Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 218-232
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121026

三元数字集的自相似测度的谱性性质

曹永申

福建师范大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2021年12月20日；录用日期：2022年1月20日；发布日期：2022年1月27日

摘 要

Fu和Wen证明了压缩比为实数 ρ 和有界三元整数字集列 $D_n=\{0,\ a_n,\ b_n\}\subset\mathbb{Z}$ 生成的无穷 $Bernoulli$ 卷积测度是谱测度的充要条件. 本文研究由压缩比为实数 ρ 和三元实数字集 D 定义的迭代函数系统生成的自相似测度的谱性质, 我们证明该测度是谱测度当且仅当 ρ^{-1} 是以 3 为因子的非零整数且存在非零实数 a, 使得 $a(D-\alpha)$ 模 3 同余集合 $\{0,\ 1,\ 2\ \}$, 其中 $\alpha\in D$ 。

关键词

自相似测度，谱测度，谱，$Fourier$ 变换

Spectrality of Self-Similar Measures with Three Element Digit Sets

Yongshen Cao

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Dec. 20^{th}, 2021; accepted: Jan. 20^{th}, 2022; published: Jan. 27^{th}, 2022

Abstract

Fu and Wen prove that the convolution of the infinite Bernoulli measure generated by

文章引用: 曹永申. 三元数字集的自相似测度的谱性性质[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 218-232.
DOI: 10.12677/pm.2022.121026

the compression ratio of real numbers ρ and the sequence of bounded three-element integers $D_n = \{0,\ a_n,\ b_n\} \subset \mathbb{Z}$ is a sufficient and necessary condition for spectral measure. In this paper we study the spectrality of the self-similar measure generated by the iterative function system defined by the compression ratio of real numbers ρ and the set of three-element real digits D. We prove that the measure is spectral if and only if ρ^{-1} is a non-zero integer with a factor of 3 and $a(D-\alpha)$ is congruence with $\{0,\ 1,\ 2\ \}$ under (mod 3) for some a, where $\alpha \in D$.

Keywords

Self-Similar Measure, Spectral Measure, Spectrum, Fourier Transform

1. 引言及主要结果

称 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 *Borel* 概率测度 μ 是一个谱测度, 如果存在 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ 使得指数函数集 $E_\Lambda := \{e^{2\pi i\langle\lambda,\ x\rangle} : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $L^2(\mu)$ 的一个正交基, 此时称 Λ 是 μ 的一个谱. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中具有正 *Lebesgue* 测度的子集, 如果 *Lebesgue* 测度限制在 Ω 上是一个谱测度, 则称 Ω 是一个谱集. 在 [7] 中Fuglede提出了著名的谱集猜想：

谱集猜想 集合 Ω 是一个谱集当且仅当 Ω 是一个平移 *tile*, 即存在 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 使得等式 $\sum_{t\in\Gamma} I_\Omega(x-t) = 1$ 关于 *Lebesgue* 测度几乎处处成立.

在高维情形 ($d \geqslant 3$) 中, 已有结果 [10] [11] [14] 表明该猜想不成立. 但 $d = 1$ 或 2 时, 该猜想仍然是开放问题. 注意到集合 Ω 是否为谱集与测度的谱性有关, 人们自然会问什么样的测度是谱测度？

1998年,Jorgensen和Pedersen在 [9] 中发现了第一个奇异、非原子的谱测度. 他们证明压缩比为 $\frac{1}{2k}$ 的无穷 *Bernoulli* 卷积测度是谱测度, 并构造出相应的谱, 但压缩比为 $\frac{1}{3}$ 的无穷 *Bernoulli* 卷积测度不是谱测度. 这一惊人的发现使人们有可能将经典的 *Fourier* 分析建立在分形集上, 也开创了自仿测度和 *Moran* 型自仿测度谱性研究的新领域. 关于这方面的研究已有丰富结果, 如[1–15].

设 $0 < |\rho| < 1$, $D = \{d_1,\ d_2,\ d_3\} \subset \mathbb{R}$. 则

$$\mu_{\rho,D} := \delta_{\rho D} * \delta_{\rho^2 D} * \cdots * \delta_{\rho^n D} * \cdots \tag{1.1}$$

定义了一个 $\mathbb{R}$ 上的概率测度，我们称之为自相似测度。本文考虑 $\mu_{\rho,D}$ 的谱性质，证明了如下结

果：

定理1.1　设 $0<|\rho|<1$, $D=\{d_0,\ d_1,\ d_2\}\subset\mathbb{R}$ 是三元实数集, $\mu_{\rho,D}$由(1.1) 定义. 则 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度当且仅当 $|\rho|^{-1}\in 3\mathbb{N}^{+}$ 且存在整数 $k_1,\ k_2$ 和实数 $a\neq 0$, 使得 $\{d_1-d_0,\ d_2-d_0\}=\{(3k_1+1)a,\ (3k_2+2)a\}$.

对于这个问题, 已经有的成果是 : (1) 当 $D=\{0,\ 1,\ 2\}$ 时, 文献[2], [4]证明 : $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度当且仅当 $|\rho|^{-1}\in 3\mathbb{N}^{+}$. (2) 当 $D=\{0,\ a,\ b\}\subset\ \mathbb{Z}$ 时, 文献 [6], [13] 证明 : $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度当且仅当 $|\rho|^{-1}\in 3\mathbb{N}^{+}$ 且存在整数 $k_1,\ k_2$ 和整数 $\gamma\neq 0$ 使得 $\{a,\ b\}=\{(3k_1+1)\gamma,\ (3k_2+2)\gamma\}$ (这是文献 [6], [13] 的结果的特殊情况).

