及 (3.1)式成立, 则系统 (1.1) 在 I 上至少存在一个 mild 解.

证明: 由引理 3.1-3.3 可知, 我们只需要说明集合 V 在 $C(I,\mathbb{H})$ 中相对紧.

第一步: 证明集合 V 是等度连续的.

对 $\forall\, x\in B_r$, $0\leqslant t_2<t_1\leqslant a$, 有

$$
\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}_2x)(t_1)-(\mathcal{Q}_2x)(t_2)\|^2\\
&=E\|\int_0^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)f(s,x(s))ds-\int_0^{t_2}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)f(s,x(s))ds\|^2\\
&\leqslant 2E\|\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)-(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]f(s,x(s))ds\|^2\\
&\quad+2E\|\int_{t_2}^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)f(s,x(s))ds\|^2\\
&:=I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

因为对于 I_1, 由条件 $(F1)$, 有

$$
\begin{aligned}
I_1&=2E\|\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)-(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]f(s,x(s))ds\|^2\\
&\leqslant 2\int_0^{t_2}\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)-(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)\|^2E\|f(s,x(s))\|^2ds\\
&\leqslant 2r\int_0^{t_2}\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)-(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)\|^2m(s)ds,
\end{aligned}
$$

且

$$\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-\cdot)-(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-\cdot)\|^2m(s)\leqslant 4\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}m(s)\in L^1(I,\mathbb{R}^+).$$

所以, 对 $\forall\, t \geqslant 0$, 由引理 2.1 可得 $(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t) = S^E_{\alpha,\alpha}(t)$. 由引理 2.2 知 $S^E_{\alpha,\alpha}(t)$ 范数连续. 因此, 当 $t_1 \to t_2$ 时, $(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1 - s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2 - s) \to 0$ 于 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, 因此由 Lebesgue 控制收敛定理可得 $\lim\limits_{t_1 \to t_2} I_1 = 0$.

对于 I_2, 由条件 (F_1), 有

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2E\| \int_{t_2}^{t_1} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1 - s) f(s, x(s)) ds \|^2 \\
&\leqslant 2\frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} \int_{t_2}^{t_1} E\|f(s, x(s))\|^2 ds \\
&\leqslant 2r\frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} \int_{t_2}^{t_1} m(s) ds \\
&\to 0 \quad (t_2 - t_1 \to 0).
\end{aligned}$$

因此, 集合 V 在 $C(I, \mathbb{H})$ 中等度连续.

第二步: 证明集合 $V(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧.

当 $t = 0$ 时, $V(0)$ 是相对紧的. 故只需证明对 $\forall\, t \in I'$, 集合 $V(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 对 $\forall\, 0 < \varepsilon < t$, 定义算子 $\mathcal{Q}_2^\varepsilon$ 如下：

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}_2^\varepsilon x)(t) &:= \int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t - s) f(s, x(s)) ds, \\
V_2^\varepsilon(t) &:= \{(\mathcal{Q}_2^\varepsilon x)(t) : x \in B_r\}.
\end{aligned}$$

由假设条件 $(F4)$ 和引理 2.6 可知 $\overline{conv(V_\varepsilon)}$ 是一个紧集, 从而 $\frac{Me^{\omega a}}{\omega}(t-\varepsilon)\overline{conv(V_\varepsilon)}$ 也是一个紧集, 其中 $\overline{conv(V_\varepsilon)}$ 为 V_ε 的闭凸包. 由 Bochner 积分中值定理, 可得

$$(\mathcal{Q}_2^\varepsilon x)(t) \in \frac{Me^{\omega a}}{\omega}(t - \varepsilon)\overline{conv(V_\varepsilon)}, \quad \forall\, t \in I.$$

因此, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 集合 $V_2^\varepsilon(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 对 $\forall\, x \in B_r$, 有

$$\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}_2 x)(t) - (\mathcal{Q}_2^\varepsilon x)(t)\|^2 \\
&= E\| \int_{t-\varepsilon}^{t} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t - s) f(s, x(s)) ds \|^2 \\
&\leqslant \frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} \int_{t-\varepsilon}^{t} E\|f(s, x(s))\|^2 ds \\
&\leqslant \frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} r \int_{t-\varepsilon}^{t} m(s) ds.
\end{aligned}$$

