

几类半笛卡尔积图的线性荫度

叶倩玉, 刘兆志

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2022年9月18日; 录用日期: 2022年10月17日; 发布日期: 2022年10月24日

摘要

一个线性森林是指每个连通分支都是路的森林。图 G 的线性荫度是指使得 G 的边集 $E(G)$ 可以分解成 n 个线性森林的最小整数 n , 用 $la(G)$ 表示。本文对路和路、路和圈、圈和圈以及路和树的半笛卡尔积结构进行讨论, 通过对这几类图中的边进行划分, 得到了路和路, 路和圈, 圈和圈以及路和树的半笛卡尔积的线性荫度的确切值并且证明这几类图满足线性荫度猜想。

关键词

线性荫度, 半笛卡尔积图, 路, 圈, 树

Linear Arboricity of Several Classes of Semi-Cartesian Product of Graphs

Qianyu Ye, Zhaozhi Liu

College of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 18th, 2022; accepted: Oct. 17th, 2022; published: Oct. 24th, 2022

Abstract

A linear forest is a forest whose components are paths. The linear arboricity $la(G)$ of a G is the minimum number n of linear forests that is the partition of the edge set $E(G)$ of G . In this paper, we discuss the structure of Semi-Cartesian product path and path, path and cycle, cycle and cycle, and path and tree. By dividing the edges of these kinds of graphs, we show that the exact values of the linear arboricity of Semi-Cartesian products of path and path, path and cycle, cycle and cycle, path and tree and these values match up the linear arboricity conjecture.

Keywords

Linear Arboricity, Semi-Cartesian Product of Graphs, Path, Cycle, Tree

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一个线性森林是指每个连通分支都是路的森林。图 G 的线性荫度是指使得 G 可以分解成 n 个线性森林的最小整数 n , 用 $la(G)$ 表示。线性荫度的概念最早是由 Harary [1] 于 1970 年提出的。关于图 G 的线性荫度, Akiyama, Exoo 和 Harary [2] 提出了一个猜想: 对于任何正则图 G , 均有 $la(G) = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。他们在文献[2]中给出了树、完全图、完全二部图等图类的线性荫度, 并且证明了当 $\Delta(G) = 3$ 时此猜想成立。在文献[3]中, 他们又证明了 $\Delta(G) = 4$ 时此猜想成立。接着, Enomoto 和 Péroche [4] 证明了当 $\Delta(G) = 5, 6, 8$ 时, 此猜想是成立的。1986 年, Guldán [5] 证明了当 $\Delta(G) = 10$ 时此猜想也成立。显然对于任何图 G , 均有 $la(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$, 这是因为任何一个顶点在一个线性森林中的度最大是 2。而对于任何正则图 G , 均有 $la(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。所以上面的猜想等价于著名的线性荫度猜想:

猜想 1: 对于任何简单图 G , 都有 $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil \leq la(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。

对于平面图而言, 此猜想已经被吴建良[6] [7]证明是成立的。文献[8] [9]中, 作者证明了若 G 是 $\Delta(G) \geq 21$ 的 NIC -平面图或不含 4-圈且 $\Delta(G) \geq 9$ 的 IC -平面图, 其线性荫度均为 $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。Niu 和 Zhang [8] 还证明了 $\Delta(G) \geq 14$ 的 NIC -平面图, 线性荫度猜想是成立的。陈洪玲[10]等人证明了对于两个固定的整数 $i, j \in \{5, 6, 7\}$, 如果最大度 $\Delta(G) \geq 7$ 的平面图 G 中不存在相邻的含弦 i, j -圈, 则图 G 的线性荫度为 $\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$ 。近期, 李萍[11]验证了树和路的笛卡尔积图、直积图、强积图满足线性荫度猜想。这些结果都丰富了此研究领域的发展, 但迄今为止, 此猜想仍未被完全证明。