如果 $D=\{d_0,\ d_1,\ d_2\}\subset\mathbb{R}$ 是任意的实数集 (三数字集), 则 $\mu_{\rho,D}$的谱性质还是一个未解决的问题. 我们上述的定理解决了这个问题. 需要注意到, 在 [6] 中,Fu和Wen考虑的 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是包含零的三元整数序列, 根据三元整数集的 $Mask$ 函数的零点集和不同情况下 ρ 的最小多项式得到最后结论. 我们这篇论文考虑 D 为三元实数集, 首先证明 $Moran$ 型测度关于数字集平移和缩放的谱性不变性, 然后将测度的谱分解为三个集合, 最后使用反证法得到结论.

2. 基本引理

在这一节, 我们主要介绍通用符号和一些已知的结果.

设 D 是有限实数集, 称

$$M_D(x)=\frac{1}{\#D}\sum_{d\in D}e^{-2\pi idx},\quad x\in\mathbb{R}$$

为 D 的 $Mask$ 函数. 设 $\mu_{\rho,D}$ 是 (1.1) 定义的 $Borel$ 概率测度, 则 $\mu_{\rho,D}$ 的 $Fourier$ 变换为 :

$$\widehat{\mu_{\rho,D}}(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\mu_{\rho,D}(x)=\prod_{n=1}^{\infty}M_D(\rho^n\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

记 $\mathcal{Z}(f)$ 为函数 f 的零点集, 则

$$\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\rho^{-n}\mathcal{Z}(M_D)\right). \tag{2.2}$$

设 Λ 是一实数子集, 记 $E_\Lambda:=\{e^{2\pi i\lambda x}:\lambda\in\Lambda\}$. 则指数函数集 E_Λ 是 $L^2(\mu_{\rho,D})$ 的正交集当且仅当

$$\Lambda-\Lambda\subset\{0\}\cup\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}}). \tag{2.3}$$

若记 $Q_\Lambda(\xi):=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\lambda+\xi)|^2$, 利用 $Parseval$ 等式, 可得下面判断 E_Λ 正交性的重要工具.

引理2.1 [9] 指数函数集 E_Λ 是 $L^2(\mu_{\rho,D})$ 的正交集当且仅当对任意 $\xi\in\mathbb{R}$, 有 $Q_\Lambda(\xi)\leqslant 1$. E_Λ 是 $L^2(\mu_{\rho,D})$ 的正交基当且仅当 $Q_\Lambda(\xi)\equiv 1$.

定义2.2　设 $D,\ C$ 是两个基数相等的有限实数集, 如果

$$H:=\frac{1}{\sqrt{\#D}}\left[e^{2\pi idc}\right]_{d\in D,\ c\in C}$$

是酉矩阵, 则称 (D, C) 是一个相容对.

根据引理 2.1, 可得下面相容对的判断准则.

引理2.3　设 D, C 是有限实数集, 则 (D, C) 是相容对当且仅当 $\#D=\#C$ 且

$$\sum_{c\in C}|M_D(\xi+c)|^2\equiv 1,\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

引理2.4　设 μ_1, μ_2 是 *Borel* 概率测度, 其中 $|\widehat{\mu_1}(\xi)|=1$ 的解集是 $\mathbb{R}$ 的离散子集. 如果 Λ 是 $\mu_1*\mu_2$ 的谱, 则存在 $\alpha, \beta\in\Lambda$, 使得 $\widehat{\mu_1}(\alpha-\beta)=0$.

证明　因为 Λ 是 $\mu_1*\mu_2$ 的谱, 从而

$$\widehat{\mu_1*\mu_2}(\alpha-\beta)=0,\quad \alpha\neq\beta\in\Lambda. \tag{2.4}$$

再根据测度卷积和测度 *Fourier* 变换的定义, 有

$$\widehat{\mu_1*\mu_2}(x)=\widehat{\mu_1}(x)\widehat{\mu_2}(x). \tag{2.5}$$

假设任意 $\alpha, \beta\in\Lambda$, 有 $\widehat{\mu_1}(\alpha-\beta)\neq 0$, 则根据 (2.4) 和 (2.5) 可知 $\widehat{\mu_2}(\alpha-\beta)=0$, 从而 E_Λ 是 $L^2(\mu_2)$ 的正交集. 因此, 根据引理 2.1 可知

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_2}(\lambda+\xi)|^2\leqslant 1,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}.$$

因为 $|\widehat{\mu_1}(\xi)|=1$ 的解集是 $\mathbb{R}$ 的离散子集且 Λ 是可数集, 从而存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得

$$|\widehat{\mu_1}(\lambda+\xi)|^2<1,\quad \forall\lambda\in\Lambda.$$

再由 (2.5) 可知

$$1=Q_\Lambda(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_1}(\lambda+\xi)|^2|\widehat{\mu_2}(\lambda+\xi)|^2<\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_2}(\lambda+\xi)|^2\leqslant 1,$$

这是矛盾的, 从而引理得证. □

在本节的最后, 我们介绍 *Moran* 型测度关于数字集平移和缩放的谱性不变性.

命题2.5　设 $0<|\rho|<1$, $D=\{d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}\}\subset\mathbb{R}\ (n>1)$, $\mu_{\rho,D}$ 是由 (1.1) 定义的自相似测度. 如果 $C=\{0, a(d_1-d_0), \cdots, a(d_{n-1}-d_0)\}$, 其中 $a\neq 0$. 则 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度当且仅当 $\mu_{\rho,C}$ 是谱测度.

证明　对任意实数集 Λ, 设 $\Gamma=a^{-1}\Lambda$. 因为对任意 *Borel* 集 A 有

$$\mu_{\rho,D}(A)=\mu_{\rho,C}(a(A-\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n d_0)),$$

从而 $|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|=|\widehat{\mu_{\rho,C}}(a^{-1}x)|$. 因此

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x+\lambda)|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,C}}(a^{-1}x+a^{-1}\lambda)|^2=\sum_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{\mu_{\rho,C}}(a^{-1}x+\gamma)|^2.$$

这暗示了在 $\mathbb{R}$ 上 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x+\lambda)|^2\equiv 1$ 当且仅当在 $\mathbb{R}$ 上 $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{\mu_{\rho,C}}(y+\gamma)|^2\equiv 1$. 根据引理 2.1 定理得证. $\square$

3. 主要定理的证明

根据 [6] 中的结论和命题 2.5, 我们已经得到了定理 1.1 的证明. 本文给出了另外一种证明方法.

