Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 174-182
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121022

Morita环上的Gorenstein内射模

秦军霞

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年12月16日；录用日期：2022年1月19日；发布日期：2022年1月26日

摘　要

设 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ 是Morita环，其中 A 和 B 是环， N 是 (A,B)-双模， M 是 (B,A)-双模，并且 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 是Artin代数。本文主要研究了Morita环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 上的Gorenstein内射模与代数 A 和代数 B 的关系。给出了函子 H_A 和函子 H_B 保持Gorenstein内射模的等价条件。设 (X,Y,f,g) 是Morita环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 上的一个Gorenstein内射模，本文也证明了在一定条件下 ${}_AX$ 和 Y_B 也是Gorenstein内射模。

关键词

Morita环，Gorenstein内射模，Artin代数，Gorenstein代数

Gorenstein-Injective Modules over Morita Rings

Junxia Qin

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 16th, 2021; accepted: Jan. 19th, 2022; published: Jan. 26th, 2022

Abstract

Let $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ be a Morita ring, where A and B are rings, N is (A,B)-bimodule, M is (B,A)-bimodule, and $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ is an Artin algebra. In this paper we investigate the relations between the Gorenstein injective modules over a Morita ring $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ and algebras A and B. The equivalent conditions for functors H_A and H_B to preserve Gorenstein injective modules are

文章引用: 秦军霞. Morita 环上的 Gorenstein 内射[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 174-182.
DOI: 10.12677/pm.2022.121022

given. Let (X,Y,f,g) be a Gorenstein injective module on Morita ring $\Delta_{(\varphi,\psi)}$. It is also proved that $_AX$ and Y_B are Gorenstein injective modules under certain conditions.

Keywords

Morita Ring, Gorenstein Injective Modules, Artin Algebras, Gorenstein Algebras

1. 引言

H. Bass 在其著作中介绍了 Morita 环的概念，这种环包含很多的代数例子。1969 年，Auslander 等人在文献[1]中引入了双边 Noether 环上的 Gorenstein 维数为零的模。2000 年，Jenda 等人在文献[2]中对于一个任意环 R，研究了 Gorenstein 投射(内射、平坦)模及其维数。随后很多作者对 Gorenstein 投射(内射、平坦)模做了进一步的探索和推广，证明了它们的很多性质与投射(内射、平坦)模的性质类似。

本文讨论了 Morita 环上 Gorenstein 内射模与代数 A 和代数 B 之间的关系，定理 3.2 和定理 3.6 介绍了函子 H_A 和函子 H_B 保持 Gorenstein 内射模的等价条件。对于一个 Morita 环上的 Gorenstein 内射模 (X,Y,f,g)，定理 3.7 给出了使 $_AX$ 和 Y_B 成为 Gorenstein 内射左 A-模和左 B-模的条件。

2. 预备知识

本文中，环是具有单位元的结合环，模均是有限生成模。

设 A 是一个 Artin 代数，记 $A-mod$ 为有限生成左 A-模范畴。用 $A-inj(A-proj)$ 表示内射(投射)左 A-模，用 $A-Ginj(A-Gproj)$ 表示 Gorenstein 内射(投射)左 A-模，用 $pd(M)(id(M))$ 表示 M 的投射(内射)维数。

设 A，B 是环，$_AN_B$ 是 (A,B)-双模，$_BM_A$ 是 (B,A)-双模，模同态 $\varphi: M\underset{A}{\otimes}N\to B$，模同态 $\psi: N\underset{B}{\otimes}M\to A$。记 Morita context $\wp=(A,N,M,B,\varphi,\psi)$，设 $\Delta_{(\varphi,\psi)}(\wp)=\begin{pmatrix} A & _AN_B \\ _BM_A & B\end{pmatrix}$，$\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 中的加法按分量计算，乘法为

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi(n\otimes m') & an'+nb' \\ ma'+bm' & bb'+\varphi(m\otimes n')\end{pmatrix}$$