本文我们考虑几类特殊图的半笛卡尔积图的线性荫度。半笛卡尔积图是由 Metsidik [12] 于 2013 年提出的一种新定义的乘积图, 这是由两个连通的二部图且其中一个图是对称的另一个图是圈保持定向的图做半笛卡尔积构成。两个符合定义的图的半笛卡尔积可以从这两个图的笛卡尔积大约删除 $\left\lceil \frac{E(H)}{2} \right\rceil |E(G)|$ 得到。而将成为 21 世纪最有前途的碳纳米材料的结构模型等六角系统模型就可看作是两个简单图的半笛卡尔积。所以研究这几类图的线性荫度是极具有意义的。

2. 基本定义以及符号

定义 1. 对于两个连通的二部图 G 和 H , 且图 G 和 H 都是二着色的, 其中图 G 是对称的, 图 H 是圈

保持定向的。图 $G = (V_1, E_1)$ 与 $H = (V_2, E_2)$ 的半笛卡尔积图 $G \sqcup H = (V_1 \times V_2, E)$, 其中 (u_1, u_2) 与 (v_1, v_2) 相邻, 当且仅当 $u_2 = v_2$ 且 $u_1 v_1 \in E(G)$ 或者 $u_1 = v_1$ 且 $u_2 \rightarrow v_2$ 且 u_1, u_2 着色相同。

符号 $u_2 \rightarrow v_2$ 表示在连通的圈保持定向图 H 中边 $u_2 v_2$ 的方向是由顶点 u_2 指向顶点 v_2 。二部图的顶点集可分割为两个互不相交的子集 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, 如果两条边 $a_i b_j$ 与 $a_j b_i$ 同时出现, 称这样的二部图为对称的二部图。具体概念参看文献[12]。

为了方便描述, 我们采用如下一些记号。

我们规定图 G 和图 H 做半笛卡尔积时, 图 G 的顶点 u_i 与图 H 的顶点 v_i 着色相同, 当图 H 分别为路 P_m 与圈 C_m 时, 其圈保持定向如图 1 所示。在半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$ 中, $V(P_m) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $(u_i, v_j) \in V(G \sqcup H)$ 记作 v_j^i 。对于固定的 $j (j=1, 2, \dots, n)$, 用 P_n^j 表示由顶点集 $\{v_1^j, v_2^j, \dots, v_n^j\}$, $1 \leq i \leq m$ 导出的 n 条路 P_m , 用 $P(2)$ 表示顶点集 $\{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_2^m, v_3^m, \dots, v_{n-1}^m\}$ 导出的 $n-1$ 条路 P_2 , 用 $P^*(2)$ 表示顶点集 $\{v_1^k, v_2^k, \dots, v_n^k, v_2^l, v_3^l, \dots, v_{n-1}^l\}$ ($k=3, 5, 7, \dots, m-1$; $l=2, 4, 6, \dots, m-2$) 导出的 $\frac{(n-1)(m-2)}{2}$ 条路 P_2 。

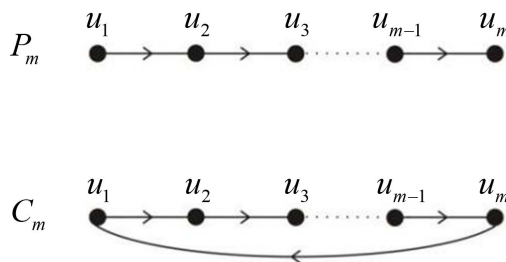


Figure 1. The cycle preserving orientable of P_m and C_m

图 1. P_m 与 C_m 的圈保持定向

3. 主要结论

引理 1. [2] 树 T 的线性荫度 $la(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$ 。

引理 2. 路 P_m 和路 P_n 的半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$, $la(P_m \sqcup P_n) = \begin{cases} 1, & m=2, n \geq 2; \\ 2, & \text{其它.} \end{cases}$

证明: 当 $m=2$, $n \geq 2$, $P_m \sqcup P_n = P_{2n}$, $la(P_m \sqcup P_n) = 1$ 。

当 $m \geq 4$, $n=2$ 时, 我们得到半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$ 的最大度 $\Delta(P_m \sqcup P_2) = 3$ 。