定理3.1 设 $\mu_{\rho,D}$ 由 (1.1) 定义, 其中 $D=\{d_0,\ d_1,\ \cdots,\ d_{n-1}\}$ $(n>1)$ 是一有限实数集, 压缩比 ρ 满足 $|\rho|=\frac{q}{p}$, $gcd(p,\ q)=1$ 且 $2\leqslant q<p$. 则存在常数 $a>0$, 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|\cdot(\ln(3+|x|))^a\}<+\infty. \tag{3.1}$$

证明 不失一般性, 我们不妨令 $d_0=0,\ d_1=1$. 否则令 $C=\{0,\ 1,\ \frac{d_2-d_0}{d_1-d_0},\cdots,\frac{d_{n-1}-d_0}{d_1-d_0}\}$, 则有

$$|M_D(x)|=|\frac{1}{n}e^{2\pi i d_0x}\sum_{j=0}^{n-1}e^{2\pi i(d_j-d_0)x}|=|M_C((d_1-d_0)x)|.$$

由 (2.1) 知 $|\widehat{\mu_{\rho,D}}((d_1-d_0)^{-1}x)|=|\widehat{\mu_{\rho,C}}(x)|$.

给定实数 $x\in\mathbb{R}$, 则存在唯一 $h(x)\in(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$, 使得 $x-h(x)$ 是整数. 我们有下面的断言.

断言：存在常数 $0<c<1$, 使得如果满足 $|\rho x|>1$, 则存在实数 y, 使得 $|\rho x|\geqslant|y|\geqslant|\rho|^2\cdot|x|^{\frac{\ln q}{\ln p}}$ 且 $|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|<c|\widehat{\mu_{\rho,D}}(y)|$.

我们分两种情形证明断言.

情形一：$h(\rho x)\notin(-\frac{1}{2p},\ \frac{1}{2p})$. 则

$$|M_D(\rho x)|=\frac{1}{n}|1+e^{2\pi i\rho x}+\sum_{j=2}^{n-1}e^{2\pi i d_j\rho x}|\leqslant\frac{n-2+|1+e^{2\pi i\cdot h(\rho x)}|}{n}\leqslant\frac{n-2+|1+e^{\frac{\pi i}{p}}|}{n}. \tag{3.2}$$

令 $c=\frac{n-2+|1+e^{\frac{\pi i}{p}}|}{n}$, $y=\rho x$, 即证断言.

情况二：$h(\rho x)\in(-\frac{1}{2p},\ \frac{1}{2p})$. 根据 $h(\rho x)$ 的定义, $\rho x-h(\rho x)$ 有下列展开式

$$\rho x-h(\rho x)=\sum_{j\geqslant 0}z_jp^j,$$

其中 $z_j\in\{-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ p-2\}$. 因为 $|\rho x|>1$, 则我们可令 $s\geqslant 0$ 为最小的整数, 使得 $z_s\neq 0$. 由此可得

$$h(\rho^{s+2}x)=h\left(\rho^{s+1}h(\rho x)+\frac{z_sq^{s+1}}{p}\right). \tag{3.3}$$

因为 $h(\rho x)\in\left(-\frac{1}{2p},\ \frac{1}{2p}\right)$ 且 $0<|\rho|<1$, 故我们有 $\rho^{s+1}h(\rho x)\in\left(-\frac{1}{2p},\ \frac{1}{2p}\right)$. 注意到 $gcd(p,\ q)=1$ 和 $1\leqslant|z_s|\leqslant p-2$, 即知 $\left|h\left(\frac{z_sq^{s+1}}{p}\right)\right|\geqslant\frac{1}{p}$, 从而 $h(\rho^{s+2}x)\notin\left(-\frac{1}{2p},\ \frac{1}{2p}\right)$. 由 (2.1)和(3.2) 知

$$|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|\leqslant|M_D(\rho^{s+2}x)|\cdot|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\rho^{s+2}x)|\leqslant c|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\rho^{s+2}x)|.$$

因为

$$|\rho x| = |h(\rho x) + \sum_{j\geqslant 0} z_j p^j| \geqslant p^s - |h(\rho x)| \geqslant p^s - \frac{1}{2p} \geqslant |\rho| p^s,$$

从而 $s \leqslant \log_p |x|$. 令 $y = \rho^{s+2} x$, 因此

$$|\rho x| \geqslant |y| = |\rho^{s+2} x| \geqslant |\rho|^2 |x| \cdot |\rho|^{\log_p |x|} = |\rho|^2 |x| \cdot |x|^{\log_p |\rho|} = |\rho|^2 |x|^{\ln q/\ln p},$$

断言即证.