函数 $s \mapsto m(s) \in L^1([t - \varepsilon, t], \mathbb{R}^+)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\|(\mathcal{Q}_2 x)(t) - (\mathcal{Q}_2^\varepsilon x)(t)\|^2 = 0,$$

即当 $t \in I'$ 时, 存在一个相对紧集 $V_2^{\varepsilon}(t)$ 任意趋近于 $V(t)$, 故 $V(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 由 Ascoli-Arzela 定理知, 对 $\forall\, t \in I$, 集合 V 在 $C(I,\mathbb{H})$ 中相对紧.

故由引理 2.7 知, 算子 $\mathcal{Q}$ 在 B_r 中存在一个不动点 x, 此不动点即为系统 (1.1) 的 mild 解. □

接下来, 假设 $S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)(t>0)$ 在一致算子拓扑中连续, 我们引入如下假设:

$(F5)$ 对 $\forall\, t \in I$, 集合 $\{\int_0^{t-\varepsilon}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)\sigma(s,x(s))dW(s) : x \in B_r, s \in [0,t-\varepsilon], \varepsilon \in (0,t)\}$ 是紧的.

定理 3.2 若条件 $(F1)-(F5)$ 和 (3.1) 式成立, 则系统 (1.1) 在 I 上至少存在一个 mild 解.

证明: 显然, 由假设条件 $(F1)-(F3)$, 算子 $\mathcal{Q} : C(I,\mathbb{H}) \to C(I,\mathbb{H})$ 连续.

定义算子 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^1 + \mathcal{Q}^2$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{Q}^1x)(t) := S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)(x_0 - g(x)) + (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)(x_1 - h(x)),\\
&(\mathcal{Q}^2x)(t) := \int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds + \int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s).
\end{aligned}
$$

下证 $W := \{\mathcal{Q}^2x : x \in B_r\}$ 在 $C(I,\mathbb{H})$ 中相对紧. 由 Ascoli-Arzela 定理, 我们需要证明 W 在 $C(I,\mathbb{H})$ 中一致有界且等度连续, $W(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 类似于引理 3.1 的证明知 W 是一致有界的.

首先证明 W 等度连续. 对 $\forall\, x \in B_r$, 当 $0 \leqslant t_2 < t_1 \leqslant a$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}^2x)(t_1) - (\mathcal{Q}^2x)(t_2)\|^2\\
=\;& E\|\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]f(s,x(s))ds\\
&+\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]\sigma(s,x(s))dW(s)\\
&+\int_{t_2}^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)f(s,x(s))ds\\
&+\int_{t_2}^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2\\
\leqslant\;& 4E\|\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]f(s,x(s))ds\|^2\\
&+4E\|\int_0^{t_2}[(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2-s)]\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2\\
&+4E\|\int_{t_2}^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)f(s,x(s))ds\|^2\\
&+4E\|\int_{t_2}^{t_1}(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1-s)\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2\\
:=\;& 4\sum_{i=1}^{4} J_i.
\end{aligned}
$$

由定理 3.1 的证明可得当 $t_1 \to t_2$ 时, J_1, $J_3 \to 0$. 另一方面, 由条件 $(F3)$, 有

$$J_2 \leqslant L_\sigma \int_0^{t_2} \|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1 - s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2 - s)\|^2 E\|\sigma(s, x(s))\|^2 ds$$

$$\leqslant 4aL_\sigma N_\sigma(r+1)\frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2}.$$

由 $(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)$ 在 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 中连续可知, 当 $t_1 \to t_2$ 时, $(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_1) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t_2) \to 0$, 因此根据 Lebesgue 控制收敛定理可得 $\lim\limits_{t_1 \to t_2} J_2 = 0$. 对于 J_4, 由条件 $(F3)$, 有

$$J_4 \leqslant \frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} L_\sigma \int_{t_2}^{t_1} E\|\sigma(s, x(s))\|^2 ds$$

$$\leqslant \frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2} L_\sigma N_\sigma (r+1)(t_1 - t_2)$$

$$\to 0 \quad (t_1 \to t_2).$$

因此, 集合 W 在 $C(I, \mathbb{H})$ 中等度连续.