由图的线性荫度的定义可知, 半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_2$ 的线性荫度 $la(P_m \sqcup P_2) \geq \left\lceil \frac{\Delta(P_m \sqcup P_2)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$ 。

现在, 我们说明半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_2$ 可以分解成 2 个线性森林。令 $M_1 = \{P_n^i\} = \{v_1^i, v_2^i\}$, $M_2 = \{P(2)\} = \{(v_1^1 v_2^1)\}$, $M_3 = \{P^*(2)\} = \{v_1^k, v_2^k\}$, $k=3, 5, 7, \dots, m-1$, 不难看出 $M_1 \cup M_2$, M_3 是 2 个线性森林, 又 $E(P_m \sqcup P_n) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$ 。这说明 $la(P_m \sqcup P_2) \leq 2$ 。因此 $la(P_m \sqcup P_2) = 2$ 成立。

当 $m \geq 4$, $n \geq 3$ 时, 由半笛卡尔积的定义可得, 半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$ 的最大度 $\Delta(P_m \sqcup P_n) = \Delta(P_m) + \Delta(P_n) - 1 = 3$ 。

同理, 半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$ 的线性荫度 $la(P_m \sqcup P_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(P_m \sqcup P_n)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$ 。

现在, 我们说明半笛卡尔积图 $P_m \sqcup P_n$ 可以分解成 2 个线性森林。令 $M_4 = \{P_n^i\}$, $M_5 = \{P(2)\}$, $M_6 = \{P^*(2)\}$, 不难看出 $M_4 \cup M_5$, M_6 是 2 个线性森林, 又 $E(P_m \sqcup P_n) = (M_4 \cup M_5) \cup M_6$ 。这说明 $la(P_m \sqcup P_n) \leq 2$ 。因此 $la(P_m \sqcup P_n) = 2$ 成立。□

因为在 $P_m \sqcup P_n$ 中增加一些边即可得到 $P_m \sqcup C_n$, $C_m \sqcup P_n$ 和 $C_m \sqcup C_n$, 所以在定理 3, 4 中仍采用之前所定义的记号。

定理 3. 路 P_m (P_n) 和圈 C_n (C_m) 的半笛卡尔积图 $P_m \sqcup C_n$ 和 $C_m \sqcup P_n$, $la(P_m \sqcup C_n) = la(C_m \sqcup P_n) = 2$ 。

证明: 当 $m = 2$ 时, $P_m \sqcup C_n = C_{2n}$, 显然 $la(P_m \sqcup C_n) = 2$ 。

当 $m \geq 4$ 时, 由半笛卡尔积图的定义可得, 半笛卡尔积图 $P_m \sqcup C_n$ 最大度 $\Delta(P_m \sqcup C_n) = \Delta(P_m) + \Delta(C_n) - 1 = 3$ 。

由图的线性荫度的定义可知, 半笛卡尔积图 $P_m \sqcup C_n$ 的线性荫度 $la(P_m \sqcup C_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(P_m \sqcup C_n)}{2} \right\rceil = 2$ 。

现在, 我们说明 $P_m \sqcup C_n$ 可以分解成 2 个线性森林。

令 $M_1 = \{P_n^i\}$, $M_2 = \{P(2)\}$, $M_3 = \{P^*(2)\}$, $M_4 = \{(v_1^m, v_n^m) : m = 2, 4, \dots, m\}$, 不难看出 $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cup M_4$ 是 2 个线性森林, 又 $E(P_m \sqcup C_n) = (M_1 \cup M_2) \cup (M_3 \cup M_4)$ 。这说明当 $m \geq 4$ 时, $la(P_m \sqcup C_n) \leq 2$ 。

当 $n = 2$ 时, 因为 $\Delta(C_m \sqcup P_2) = 3$, 那么 $la(C_m \sqcup P_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(C_m \sqcup P_2)}{2} \right\rceil = 2$ 。

当 $n \geq 3$ 时, 由半笛卡尔积图的定义可得半笛卡尔积图 $C_m \sqcup P_n$ 最大度 $\Delta(C_m \sqcup P_n) = 3$, $la(C_m \sqcup P_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(C_m \sqcup P_n)}{2} \right\rceil = 2$ 。