为了使 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 作成一个结合环，规定 $\varphi(m\otimes n)m'=m\psi(n\otimes m')$，$n\varphi(m\otimes n')=\psi(n\otimes m)n'$，$\forall m,m'\in M$，$\forall n,n'\in N$，则 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 关于普通矩阵的加法和上述定义的乘法作成一个环，文献[3]中称之为 Morita 环。

在文献[3]和文献[4]中已经对 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 环上的模进行了刻画。为了叙述方便，引入范畴 $\wp(\Delta_{(\varphi,\psi)})$，它中的对象是四元组 (X,Y,f,g)，其中 $X\in A-mod$，$Y\in B-mod$，$f\in Hom_B\left(M\underset{A}{\otimes}X,Y\right)$，$g\in Hom_A\left(N\underset{B}{\otimes}Y,X\right)$ 并且满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} N\underset{B}{\otimes}M\underset{A}{\otimes}X \arrow[r, "Id\otimes f"] \arrow[d, "\Psi\otimes Id"'] \arrow[dr, phantom, "g"] & N\underset{B}{\otimes}Y \arrow[d, "\varphi\otimes Id"'] \\ A\underset{A}{\otimes}X \arrow[r, "\cong"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\underset{A}{\otimes}N\underset{B}{\otimes}Y \arrow[r, "Id\otimes g"] \arrow[d] & M\underset{A}{\otimes}X \arrow[d, "f"] \\ B\underset{B}{\otimes}Y \arrow[r, "\cong"] & Y \end{tikzcd}$$

态射 $N\underset{B}{\otimes}M\underset{A}{\otimes}X\xrightarrow{\psi\otimes Id}A\underset{A}{\otimes}X$ 和态射 $A\underset{A}{\otimes}X\xrightarrow{\cong}X$ 的合成记为 ψ_X，态射 $M\underset{A}{\otimes}N\underset{B}{\otimes}Y\xrightarrow{\varphi\otimes Id}B\underset{B}{\otimes}Y$ 和态射 $B\underset{B}{\otimes}Y\xrightarrow{\cong}Y$ 的合成记为 φ_Y。

设函子 $G:\wp\left(\Delta_{(\varphi,\psi)}\right)\to\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$，对于任意的 $(X,Y,f,g)\in\wp\left(\Delta_{(\varphi,\psi)}\right)$，$G(X,Y,f,g)=X\oplus Y$，其中是 $X\oplus Y$ 是一个 Abel 群，对 $\forall a\in A$，$b\in B$，$n\in N$，$m\in M$，$x\in X$，$y\in Y$，$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模的结构如下

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}\cdot(x,y)=\left(ax+g(n\otimes y),by+f(m\otimes x)\right).$$

设 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$ 为 $\wp\left(\Delta_{\varphi,\psi}\right)$ 中的任意一个态射，定义

$$G(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=X\oplus Y,$$

由文献[4]可知 $\wp\left(\Delta_{(\varphi,\psi)}\right)$ 与 $\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 等价，因此可用 $\wp\left(\Delta_{(\varphi,\psi)}\right)$ 中的对象 (X,Y,f,g) 代替 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模。由文献[5]得一个 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 可以作为 Artin 代数的等价条件是存在交换环 R，并且是 Artin 环，使得代数 A 与代数 B 均是 Artin R-代数，M 和 N 是有限生成 R-模，并且 R 在 M 和 N 上都起中心作用。

设 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，则根据文献[6]有：

1) 范畴 $\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 中的序列 $0\to(X_1,Y_1,f_1,g_1)\to(X_2,Y_2,f_2,g_2)\to(X_3,Y_3,f_3,g_3)\to0$ 正合 $\Leftrightarrow$ 范畴 $A-mod$ 中的序列 $0\to X_1\to X_2\to X_3\to0$ 正合且范畴 $B-mod$ 中的序列 $0\to Y_1\to Y_2\to Y_3\to0$ 正合。