给定 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $|\rho x| > 1$, 根据断言知, 存在有限实数列 $x_1 = x,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$, 使得

$$|\rho x_j| \geqslant |x_{j+1}| \geqslant |\rho|^2 |x_j|^{\ln q/\ln p},\ |\widehat{\mu_{\rho,D}}(x_j)| \leqslant c |\widehat{\mu_{\rho,D}}(x_{j+1})|, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

且有

$$|\rho x_n| \leqslant 1 < |\rho x_{n-1}|.$$

故我们有

$$|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)| \leqslant c^{n-1} |\widehat{\mu_{\rho,D}}(x_n)| \leqslant c^{n-1} \max\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(y)| : |\rho y| \leqslant 1\} \tag{3.4}$$

且

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant |\rho x_n| \geqslant |\rho| \cdot |\rho|^2 |x_{n-1}|^{\ln q/\ln p} \geqslant |\rho| \cdot |\rho|^{2+2\ln q/\ln p} \cdot |x_{n-1}|^{(\ln q/\ln p)^2} \\ &\geqslant \ \cdots \ \geqslant |\rho| \cdot |\rho|^{2+2\ln q/\ln p+\cdots+2(\ln q/\ln p)^{n-2}} \cdot |x|^{(\ln q/\ln p)^{n-1}} \\ &\geqslant |\rho| \cdot |\rho|^{2(1-\ln q/\ln p)^{-1}} \cdot |x|^{(\ln q/\ln p)^{n-1}} = |\rho| \cdot p^{-2} \cdot |x|^{(\ln q/\ln p)^{n-1}} \\ &\geqslant p^{-3} \cdot |\rho x|^{(\ln q/\ln p)^{n-1}}. \end{aligned}$$

因此

$$3\ln p \geqslant (\ln q/\ln p)^{n-1} \cdot \ln|\rho x| = c^{(n-1)\ln(\ln q/\ln p)/\ln c} \cdot \ln|\rho x|,$$

所以

$$[3\ln p]^{\ln c/\ln(\ln q/\ln p)} \geqslant c^{(n-1)} \cdot [\ln|\rho x|]^{\ln c/\ln(\ln q/\ln p)}.$$

设 $a = \ln c/\ln(\ln q/\ln p)$, 则 $a > 0$ 且 $[3\ln p]^a \geqslant c^{(n-1)} \cdot [\ln|\rho x|]^a$. 根据 (3.4) 可知, 对 $x \in \mathbb{R}$, 如果 $|\rho x| > 1$, 则

$$|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)| \cdot [\ln|\rho x|]^a \leqslant [3\ln p]^a \max\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(y)| : |\rho y| \leqslant 1\} < \infty.$$

又因为 $\sup_{|\rho x|>1}\left\{\frac{\ln(3+|x|)}{\ln|\rho x|}\right\} < \infty$ 且 $\sup_{|\rho x|\leqslant 1}\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x) \cdot [\ln(3+|x|)]^a\} < \infty$, 这意味着

$$b := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)| \cdot [\ln(3+|x|)]^a\} < \infty. \tag{3.5}$$

定理得证. □

引理3.2 (i) 设 $D = \{d_0,\ d_1,\ d_2\}$ 是三元实数集, 则 $\mathcal{Z}(M_D) \neq \varnothing$ 当且仅当存在整数 $k_1,\ k_2$ 和实数

$a \neq 0$, 使得 $\{d_1 - d_0,\ d_2 - d_0\} = \{(3k_1+1)a,\ (3k_2+2)a\}$ 且 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$.

(ii) 设 $D = \{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$, 其中 $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$. 如果 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$, 则 $\mathcal{Z}(M_D) = \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z} = \frac{1}{3}(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$.

证明 (i) 根据 $M_D(x)$ 定义可以看出

$$\begin{aligned}
& M_D(x) = \frac{1}{3}(e^{-2\pi i d_0 x} + e^{-2\pi i d_1 x} + e^{-2\pi i d_2 x}) = 0, \\
\Leftrightarrow\ & cos(2\pi(d_1-d_0)x) + cos(2\pi(d_2-d_0)x) = -1, \\
& \qquad sin(2\pi(d_1-d_0)x) = -sin(2\pi(d_2-d_0)x), \\
\Leftrightarrow\ & \text{存在整数 } n_1,\ n_2,\ \text{使得 } (d_1-d_0)x = n_1 \pm \frac{1}{3},\ (d_1+d_2-2d_0)x = n_1+n_2, \\
\Leftrightarrow\ & \text{存在整数 } n_1,\ n_2,\ \text{使得 } \{3(d_1-d_0)x,\ 3(d_2-d_0)x\} = \{3n_1+1,\ 3n_2+2\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

显然存在整数 $k_1,\ k_2$, 使得

$$\frac{1}{gcd(3n_1+1,\ 3n_2+2)}\{3n_1+1,\ 3n_2+2\} = \{3k_1+1,\ 3k_2+2\}.$$

这暗示了 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$. (i) 即证.

(ii) 令 $x \in \mathcal{Z}(M_D)$, 则 (3.6) 暗示存在整数 n_1, n_2 和 $l \in \{-1,\ 1\}$,使得 $(3k_1+1)x = n_1 + \frac{l}{3}$, $(3k_2+2)x = n_2 - \frac{l}{3}$. 因此

$$x - \frac{l}{3} = \frac{n_1 - lk_1}{3k_1+1} = \frac{n_2 - lk_2}{3k_2+2}.$$

根据 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$ 可知 $(3k_1+1)|(n_1-lk_1)$ 且 $(3k_2+2)|(n_2-lk_2)$. 这意味着 $x \in \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$. 因此 $\mathcal{Z}(M_D) \subseteq \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$.

设 $x = \frac{l}{3} + z \in \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$, 其中 $z \in \mathbb{Z}$, $l \in \{-1,\ 1\}$. 则 $(3k_1+1)x = (3k_1+1)z + lk_1 + \frac{l}{3}$ 且 $[(3k_1+1)+(3k_2+2)]x = (k_1+k_2+1)(l+3z)$. 则根据 (3.6) 可知 $M_D(x) = 0$. 因此 $\mathcal{Z}(M_D) \supseteq \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$, 从而 $\mathcal{Z}(M_D) = \pm\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$. □

根据引理 3.2 可知 $\mathcal{Z}(M_D)$ 不含 k_1, k_2, 从而有下述推论.