其次, 证明对 $\forall\, t \in I$, 集合 $W(t) := \{(\mathcal{Q}^2 x)(t) : x \in B_r\}$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 当 $t = 0$ 时, $W(0)$ 是相对紧的, 故只需证明对 $\forall\, t \in I'$, $W(t)$ 是相对紧的. 对 $\forall\, 0 < \varepsilon < t$, 定义算子 $\mathcal{Q}_\varepsilon$ 如下:

$$(\mathcal{Q}_\varepsilon x)(t) := (\mathcal{Q}_{1,\varepsilon} x)(t) + (\mathcal{Q}_{2,\varepsilon} x)(t),$$

$$W_\varepsilon(t) := \{(\mathcal{Q}_\varepsilon x)(t) : x \in B_r\},\ \forall\, 0 < \varepsilon < t,$$

其中

$$(\mathcal{Q}_{1,\varepsilon} x)(t) := S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t - \varepsilon - s) f(s, x(s)) ds,$$

$$(\mathcal{Q}_{2,\varepsilon} x)(t) := S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t - \varepsilon - s) \sigma(s, x(s)) dW(s).$$

由定理 3.1 的证明可知 $\frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega}(t-\varepsilon)\overline{conv(V_\varepsilon)}$ 是一个紧集. 所以由 Bochner 积分中值定理, 可得

$$(\mathcal{Q}_{1,\varepsilon} x)(t) \in \frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega}(t - \varepsilon)\overline{conv(V_\varepsilon)}, \quad \forall\, t \in I.$$

因此, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$,集合 $\{(\mathcal{Q}_{1,\varepsilon} x)(t) : x \in B_r\}$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧.又由假设条件 $(F5)$ 可得集合

$\{(\mathcal{Q}_{2,\varepsilon}x)(t) : x \in B_r\}$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 因此, 集合 $W_\varepsilon(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 对 $\forall\, x \in B_r$, 有

$$\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}^2x)(t) - (\mathcal{Q}_\varepsilon x)(t)\|^2 \\
=& E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds \\
&- S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)f(s,x(s))ds \\
&+ \int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s) \\
&- S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2 \\
\leqslant& 2E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)f(s,x(s))ds \\
&- S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)f(s,x(s))ds\|^2 \\
&+ 2E\|\int_0^t (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\sigma(s,x(s))dW(s) \\
&- S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)\sigma(s,x(s))dW(s)\|^2 \\
:=& 2(K_1 + K_2).
\end{aligned}$$

对于 K_1, 有

$$\begin{aligned}
K_1 \leqslant& 3\int_0^{t-\varepsilon} \|S^E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon) - I\|^2 E\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s)f(s,x(s))\|^2 ds \\
&+ 3\sup_{0\leqslant s\leqslant t-\varepsilon} \|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-\varepsilon-s) - (g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t-s)\|^2 \int_0^{t-\varepsilon} E\|f(s,x(s))\|^2 ds \\
&+ 3\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}\int_{t-\varepsilon}^t E\|f(s,x(s))\|^2 ds.
\end{aligned}$$

类似于定理 3.1 的证明, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, $K_1 \to 0$. 同理 $K_2 \to 0$. 因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} E\|(\mathcal{Q}^2x)(t) - (\mathcal{Q}_\varepsilon x)(t)\|^2 = 0,$$

即当 $t \in I'$ 时, 存在一个相对紧集 $W_\varepsilon(t)$ 任意趋近于 $W(t)$, 故 $W(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 中相对紧. 由 Ascoli-Arzela 定理可知, 集合 W 在 $C(I,\mathbb{H})$ 中相对紧, 因此, $\gamma_C(W) = \gamma_C(\mathcal{Q}^2(B_r)) = 0$.