2) 设 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$ 是范畴 $\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 中的一个态射，同态 $c:Kera\to X$，同态 $d:Kerb\to Y$，则有 $Ker(a,b)=(Kera,Kerb,h,j)$，h 和 j 由以下交换图诱导得出

$$\begin{tikzcd} M\underset{A}{\otimes}Kera \arrow[r, "Id\otimes c"] \arrow[d, dashed, "h"'] & M\underset{A}{\otimes}X \arrow[r, "Id\otimes a"] \arrow[d, "f"'] & M\underset{A}{\otimes}X' \arrow[d, "f'"'] \\ Kerb \arrow[r, "d"] & Y \arrow[r, "b"] & Y' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N\underset{B}{\otimes}Kerb \arrow[r, "Id\otimes d"] \arrow[d, dashed, "j"'] & N\underset{B}{\otimes}Y \arrow[r, "Id\otimes b"] \arrow[d, "g"'] & N\underset{B}{\otimes}Y' \arrow[d, "g'"'] \\ Kera \arrow[r, "c"] & X \arrow[r, "a"] & X' \end{tikzcd}$$

3) 设 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$ 是范畴 $\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 中的一个态射，同态 $c':X'\to Cokera$，

同态 $d':Y'\to Cokerb$，则有 $Coker(a,b)=(Cokera,Cokerb,h',g')$，$h'$ 和 j' 由以下交换图诱导得出

$$\begin{tikzcd}
M\underset{A}{\otimes}X \arrow[r, "Id\otimes a"] \arrow[d, "f"] & M\underset{A}{\otimes}X' \arrow[r, "Id\otimes c'"] \arrow[d, "f'"] & M\underset{A}{\otimes}Co\ker a \arrow[d, dashed, "h'"] \\
Y \arrow[r, "b"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Co\ker b
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N\underset{B}{\otimes}Y \arrow[r, "Id\otimes b"] \arrow[d, "g"] & N\underset{B}{\otimes}Y' \arrow[r, "Id\otimes d'"] \arrow[d, "g'"] & N\underset{B}{\otimes}Co\ker b \arrow[d, dashed, "j'"] \\
X \arrow[r, "a"] & X' \arrow[r, "c'"] & Co\ker a
\end{tikzcd}$$

根据文献[5]，考虑如下几个函子：

对任意 $X\in A-mod$ 和 A-同态 $a:X\to X'$，函子 $T_A:A-mod\to\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 定义为

$$T_A(X):=\left(X,M\underset{A}{\otimes}X,Id_{M\underset{A}{\otimes}X},\psi_X\right),\quad T_A(a):=(a,Id_M\otimes a).$$

对任意 $Y\in B-mod$ 和 B-同态 $b:Y\to Y'$，函子 $T_B:B-mod\to\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 定义为

$$T_B(Y):=\left(N\underset{B}{\otimes}Y,Y,\varphi_Y,Id_{N\underset{B}{\otimes}Y}\right),\quad T_B(b):=(Id_N\otimes b,b).$$

对任意 $(X,Y,f,g)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 和 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$-态射 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$，函子 $U_A:\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod\to A-mod$ 定义为 $U_A(X,Y,f,g):=X$，$U_A(a,b):=a$。

对任意 $(X,Y,f,g)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 和 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$-态射 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$，函子 $U_B:\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod\to B-mod$ 定义为 $U_B(X,Y,f,g):=Y$，$U_B(a,b):=b$。

对于每个 $X\in A-mod$，记 $\varepsilon'_X:N\underset{B}{\otimes}Hom_A(N,X)\to X$ 为由 involution 给出的 A-同态，构造 B-同态 $\delta'_{M\underset{A}{\otimes}X}:M\underset{A}{\otimes}X\to Hom_A\left(N,N\underset{B}{\otimes}M\underset{A}{\otimes}X\right)$，它将 $m\underset{A}{\otimes}x$ 作用到 $Hom_A\left(N,N\underset{B}{\otimes}M\underset{A}{\otimes}X\right)$ 中，对任意 $X\in A-mod$ 和 A-同态 $a:X\to X'$，函子 $H_A:A-mod\to\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 定义为

$$H_A(X):=\left(X,Hom_A(N,X),Hom_A(N,\psi_X)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}X},\varepsilon'_X\right),\quad H_A(a):=(a,Hom_A(N,a)).$$