推论3.3 设 $D = \{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$ 且 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$, 其中 $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$. 如果 $C = \{0,\ 1,\ 2\}$, 则 $\widehat{\mu_{\rho,C}}(x) = 0$ 当且仅当 $\widehat{\mu_{\rho,D}}(x) = 0$.

引理3.4 设 $D = \{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$ 且 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2) = 1$, 其中 $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$. 如果 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度, 则存在整数 $p,\ q$, 使得 $|\rho| = \frac{q}{3p}$ 且 $gcd(q,\ 3p) = 1$.

证明 设 Λ 是 $\mu_{\rho,D}$ 的谱, 根据推论 3.3 可知 E_Λ 是 $L^2(\mu_{\rho,C})$ 的无穷正交集, 其中 $C = \{0,\ 1,\ 2\}$. 再使用 [4] 中定理 1.2 可知存在正整数 $p,\ q,\ r$, 使得 $|\rho| = (\frac{q}{3p})^{1/r}$ 且 $gcd(q,\ 3p) = 1$. 不失一般性, 假设 r 是使 $(\frac{q}{3p})^{1/r} \in \mathbb{Q}$ 的最小正整数, 即任意正整数 $k < r$, $(\frac{q}{3p})^{1/k}$ 是无理数, 则 $|\rho|$ 的最小多项式是 $3px^r - q$. 因为 $\mu = \delta_{\rho D} * [\delta_{\rho^2 D} * \delta_{\rho^3 D} * \cdots * \delta_{\rho^n D} * \cdots]$, $\mu = \delta_{\rho^2 D} * [\delta_{\rho D} * \delta_{\rho^3 D} * \cdots * \delta_{\rho^n D} * \cdots]$, 根据引理 2.4 可知

$$(\Lambda - \Lambda) \cap \mathcal{Z}(M_{\rho D}) \neq \varnothing, \quad (\Lambda - \Lambda) \cap \mathcal{Z}(M_{\rho^2 D}) \neq \varnothing.$$

因此, 通过引理 3.2 可知存在 $\lambda_j \in \Lambda\ (j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 和 $z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \rho^{-1}(\pm\frac{1}{3} + z_1), \quad \lambda_2 - \lambda_3 = \rho^{-2}(\pm\frac{1}{3} + z_2). \tag{3.7}$$

另一方面, 对 $\lambda \in \Lambda\backslash\{\lambda_0,\ \lambda_1\}$, 有 $\lambda - \lambda_0,\ \lambda - \lambda_1 \in \mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{-n}\mathcal{Z}(M_D)$. 所以, 存在整数 $n_0 > 0, n_1 > 0, z_3, z_4$, 使得

$$\lambda - \lambda_0 = \rho^{-n_0}(\pm\frac{1}{3} + z_3), \quad \lambda - \lambda_1 = \rho^{-n_1}(\pm\frac{1}{3} + z_4).$$

因此

$$\rho^{-n_1}(\pm\frac{1}{3} + z_4) - \rho^{-n_0}(\pm\frac{1}{3} + z_3) = \lambda_0 - \lambda_1 = \rho^{-1}(\pm\frac{1}{3} + z_1).$$

不失一般性, 假设 $n_1 \geqslant n_0 \geqslant 1$, 则 ρ 是方程

$$(\pm 1 + 3z_1)x^{n_1-1} + (\pm 1 + 3z_3)x^{n_1-n_0} - (\pm 1 + 3z_4) = 0 \tag{3.8}$$

的解. 设 $n_1 - 1 = l_1 r + s_1$, $n_1 - n_0 = l_2 r + s_2$, 其中 $l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0,\ 0 \leqslant s_1,\ s_2 < r$. 则 (3.8) 和 $\rho = \pm(\frac{q}{3p})^{1/r}$ 暗示存在整数 $m_1,\ m_2,\ m_3$, 其中 $m_3 \neq 0$, 使得 ρ 是等式

$$m_1 x^{s_1} + m_2 x^{s_2} - m_3 = 0$$

的解. 因为 $|\rho|$ 的最小多项式是 $3px^r - q$ 且 $0 \leqslant s_1,\ s_2 < r$, 可以得到 $s_1 = s_2 = 0$. 从而 $r|(n_0 - 1),\ r|(n_1 - 1)$ 且

$$(\Lambda\backslash\{\lambda_0,\ \lambda_1\}) - \lambda_0 \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{-(1+nr)}\mathcal{Z}(M_D)\right),$$

再根据 (3.7) 第一个式子, 有

$$\Lambda - \lambda_0 \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{-(1+nr)}\mathcal{Z}(M_D)\right). \tag{3.9}$$

对 $\alpha \neq \beta \in \Lambda\backslash\{\lambda_0\}$, 通过 (3.9) 可知存在整数 $n_2,\ n_3,\ z_5,\ z_6$ 使得 $\alpha - \lambda_0 = \rho^{-(1+n_2 r)}(\pm\frac{1}{3} + z_5)$, $\beta - \lambda_0 = \rho^{-(1+n_3 r)}(\pm\frac{1}{3} + z_6)$. 又因为 $\alpha - \beta \in \mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^{-n}\mathcal{Z}(M_D)$, 从而存在整数 $n,\ z_7$, 使得

$$\rho^{-(1+n_2 r)}(\pm\frac{1}{3} + z_5) - \rho^{-(1+n_3 r)}(\pm\frac{1}{3} + z_6) = \rho^{-n}(\pm\frac{1}{3} + z_7).$$

可以类似的得到 $r|(n-1)$. 因此, $\alpha - \beta \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{-(1+nr)}\mathcal{Z}(M_D)$, 所以

$$\Lambda - \Lambda \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{-(1+nr)}\mathcal{Z}(M_D)\right).$$

通过 (3.7) 第二个式子可知 $r = 1$. 因此, 存在整数 $p,\ q$, 使得 $|\rho| = \frac{q}{3p}$ 且 $gcd(q,\ 3p) = 1$. □

如无特殊说明, 下文中令 $D = \{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$, $|\rho| = \frac{q}{3p}$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+$

$2) = 1$, $p,\ q$ 是整数且 $gcd(q,\ 3p) = 1$.