又因为

$$\begin{aligned}
&E\|(\mathcal{Q}^1x)(t) - (\mathcal{Q}^1y)(t)\|^2 \\
\leqslant& 2\|S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\|^2 E\|g(x) - g(y)\|^2 + 2\|(g_1 * S^E_{\alpha,\alpha-1})(t)\|^2 E\|h(x) - h(y)\|^2 \\
\leqslant& 2\frac{M^2e^{2\omega a}}{\omega^2}(N_g\omega^2 + N_h)E\|x-y\|^2,
\end{aligned}$$

由引理 2.3 和 (3.1) 式, 有

$$\begin{aligned}\gamma_C(\mathcal{Q}(B_r)) &\leqslant \gamma_C(\mathcal{Q}^1(B_r)) + \gamma_C(\mathcal{Q}^2(B_r)) \\ &\leqslant 2\frac{M^2 e^{2\omega a}}{\omega^2}(N_g\omega^2 + N_h)\gamma_C(B_r) \\ &\leqslant \gamma_C(B_r),\end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{Q}: B_r \to B_r$ 是一个凝聚映射. 故由引理 2.8 知, 算子 $\mathcal{Q}$ 在 B_r 中存在一个不动点 x, 此不动点即为系统 (1.1) 的 mild 解. □

4. 结论

本文讨论了 Hilbert 空间中 Sobolev 型 $\alpha \in (1,2)$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶随机发展方程非局部问题 mild 解的存在性. 我们首先定义了由算子对 (A,E) 生成的 $(\alpha,\alpha-1)$-预解族 $\{S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\}_{t\geqslant 0}$. 其次, 在不假设 $\{S^E_{\alpha,\alpha-1}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 紧的情况下, 我们利用 Krasnoselskii 不动点定理和 Sadovskii 不动点定理证明了系统 (I) 的 mild 解的存在性.

基金项目

国家自然科学基金青年基金项目(No. 11701457)。

参考文献

[1] Ponce, R. (2016) Existence of Mild Solutions to Nonlocal Fractional Cauchy Problems via Compactness. *Abstract and Applied Analysis*, **2016**, Article ID: 4567092. https://doi.org/10.1155/2016/4567092

[2] Brill, H. (1977) A Semilinear Sobolev Evolution Equation in Banach Space. *Journal of Differential Equations*, **24**, 412-425. https://doi.org/10.1016/0022-0396(77)90009-2

[3] Showalter, R.E. (1972) Existence and Representation Theorems for a Semilinear Sobolev Equation in Banach Space. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **3**, 527-543. https://doi.org/10.1137/0503051

[4] Mahmudov, N.I. (2014) Existence and Approximate Controllability of Sobolev Type Fractional Stochastic Evolution Equations. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, **62**, 205-215. https://doi.org/10.2478/bpasts-2014-0020

[5] Benchaabane, A. and Sakthivel, R. (2017) Sobolev-Type Fractional Stochastic Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **312**, 65-73. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.12.020

[6] Yang, H. (2020) Existence Results of Mild Solutions for the Fractional Stochastic Evolution Equations of Sobolev Type. *Symmetry*, **12**, Article 1031. https://doi.org/10.3390/sym12061031

[7] Ahmed, H.M. (2017) Sobolev-Type Fractional Stochastic Integrodifferential Equations with Nonlocal Conditions in Hilbert Space. *Journal of Theoretical Probability*, **30**, 771-783. https://doi.org/10.1007/s10959-016-0665-9

[8] Chang, Y.K., Pereira, A. and Ponce, R. (2017) Approximate Controllability for Fractional Differential Equations of Sobolev Type via Properties on Resolvent Operators. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **20**, 963-987. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0050

[9] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

[10] Chang, Y.K., Pei, Y.T. and Ponce, R. (2019) Existence and Optimal Controls for Fractional Stochastic Evolution Equations of Sobolev Type via Fractional Resolvent Operators. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **90**, 558-572. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1314-5

[11] Kamenskii, M., Obukhovskii, V. and Zecca, P. (2001) Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110870893

[12] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 第2版. 济南: 山东科学技术出版社, 2005.

[13] Ichikawa, A. (1982) Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **90**, 12-44. https://doi.org/10.1016/0022-247X(82)90041-5

[14] Yang, H. and Zhao, Y.J. (2020) Controllability of Fractional Evolution Systems of Sobolev Type via Resolvent Operators. *Boundary Value Problem*, **2020**, Article No. 119. https://doi.org/10.1186/s13661-020-01417-1