现在, 我们说明 $C_m \sqcup P_n$ 可以分解成 2 个线性森林。

令 $M_5 = \{P_n^i\}$, $M_6 = \{(v_1^1, v_1^m), (v_2^1, v_2^m), \dots, (v_n^1, v_n^m)\}$, 不难看出 $M_5 \cup M_2$, $M_3 \cup M_6$ 是 2 个线性森林, 又 $E(C_m \sqcup P_n) = (M_5 \cup M_2) \cup (M_3 \cup M_6)$, 这说明 $la(C_m \sqcup P_n) \leq 2$ 。

综上所述, 路 P_m (P_n) 和圈 C_n (C_m) 的半笛卡尔积图 $P_m \sqcup C_n$ 与 $C_m \sqcup P_n$ 的线性荫度 $la(P_m \sqcup C_n) = la(C_m \sqcup P_n) = 2$ 。□

如图 2 所示, 我们可以用定理 2 中的分解方法将半笛卡尔积图 $P_6 \sqcup C_6$ 分解成 2 个线性森林 $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cup M_4$ 。

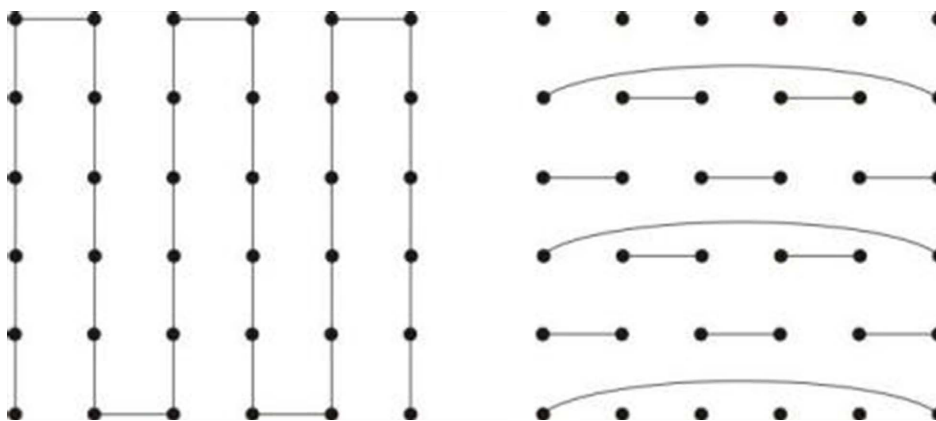


Figure 2. $M_1 \cup M_2$ and $M_3 \cup M_4$

图 2. $M_1 \cup M_2$ 与 $M_3 \cup M_4$

定理 4. 圈 C_m 和圈 C_n 的半笛卡尔积图 $C_m \sqcup C_n$, $la(C_m \sqcup C_n) = 2$ 。

证明: 由半笛卡尔积图的定义可得, 半笛卡尔积图 $C_m \sqcup C_n$ 的最大度 $\Delta(C_m \sqcup C_n) = \Delta(C_m) + \Delta(C_n) - 1 = 3$ 。

由图的线性荫度的定义可知, 半笛卡尔积图 $C_m \sqcup C_n$ 的线性荫度 $la(C_m \sqcup C_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(C_m \sqcup C_n)}{2} \right\rceil = 2$ 。

现在, 我们说明 $C_m \sqcup C_n$ 可以分解成 2 个线性森林。令 $M_1 = \{P_n^i\}$, $M_2 = \{P(2)\}$, $M_3 = \{P^*(2)\}$, $M_4 = \{(v_1^m, v_n^m) : m = 2, 4, \dots, m\}$, $M_5 = \{(v_1^1, v_1^n), (v_2^1, v_2^n), \dots, (v_m^1, v_m^n)\}$, 不难看出 $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cup M_4 \cup M_5$ 是 2 个线性森林, 又 $E(C_m \sqcup C_n) = (M_1 \cup M_2) \cup (M_3 \cup M_4 \cup M_5)$, 这说明 $la(C_m \sqcup C_n) \leq 2$ 。