对于每个 $Y\in B-mod$，记 $\varepsilon_Y:M\underset{A}{\otimes}Hom_B(M,Y)\to Y$ 为由 involution 给出的 B-同态，构造 A-同态 $\delta_{N\underset{B}{\otimes}Y}:N\underset{B}{\otimes}Y\to Hom_B\left(M,M\underset{A}{\otimes}N\underset{B}{\otimes}Y\right)$，它将 $n\underset{B}{\otimes}y$ 作用到 $Hom_B\left(M,M\underset{A}{\otimes}N\underset{B}{\otimes}Y\right)$ 中，对任意 $Y\in B-mod$ 和 B-同态 $b:Y\to Y'$，函子 $H_B:B-mod\to\Delta_{(\varphi,\psi)}-mod$ 定义为

$$H_B(Y):=\left(Hom_B(M,Y),Y,\varepsilon_Y,Hom_A(M,\varphi_Y)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}Y}\right),\quad H_B(b):=(Hom_B(M,b),b).$$

下面命题是对以上几个函子的进一步刻画。

命题 2.1 [5] 设 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix}A & {}_AN_B\\ {}_BM_A & B\end{pmatrix}$，并且 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 是 Artin 代数，则

1) 函子T_A，T_B，H_A和H_B都是满忠实的；
2) 对子(T_A,U_A)，(T_B,U_B)，(U_A,H_A)，(U_B,H_B)均为函子的伴随对；
3) 函子U_A和U_B均为正合函子。
下面命题刻画了不可分解投射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模和不可分解内射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模。

命题 2.2 [5]设 Morita 环$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，并且$\Delta_{(\varphi,\psi)}$是 Artin 代数，则

1) 不可分解投射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模恰是

$$T_A(P)=\left(P,M\underset{A}{\otimes}P,Id_{M\underset{B}{\otimes}P},\psi_P\right),$$

或

$$T_B(Q)=\left(N\underset{B}{\otimes}Q,Q,\varphi_Q,Id_{N\underset{B}{\otimes}Q}\right),$$

对$\forall P\in A-Proj$，且P不可分解，$\forall Q\in B-Proj$，且Q不可分解。
2) 不可分解内射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模恰是

$$H_A(I)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right),$$

或

$$H_B(J)=\left(Hom_B(M,J),J,\varepsilon_J,Hom_B(M,\varphi_J)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}J}\right),$$

对$\forall I\in A-Inj$且I不可分解，$\forall J\in B-Inj$且J不可分解。

定理 2.3 [7] 设 Morita 环$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$是一个 Gorenstein 代数。
1) 若M_A，${}_AN$的投射维数有限，则A是 Gorenstein 代数；
2) 若N_B，${}_BM$的投射维数有限，则B是 Gorenstein 代数。

3. 主要结果

引理 3.1 设A是一个 Artin 代数，${}_AN_B$是一个(A,B)-双模，并且$pd\,{}_AN<\infty$，$I^\bullet:=\cdots\to I^{n-1}\to I^n\to I^{n+1}\to\cdots$是内射左$A$-模的正合复形，则$Hom_A(N,I^\bullet)$正合。

证明 设${}_AN$的一个投射分解为$0\to P_n\to\cdots\to P_0\to{}_AN\to0$。因为每个$I^i$是左$A$-内射的，所以有正合复形$0\to Hom_A(P_n,I^\bullet)\to\cdots\to Hom_A(P_0,I^\bullet)\to Hom_A({}_AN,I^\bullet)\to0$。又由于$\forall P_i\in A-proj$，所以对$\forall i\in Z$，有$Hom_A(P_i,I^\bullet)$正合，因此$Hom_A({}_AN,I^\bullet)$正合。

定理 3.2 设$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$是 Gorenstein 代数。

1) 设$pd\,{}_AN<\infty$。若${}_AI\in Ginj$，则$H_A(I)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$；

2) 设$pdM_B<\infty$。若${}_BJ\in Ginj$，则$H_B(J)=\left(Hom_B(M,J),J,\varepsilon_J,Hom_B(M,\varphi_J)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}J}\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$。