引理3.5 如果 Λ 是 $\mu_{\rho,D}$ 的谱, 其中$0 \in \Lambda$. 则

$$(\Lambda - \Lambda)\backslash\{0\} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{(3p)^n(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}. \tag{3.10}$$

证明 因为 $\mu = \delta_{\rho D} * [\delta_{\rho^2 D} * \delta_{\rho^3 D} * \cdots * \delta_{\rho^n D} * \cdots]$, 从而由引理 2.4 可知

$$(\Lambda - \Lambda) \cap \mathcal{Z}(M_{\rho D}) \neq \varnothing.$$

因此, 通过引理 3.2 可知存在 $\lambda_0,\ \lambda_1 \in \Lambda$ 和 $k_0 \in (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$, 使得

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \frac{k_0}{3|\rho|}.$$

首先我们证明 $\Lambda - \lambda_1 \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{(3p)^n(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}\right)$. 对 $\lambda \in \Lambda\backslash\{\lambda_0,\ \lambda_1\}$, 根据 (2.2), (2.3) 和引理 2.4 可知存在整数 $k_1,\ k_2 \in (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$ 和 $n_1,\ n_2 > 0$, 使得 $\lambda - \lambda_1 = \frac{k_1}{3|\rho|^{n_1}}$, $\lambda - \lambda_0 = \frac{k_2}{3|\rho|^{n_2}}$. 从而

$$\frac{k_1}{3|\rho|^{n_1}} - \frac{k_0}{3|\rho|} = \lambda - \lambda_0 = \frac{k_2}{3|\rho|^{n_2}}.$$

又因为 $|\rho| = \frac{q}{3p}$, 从而上面的式子等价于

$$\frac{k_1(3p)^{n_1-1}}{q^{n_1-1}} - k_0 = \frac{k_2(3p)^{n_2-1}}{q^{n_2-1}}.$$

我们分三种情形讨论：

情况一：$n_1 > 1$ 且 $n_2 > 1$. 因为 $gcd(q,\ 3p) = 1$, 所以上面不等式暗示 $3p|k_0$, 这与 $k_0 \in (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$ 矛盾.

情况二：$n_1 > 1$ 且 $n_2 = 1$. 则 $\frac{k_1(3p)^{n_1-1}}{q^{n_1-1}} - k_0 = k_2$, 从而 $\frac{k_1}{q^{n_1-1}}$ 是整数. 这意味着存在整数 $n > 0$, 使得 $\lambda - \lambda_1 \in \frac{(3p)^n(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}$.

情况三：$n_1 = 1$. 显然 $\lambda - \lambda_1 \in \frac{(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}$. 综上即得

$$\Lambda - \lambda_1 \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{(3p)^n(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}\right). \tag{3.11}$$

然后我们证明 (3.10). 对 $\Lambda\backslash\{\lambda_1\}$ 中两个不同的元素 $\lambda = \lambda_1 + \frac{(3p)^m l_1}{3|\rho|}$, $\lambda' = \lambda_1 + \frac{(3p)^k l_2}{3|\rho|}$, 其中 $l_1,\ l_2 \in (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$, $m,\ k \in \mathbb{Z}$. 通过 (2.3) 可知存在整数 $s \geqslant 0$ 和 $l_3 \in (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$, 使得

$$\frac{(3p)^m l_1}{3|\rho|} - \frac{(3p)^k l_2}{3|\rho|} = \frac{(3p)^s l_3}{3|\rho| q^s}.$$

因此 $q^s|l_3$, 这意味着 $\lambda-\lambda'$ 属于 (3.11) 右侧, 从而

$$(\Lambda-\Lambda)\subset\{0\}\cup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\frac{(3p)^n(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})}{3|\rho|}\right).$$

□

引理3.6 设 Λ 是 $\mu_{\rho,D}$ 的谱, 其中 $0\in\Lambda$. 则存在整数 z_j 和 $\Lambda_j\subset\mathbb{Z}$ $(j=0,\ 1,\ 2)$ 且 $0\in\Lambda_j$, 使得 Λ_j 是 $\mu_{\rho,D}$ 的谱且 Λ 有如下分解

$$\Lambda=\bigcup_{j=0}^{2}[\frac{j+3z_j}{3\rho}+\rho^{-1}\Lambda_j]. \tag{3.12}$$

证明 根据引理 3.5 可知 $\Lambda\subset\frac{\mathbb{Z}}{3\rho}$. 对 $j\in\{0,\ 1,2\}$, 如果 $\Lambda\cap\frac{j+3\mathbb{Z}}{3\rho}\neq\varnothing$, 则存在 $\lambda_j=\frac{j+3z_j}{3\rho}\in\Lambda$, 使得

$$|\frac{j+3z_j}{3\rho}|=\min\{|\lambda|:\lambda\in\Lambda\cap\frac{j+3\mathbb{Z}}{3\rho}\},\quad j=0,\ 1,\ 2.$$

令

$$\Lambda_j=\rho(\Lambda-\lambda_j)\cap\mathbb{Z},\quad j=0,\ 1,\ 2. \tag{3.13}$$

显然 $0\in\Lambda_j$ 且

$$\Lambda=\bigcup_{j=0}^{2}[\lambda_j+\rho^{-1}\Lambda_j] \tag{3.14}$$

是不交并, 即 $i\neq j\in\{0,\ 1,\ 2\}$ 时, 有 $[\lambda_j+\rho^{-1}\Lambda_j]\cap[\lambda_i+\rho^{-1}\Lambda_i]=\varnothing$.