综上所述, 路 C_m 和圈 C_n 的半笛卡尔积图 $C_m \sqcup C_n$ 的线性荫度 $la(C_m \sqcup C_n) = 2$ 。□

定理 5. 树 T 和路 P_m 的半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 的线性荫度, $la(T \sqcup P_m) = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1$ 。

证明: 当 $m = 2$ 时, 我们得到半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 的最大度 $\Delta(T \sqcup P_2) = \Delta(T) + 1$, 由图的线性荫度的定义可知, 半笛卡尔积图 $T \sqcup P_2$ 的线性荫度 $la(T \sqcup P_m) \geq \left\lceil \frac{\Delta(T \sqcup P_2)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T) + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1$ 。

当 $m \geq 3$, 由半笛卡尔积图的定义可得, 半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 的最大度 $\Delta(T \sqcup P_m) = \Delta(T) + \Delta(P_m) - 1 = \Delta(T) + 1$ 。

同理, 半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 的线性荫度 $la(P_m \sqcup T) \geq \left\lceil \frac{\Delta(P_m \sqcup T)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T) + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1$ 。

根据半笛卡尔积图的定义, 树 T 有两种情况:

情况一: 树 T 是路。引理 2 已经证明。

情况二: 树 T 不是路。

当 $\Delta(T) \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 如果半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 中的边是树 T 的边, 那么将这些边放入集合 X 中, 待所有的边全部放入集合 X 中后, 我们得到集合 X 中包含 m 个树 T 的连通分支, 且这 m 个连通分支是两两不相交的。此时在 $T \sqcup P_m \setminus X$ 中, 每个连通分支都是 P_2 且各个连通分支之间两两不相交, 因此 $T \sqcup P_m \setminus X$ 满足线性森林的定义。则

$$la(T \sqcup P_m) \leq la(X) + la(T \sqcup P_m \setminus X) = la(T) + 1 = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1。$$

当 $\Delta(T) \equiv 1 \pmod{2}$ 时。我们把树 T 所分解成的线性森林记作 LF_l , 其中 $l \in \left\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil\right\}$ 。

如果半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 中的边是树 T 中的边, 那么将这些边放入集合 Y 中, 待所有的边全部放入集合 Y 中后, 我们得到 $T \sqcup P_m \setminus Y$ 中是两两不相交的 P_2 路。

现在将 $T \sqcup P_m \setminus Y$ 的边进行划分。由引理 1, 树 T 的任意一种满足 $la(T)$ 的线性森林划分中, 每个最大度顶点只有一个划分中以路为端点的形式出现, 其余的划分均是路的内部顶点的形式。令每个树 T 的线性森林划分中最多只有一个最大度顶点为端点, LF_i ($i \in \left\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil\right\}$) 中是不包含以最大度顶点为路端点的形式的划分, LF_j ($j \in \left\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil\right\}$) 中是包含以最大度顶点为路端点形式的划分, 将每个 LF_j 中以最大度顶点为路端点的边放入集合 M , LF_j 中剩下的边放入集合 Lf_j , 那么

$E(T) = LF_j \cup LF_i = (M \cup Lf_j) \cup LF_i$ ($i, j \in 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$ 且 $i \neq j$)。如果半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 中的边是 Lf_j 的边, 那么将这些边放入集合 A'_j ; 如果是 LF_i 的边, 那么将这些边放入集合 A_i 。如果是 M 的边, 那么将这些边放入集合 M_1 。 N 是树 T 中最大度顶点的集合, $u_s \in N, v_t \in P_m$, 那么在半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 中, 将顶点 (u_s, v_t) 放入集合 Z 中, 把顶点集 Z 的导出路 P_2 的集合记为 N_1 , $M_1 \cup N_1$ 是一个线性森林。