证明 1) 因为${}_AI\in Ginj$，所以存在${}_AI$的完全内射分解$I^\bullet:=\cdots\to I^{-1}\to I^0\to I^1\to\cdots$，使得${}_AI\cong Ker(I^0\to I^1)$。又因为$pd\,{}_AN<\infty$，所以由引理 3.1 知$Hom_A(N,I^\bullet)$正合。因此有内射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模的正

合列 $H_A(I^\bullet):=\cdots\to H_A(I^{-1})\to H_A(I^0)\to H_A(I^1)\to\cdots$，使得

$$H_A(I)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right)\cong Ker\left(H_A(I^0)\to H_A(I^1)\right).$$

又因为 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 是 Gorenstein 代数，所以对任意的内射 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模 (X',Y',f',g')，它的投射维数有限。因此可由引理 3.1 知 $Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left((X',Y',f',g'),H_A(I^\bullet)\right)$ 正合，即 $H_A(I^\bullet)$ 是一个完全内射分解，故

$H_A(I^\bullet)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$。

2) 与 1)的证明类似。

注记 3.2 [7] Artin 代数 A 是一个 Gorenstein 代数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall M\in A-proj$，有 $id({}_AM)<\infty$，并且对 $\forall N\in A-inj$，有 $Pd({}_AN)<\infty$。

定义 3.3 [8] 称一个内射左 R-模的正合复形 $I^\bullet:=\cdots\to I^{-1}\to I^0\to I^1\to\cdots$ 是完全正合的，如果对 $\forall I\in R-Inj$，$\cdots\to Hom_R(I,I^{-1})\to Hom_R(I,I^0)\to Hom_R(I,I^1)\to\cdots$ 正合。

命题 3.4 设 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix}A & {}_AN_B\\ {}_BM_A & B\end{pmatrix}$，并且 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 是 Artin 代数。

1) 设函子 $Hom_A(N,-)$ 将内射左 A-模的正合复形作用成左 B-模的正合复形，并且 M_A 是投射的，则复形 $I^\bullet$ 完全正合当且仅当复形 $H_A(I^\bullet)$ 完全正合。

2) 设函子 $Hom_B(M,-)$ 将内射左 B-模的正合复形作用成左 A-模的正合复形，并且 N_B 是投射的，则复形 $I^\bullet$ 完全正合当且仅当复形 $H_B(I^\bullet)$ 完全正合。

证明 1) $\Rightarrow$)设完全正合复形 $I^\bullet:=\cdots\to I^{-1}\to I^0\to I^1\to\cdots$，$\forall I^i\in A-Inj$，$\forall i\in Z$，则有 $Hom_A(N,I^\bullet)$ 正合。因此 $H_A(I^\bullet):=\cdots\to H_A(I^{-1})\to H_A(I^0)\to H_A(I^1)\to\cdots$ 正合。又因为 (U_A,H_A) 是伴随对，并且 U_A 正合，所以 H_A 保持内射对象，从而每个 $H_A(I^i)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-inj$。下证对任意 $(X,Y,f,g)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-inj$，$Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left((X,Y,f,g),H_A(I^\bullet)\right)$ 正合。事实上，根据命题 2.2(2)，只需证明复形 $Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left(H_A(I),H_A(I^\bullet)\right)$ 和复形 $Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left(H_B(J),H_A(I^\bullet)\right)$ 正合，其中 $I\in A-inj$，$J\in B-inj$。又因为 $I^\bullet$ 完全正合，所以对任意 $I\in A-inj$，复形 $Hom_A(I,I^\bullet)$ 正合，而由命题 2.1 知函子 H_A 是满忠实的，所以复形 $Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left(H_A(I),H_A(I^\bullet)\right)$ 正合。设 $J\in B-inj$，由 (U_A,H_A) 是伴随对可得

$Hom_A\left(U_A(H_B(J)),I^i\right)\cong Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left(H_B(J),H_A(I^i)\right)$，而