根据引理 2.1 和 (3.14) 可知, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}1&=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\lambda+x)|^2=\sum_{j=0}^{2}\sum_{\gamma_j\in\Lambda_j}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j+x)|^2\\&=\sum_{j=0}^{2}|M_D(\frac{j}{3}+\rho x)|^2\sum_{\gamma_j\in\Lambda_j}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\frac{j+3z_j}{3}+\gamma_j+\rho x)|^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

给定 $j\in\{0,\ 1,\ 2\}$, 若 $\Lambda_j\neq\varnothing$, 任取 $\gamma_j\neq\gamma_j'\in\Lambda_j$, (3.13) 表明 $\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j\neq\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j'\in\Lambda$. 因此 $(\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j)-(\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j')\in\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}})$, 从而存在整数 $z\in(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})$ 和 $n>0$, 使得 $(\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j)-(\lambda_j+\rho^{-1}\gamma_j')=\frac{z}{3|\rho|^n}$. 因此 $\gamma_j-\gamma_j'=\frac{z}{3|\rho|^{n-1}}$, 又因为 $\gamma_j-\gamma_j'$ 是整数, 从而 $n>1$. 这意味着 $\gamma_j-\gamma_j'\in\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}})$, 从而 E_{Λ_j} 是空集或者是 $L^2(\mu_{\rho,D})$ 是正交集. 又因为 $(D,\ \{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\})$ 是相容对, 根据引理 2.1 和 (3.15) 可知

$$1=\sum_{j=0}^{2}|M_D(\frac{j}{3}+\rho x)|^2\sum_{\gamma_j\in\Lambda_j}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\frac{j+3z_j}{3}+\gamma_j+\rho x)|^2\leqslant\sum_{j=0}^{2}|M_D(\frac{j}{3}+\rho x)|^2=1.$$

又因为几乎所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $M_D(\frac{j}{3}+\rho x)\neq 0$, 从而

$$\sum_{\gamma_j\in\Lambda_j}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\frac{j+3z_j}{3}+\gamma_j+\rho x)|^2\equiv 1,\quad\forall x\in\mathbb{R},\ j=0,\ 1,\ 2.$$

根据引理 2.1 可知 Λ_j 是 $\mu_{\rho,D}$ $(j=0,\ 1,\ 2)$ 的谱, 引理得证. □

证明定理1.1

充分性：由条件知 $|\rho|^{-1}\in 3\mathbb{N}^{+}$ 且存在整数 $k_1,\ k_2$ 和实数 $a\neq 0$, 使得 $\{d_1-d_0,\ d_2-d_0\}=\{(3k_1+1)a,\ (3k_2+2)a\}$. 设 $C=\{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$, 则 $(C,\ \{-\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3}\})$ 是相容对. 因此 $(3p,\ C,\ \{-p,\ 0,\ p\})$是 $Hadamard$ 三元对, 根据 [5] 可知 $\mu_{\rho,C}$ 是谱测度. 最后由命题 2.5 可知 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度.

必要性：如果 $\mu_{\rho,D}$ 是谱测度, 则存在可数集 $\Lambda\subset\mathbb{R}$, 使得 $(\mu_{\rho,D},\ \Lambda)$ 是谱对, 不失一般性, 我们假设 $0\in\Lambda$. 则 $\Lambda\backslash\{0\}\subset\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{\rho,D}})$, 从而 $\mathcal{Z}(M_D)\neq\varnothing$. 由引理 3.2 证明了存在整数 $k_1,\ k_2$ 和实数 $a\neq 0$, 使得 $\{d_1-d_0,\ d_2-d_0\}=\{(3k_1+1)a,\ (3k_2+2)a\}$ 且 $gcd(3k_1+1,\ 3k_2+2)=1$. 因此命题 2.5 证明了 $\mu_{\rho,C}$ 是谱测度, 其中 $C=\{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$. 这意味着只需要考虑 $D=\{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$ 的情况下 $|\rho|^{-1}\in 3\mathbb{N}^{+}$ 成立即可. 当 $D=\{0,\ 3k_1+1,\ 3k_2+2\}$ 时, 根据引理 3.4 可知存在整数 $p,\ q$, 使得 $|\rho|=\frac{q}{3p}$ 且 $gcd(q,\ 3p)=1$. 引理 3.6 证明了存在可数集 $0\in\Lambda\subset\mathbb{Z}$, 使得 $(\mu_{\rho,D},\ \Lambda)$ 是谱对.

为了使用反证法证明 $|\rho|=\frac{1}{3p}$, 我们需要先做一些准备工作.

根据引理 3.6, Λ 能分解成

$$\Lambda=\bigcup_{j'=0}^{2}\left[\frac{j'+3z_{j'}}{3\rho}+\rho^{-1}\Lambda_{j'}\right], \tag{3.16}$$

其中 $z_{j'}\in\mathbb{Z}$, $0\in\Lambda_{j'}\subset\mathbb{Z}$. 故 $\frac{j'+3z_{j'}}{3\rho}=\frac{p(j'+3z_{j'})}{q}\in\Lambda\subset\mathbb{Z}$. 这意味着 $\rho^{-1}\Lambda_{j'}\in\mathbb{Z}$, 从而 $\Lambda_{j'}\subset q\mathbb{Z}$ $(j'=0,\ 1,\ 2)$. 又因为 $0<q<3p$ 且 $gcd(q,\ 3p)=1$, 从而存在 $j\in\{0,\ 1,\ 2\}$, $n_j\in\mathbb{Z}$, 使得 $\frac{j'+3z_{j'}}{q}=j+3n_j$. 由引理 2.1 可知如果 Λ_j是 $\mu_{\rho,D}$的谱, 则 $-\Lambda_j$ 也是 $\mu_{\rho,D}$ 的谱. 因此存在整数 n_j 和 $\mu_{\rho,D}$ 的谱 $\overline{\Gamma_j}\subset q\mathbb{Z}$, 其中 $0\in\overline{\Gamma_j}$, 使得

$$\Lambda=\bigcup_{j=0}^{2}\left[p(j+3n_j)+\frac{3p}{q}\overline{\Gamma_j}\right].$$