再令顶点 $a \in V(T) - N$, 若 $a \in V(LF_i)$ 或 $a \in V(LF_j)$ 那么在半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 中, 将顶点集 $\{(a, v_t) : a \in V(LF_i), v_t \in V(P_m)\}$ 导出的边放入集合 B_i 中, 顶点集 $\{(a, v_t) : a \in V(LF_j), v_t \in V(P_m)\}$ 导出的边放入集合 B'_j 中, 不难看出 $(A_i \cup B'_j) \cup (A'_j \cup B_i)$ ($i, j \in 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$) 是 $\left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil - 1$ 个线性森林, 又 $E(T \sqcup P_m) = (M_1 \cup N_1) \cup (A_i \cup B'_j) \cup (A'_j \cup B_i)$, 这说明 $la(T \sqcup P_m) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1$ 。

综上所述, 树 T 和路 P_m 的半笛卡尔积图 $T \sqcup P_m$ 的线性荫度 $la(T \sqcup P_m) = \left\lceil \frac{\Delta(T) - 1}{2} \right\rceil + 1$ 。 \square

如图 3 所示, 我们用定理 5 中的分解方法将半笛卡尔积图 $T \sqcup P_4$ 分解成 3 个线性森林 $(B'_1 \cup B'_2 \cup A_3) \cup (A'_1 \cup A'_2 \cup B_3) \cup (M_1 \cup N_1)$ 。

$$\begin{aligned}
 LF_1 &= \{(u_1, u_5)(u_8, u_{10})(u_8, u_{12})\}, \quad Lf_1 = \{(u_8, u_{10}), (u_8, u_{12})\}, \\
 A'_1 &= \{(v_1^8, v_1^{10}), (v_1^8, v_1^{12}), (v_2^8, v_2^{10}), (v_2^8, v_2^{12}), (v_3^8, v_3^{10}), (v_3^8, v_3^{12}), (v_4^8, v_4^{10}), (v_4^8, v_4^{12})\}, \\
 LF_2 &= \{(u_2 u_5), (u_3 u_5), (u_8 u_{11})\}, \quad Lf_2 = \{(u_2 u_5), (u_3 u_5)\}, \\
 A'_2 &= \{(v_1^2, v_1^5), (v_1^3, v_1^5), (v_2^2, v_2^5), (v_2^3, v_2^5), (v_3^2, v_3^5), (v_3^3, v_3^5), (v_4^2, v_4^5), (v_4^3, v_4^5)\}, \\
 LF_3 &= \{(u_4 u_5), (u_5 u_6), (u_6 u_7), (u_7 u_8), (u_8 u_9)\}, \\
 A_3 &= \{(v_1^4, v_1^5), (v_1^5, v_1^6), (v_1^6, v_1^7), (v_1^7, v_1^8), (v_1^8, v_1^9), (v_2^4, v_2^5), (v_2^5, v_2^6), (v_2^6, v_2^7), (v_2^7, v_2^8), (v_2^8, v_2^9), \\
 &\quad (v_3^4, v_3^5), (v_3^5, v_3^6), (v_3^6, v_3^7), (v_3^7, v_3^8), (v_3^8, v_3^9), (v_4^4, v_4^5), (v_4^5, v_4^6), (v_4^6, v_4^7), (v_4^7, v_4^8), (v_4^8, v_4^9)\},
 \end{aligned}$$

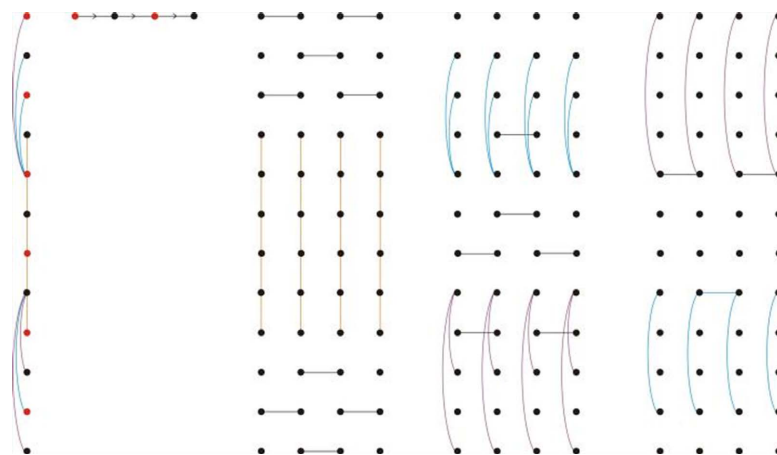


Figure 3. $(B'_1 \cup B'_2 \cup A_3) \cup (A'_1 \cup A'_2 \cup B_3) \cup (M_1 \cup N_1)$