$Hom_A\left(U_A(H_B(J)),I^i\right)=Hom_A\left(Hom_B(M,J),I^i\right)$，因此有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}(H_B(J),H_A(I^{-1})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}(H_B(J),H_A(I^0)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}(H_B(J),H_A(I^1)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_A(Hom_B(M,J),I^{-1}) \arrow[r] & Hom_A(Hom_B(M,J),I^0) \arrow[r] & Hom_A(Hom_B(M,J),I^{-1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

因为 $Hom_B(M,J)$ 是内射左 A-模，所以复形 $Hom_A\left(Hom(B,J),I^\bullet\right)$ 正合，因此复形

$Hom_{\Delta_{(\varphi,\psi)}}\left(H_B(J),H_A\left(I^{\bullet}\right)\right)$正合，从而$H_A\left(I^{\bullet}\right)$完全正合。

$\Leftarrow$）设$I^{\bullet}$是左A-模的复形，使得$H_A\left(I^{\bullet}\right)$完全正合。用函子$U_A$作用$H_A\left(I^{\bullet}\right)$可得正合复形

$$I^{\bullet}:\cdots\to I^{-1}\to I^{0}\to I^{1}\to\cdots$$

由(U_A,H_A)是伴随对可得H_A左正合，并且H_A满忠实，因此每个$I^i\in A-inj$。因为$H_A\left(I^{\bullet}\right)$完全正合，$H_A$满忠实，所以对任意内射左$A$-模$I$，$Hom_A\left(I,I^{\bullet}\right)$正合。

2)与1)的证明对偶。

由命题3.4可得以下推论。

推论 3.5 设 Morita 环$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，并且$\Delta_{(\varphi,\psi)}$是 Artin 代数。

1) 设函子$Hom_A(N,-)$将内射左A-模的正合复形作用成左B-模的正合复形，并且M_A是投射的。若$I\in A-Ginj$，则$H_A(I)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$；

2) 设函子$Hom_B(M,-)$将内射左B-模的正合复形作用成左A-模的正合复形，并且N_B是投射的。若${}_BJ\in B-Ginj$，则$H_B(J)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$。

命题 3.6 设 Morita 环$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，并且$\Delta_{(\varphi,\psi)}$是 Artin 代数。

1) 设$pd\,{}_AN<\infty$，M_A是投射的。若${}_AI\in A-Ginj$，则

$$H_A(I)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj\text{；}$$

2) 设$pd\,{}_BM<\infty$，N_B是投射的。若${}_BJ\in B-Ginj$，则

$$H_B(J)=\left(Hom_B(M,J),J,\varepsilon_J,Hom_B(M,\varphi_J)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}J}\right)\in\Delta_{(\phi,\psi)}-Ginj.$$

证明 1) 设$I^{\bullet}:=\cdots\to I^{-1}\to I^{0}\to I^{1}\to\cdots$正合，其中$\forall I^i\in A-Inj$，$\forall i\in Z$。由题设知$pd\,{}_AN<\infty$，所以由引理3.1可得$Hom_A\left(N,I^{\bullet}\right)$正合。又因为$M_A$是投射的，${}_AI\in A-Ginj$，所以可由推论3.5得

$$H_A(I)=\left(I,Hom_A(N,I),Hom_A(N,\psi_I)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}I},\varepsilon'_I\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj.$$

2) 与1)的证明类似。

定理 3.7 设 Morita 环$\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，并且$\Delta_{(\varphi,\psi)}$是 Artin 代数，$(X,Y,f,g)$是 Gorenstein 内射$\Delta_{(\varphi,\psi)}$-模。

1) 若M_A是自由的，A是 Gorenstein 代数，则${}_AX\in A-Ginj$；

2) 若N_B是自由的，B是 Gorenstein 代数，则${}_BY\in B-Ginj$。

证明 1) 设$(X,Y,f,g)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj$，由命题2.2知存在完全内射分解

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_A(I^{-1})\oplus H_B(I^{-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_A(I^{0})\oplus H_B(I^{0}) \arrow[r] & \cdots \\
& & (X,Y,f,g) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

用函子 U_A 作用后得

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] I^{\bullet}:=\cdots \arrow[r] & I^{-1}\oplus Hom_B\left(M,J^{-1}\right) \arrow[rr] \arrow[dr] & & I^{0}\oplus Hom_B\left(M,J^{0}\right) \arrow[r] & \cdots \\ & & {}_{A}X \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

因为 M_A 是自由的，并且 $I^i\in B-inj$，所以 $Hom_B\left(M,J^i\right)\in A-inj$，因此 $I^i\oplus Hom_B\left(M,J^i\right)\in A-inj$。由于 A 是 Gorenstein 代数，故任意内射左 A-模 I 有有限投射维数，由引理 3.1 知 $Hom_A\left(I,I^{\bullet}\right)$ 正合，从而 $I^{\bullet}$ 是完全内射分解，因此 ${}_AX\in A-Ginj$。

2)与 1)的证明类似。

推论 3.8 设 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，并且 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 是 Artin 代数。

1) 设 M_A 是投射的，$pd\,{}_AN<\infty$，并且 A 是 Gorenstein 代数。设 ${}_AX$ 是一个左 A-模，则

$$H_A(X)=\left(X,Hom_A(N,X),Hom_A(N,\psi_X)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}X},\varepsilon'_X\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj \text{ 当且仅当 } {}_AX\in A-Ginj\text{；}$$

2) 设 N_B 是投射的，$pdM_B<\infty$，并且 B 是 Gorenstein 代数。设 ${}_BY$ 是一个左 B-模，则

$$H_B(Y)=\left(Hom_B(M,Y),Y,\varepsilon_Y,Hom_B(M,\varphi_Y)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}Y}\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj \text{ 当且仅当 } {}_BY\in B-Ginj\text{。}$$

证明 由定理 3.7 和定理 3.6 可得。

推论 3.9 设 $\Delta_{(\varphi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ 是一个 Gorenstein 代数。

1) 设 M_A 是投射的，$pd\,{}_AN<\infty$。设 ${}_AX$ 是一个左 A-模，则

$$H_A(X)=\left(X,Hom_A(N,X),Hom_A(N,\psi_X)\circ\delta'_{M\underset{A}{\otimes}X},\varepsilon'_X\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj \text{ 当且仅当 } {}_AX\in A-Ginj\text{；}$$

2) 设 N_B 是投射的，$pdN_B<\infty$。设 ${}_BY$ 是一个左 B-模，则

$$H_B(Y)=\left(Hom_B(M,Y),Y,\varepsilon_Y,Hom_B(M,\varphi_Y)\circ\delta_{N\underset{B}{\otimes}Y}\right)\in\Delta_{(\varphi,\psi)}-Ginj \text{ 当且仅当 } {}_BY\in B-Ginj\text{。}$$

证明 由定理 2.4，定理 3.7 和定理 3.2 可得。

本文主要研究了 Morita 环 $\Delta_{(\varphi,\psi)}$ 上的 Gorenstein 内射模与代数 A 和代数 B 的关系，给出了函子 H_A 和函子 H_B 保持 Gorenstein 内射模的等价条件。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[3] Bass, H. (1968) Algebraic K-Theory. W A Benjamin, Inc., New York.

[4] Green, E. (1982) On the Representation Theory of Rings in Matrix Form. *Pacific Journal of Mathematics*, **100**,

123-138. https://doi.org/10.2140/pjm.1982.100.123

[5] Green, E. and Psaroudakis, C. (2014) On Artin Algebras Arising from Morita Contexts. *Algebras and Represent Theory*, **17**, 1485-1525. https://doi.org/10.1007/s10468-013-9457-4

[6] Gao, N. and Psaroudakis, C. (2017) Gorenstein Homological Aspects of Monomorphism Categories via Morita Rings. *Algebras and Representation Theory*, **20**, 487-529. https://doi.org/10.1007/s10468-016-9652-1

[7] Asefa, D. (2021) Gorenstein-Projective Modules over Morita Rings. *Algebra Colloquium*, **28**, 521-532. https://doi.org/10.1142/S1005386721000407

[8] Sergio, E., Fu, X.H. and Alina, I. (2017) Totally Acyclic Complexes. *Journal of Algebra*, **470**, 300-319. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.09.009