图 3. $(B'_1 \cup B'_2 \cup A_3) \cup (A'_1 \cup A'_2 \cup B_3) \cup (M_1 \cup N_1)$

$$\begin{aligned}
M &= \{(u_1, u_5), (u_8, u_{11})\}, \\
M_1 &= \{(v_1^1, v_1^5), (v_2^1, v_2^5)(v_3^1, v_3^5)(v_4^1, v_4^5), (v_1^8, v_1^{11}), (v_2^8, v_2^{11})(v_3^8, v_3^{11})(v_4^8, v_4^{11})\}, \\
N &= \{u_5, u_8\}, \quad N_1 = \{(v_1^5, v_2^5), (v_3^5, v_4^5)(v_2^8, v_3^8)\}, \\
B'_1 &= \{(v_1^1, v_2^1), (v_3^1, v_4^1), (v_2^{10}, v_3^{10}), (v_2^{12}, v_3^{12})\}, \\
B'_2 &= \{(v_2^2, v_3^2), (v_1^3, v_2^3), (v_3^3, v_4^3), (v_1^{11}, v_2^{11}), (v_3^{11}, v_4^{11})\}, \\
B_3 &= \{(v_2^4, v_3^4), (v_2^6, v_3^6), (v_1^7, v_2^7), (v_3^7, v_4^7), (v_1^9, v_2^9), (v_3^9, v_4^9)\}.
\end{aligned}$$

基金项目

资助项目(新疆少数民族科技人才特殊培养计划); 科研项目(项目编号为 2022D03002)。

参考文献

- [1] Harary, F. (1970) Covering and Packing in Graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **175**, 198-215. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1970.tb56470.x>
- [2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1980) Covering and Packing in Graphs III: Cyclic and Acyclic Invariants. *Mathematica Slovaca*, **30**, 405-417.
- [3] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1981) Covering and Packing in Graphs IV: Linear Arboricity. *Networks*, **11**, 69-72. <https://doi.org/10.1002/net.3230110108>
- [4] Enomoto, H. and Péroche, B. (1984) The Linear Arboricity of Some Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **8**, 309-324. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190080211>
- [5] Guldán, F. (1986) The Linear Arboricity of 10-Regular Graphs. *Mathematica Slovaca*, **36**, 225-228.
- [6] Wu, J.-L. (1999) On the Linear Arboricity of Planar Graphs. *Journal of Graph Theory*, **31**, 129-134. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199906\)31:2<129::AID-JGT5>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199906)31:2<129::AID-JGT5>3.0.CO;2-A)
- [7] Wu, J.-L. and Wu, Y.-W. (2008) The Linear Arboricity of Planar Graphs of Maximum Degree Seven Is Four. *Journal of Graph Theory*, **58**, 210-220. <https://doi.org/10.1002/jgt.20305>
- [8] Niu, B. and Zhang X. (2019) Linear Arboricity of NIC-Planar Graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **35**, 924-934. <https://doi.org/10.1007/s10255-019-0865-z>
- [9] 姜楠, 黄丹君. 不含 4-圈的 IC-平面图线性荫度[J]. *应用数学进展*, 2020, 9(8): 1213-1220.
- [10] 陈洪玲, 王慧娟, 孙凤艳, 薛娟, 高红伟. 最大度大于等于 7 的平面图的线性荫度[J]. *运筹学学报*, 2020, 24(3): 154-160.
- [11] 李萍. 树和路乘积图的线性荫度[J]. *应用数学进展*, 2022, 11(3): 1242-1246.
- [12] Metsidik, M. (2014) Semi-Cartesian Product of Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **52**, 856-865. <https://doi.org/10.1007/s10910-013-0297-6>