进一步, 我们可以选择 $m_j\in\mathbb{Z}$, 使得 $p(j+3m_j)\in\Lambda$ 且

$$|p(j+3m_j)|=\min\{|p(j+3n_j)+\frac{3p}{q}\gamma|:\gamma\in\overline{\Gamma_j}\}. \tag{3.17}$$

同时存在 $\mu_{\rho,D}$ 的谱 $\Gamma_j\subset q\mathbb{Z}$, 其中 $0\in\Gamma_j$, 使得

$$\Lambda=\bigcup_{j=0}^{2}\left[p(j+3m_j)+\frac{3p}{q}\Gamma_j\right].$$

因为 $0\in\Lambda$ 且 $0\notin\left\{\left[p(1+3n_1)+\frac{3p}{q}\overline{\Gamma_1}\right]\bigcup\left[p(2+3n_2)+\frac{3p}{q}\overline{\Gamma_2}\right]\right\}$, 从而 $0\in p(3n_0)+\frac{3p}{q}\overline{\Gamma_0}$, 这意味着 $m_0=0$. 按照这个操作, 可以找到一列整数 $n_{j_1,\cdots,j_n}$ 和一列 $\mu_{\rho,D}$ 的谱 $\overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}}$ $(n\geqslant 1)$, 其中

$0 \in \overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}}$, 使得

$$\Lambda = \bigcup_{j_1,\cdots,j_n=0}^{2} \left(\sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3n_{j_1,\cdots,j_l}) + (\frac{3p}{q})^n \overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}} \right), \quad n > 0.$$

相应地, 存在一系列整数 $m_{j_1,\cdots,j_n}$ 和一列 $\mu_{\rho,D}$ 的谱 $\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}$ $(n \geqslant 1)$, 其中 $0 \in \Gamma_{j_1,\cdots,j_n}$, 使得

$$\begin{aligned} &|\sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3m_{j_1,\cdots,j_l})| \\ &= \min\left\{ |\sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3n_{j_1,\cdots,j_l}) + (\frac{3p}{q})^n \gamma| : \gamma \in \overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}} \right\}, \quad n > 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\Lambda = \bigcup_{j_1,\cdots,j_n=0}^{2} \left(\sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3m_{j_1,\cdots,j_l}) + (\frac{3p}{q})^n \Gamma_{j_1,\cdots,j_n} \right), \quad n > 0 \tag{3.19}$$

且

$$j_l = 0 \text{ 时 } m_{j_1,\cdots,j_l} = 0, \quad l = 1,\ 2,\ 3\cdots.$$

给定序列 $j_1, \cdots, j_n$, 设 $a_n = \sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3m_{j_1,\cdots,j_l})$. 因为

$$p(3p)^{n-1}(j_n + 3n_{j_1,\cdots,j_n}) + (\frac{3p}{q})^n \overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_n}} \subset (\frac{3p}{q})^{n-1} \overline{\Gamma_{j_1,\cdots,j_{n-1}}},$$

从而 $|a_{n-1}| \leqslant |a_n|$, 这意味着 a_{n-1} 与 $p(3p)^{n-1}(j_n + 3m_{j_1,\cdots,j_n})$ 正负号相同. 因此 $j_n \neq 0$ 时, 有 $|a_n| = |a_{n-1}| + |p(3p)^{n-1}(j_n + 3m_{j_1,\cdots,j_n})| \geqslant (3p)^{n-1}$. 即

$$j_n \neq 0 \text{ 时 } \left| \sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3m_{j_1,\cdots,j_l}) \right| \geqslant (3p)^{n-1}, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots. \tag{3.20}$$

令

$$V_n = \left\{ \sum_{l=1}^{n} p(3p)^{l-1}(j_l + 3m_{j_1,\cdots,j_l}) : j_1, \cdots, j_n \in \{0,\ 1,\ 2\} \right\}.$$

由 (3.19) 和 $0 \in \Gamma_{j_1,\cdots,j_n}$ $(n \geqslant 1)$ 知

$$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n, \quad V_n \subset V_{n+1}.$$

注意到当 $j_l = 0$ 时 $m_{j_1,\cdots,j_l} = 0$ $(l \geqslant 1)$, 标准的推导可得 $V_n - V_n \subset \{0\} \cup \mathcal{Z}(\widehat{\mu_n})$, 其中 $\mu_n = \delta_{\rho D} * \delta_{\rho^2 D} * \cdots * \delta_{\rho^n D}$. 这意味着 V_n 是 $L^2(\mu_n)$ 的正交集, 从而由引理 2.1 可知

$$\sum_{\lambda \in V_n} |\widehat{\mu_n}(t + \lambda)|^2 \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

接下来证明 $q=1$. 反证法, 假设 $1<q<3p$. 选择整数 $N>a^{-1}$, 其中 a 由定理 3.1 给出. 设

$$Q_k(t):=\sum_{\lambda\in V_{k^N}}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(t+\lambda)|^2,\quad k=1,\ 2,\ 3,\cdots. \tag{3.22}$$

则对 $t\in(-(3p)^2,\ (3p)^2)$, 有

$$\begin{aligned}
Q_{k+1}(t)-Q_k(t)=&\sum_{\lambda\in V_{(k+1)^N}\setminus V_{k^N}}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(t+\lambda)|^2\\
=&\sum_{\lambda\in V_{(k+1)^N}\setminus V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2\cdot|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\rho^{(k+1)^N}(t+\lambda))|^2\\
\leqslant&b^2\sum_{\lambda\in V_{(k+1)^N}\setminus V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2\cdot(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(t+\lambda)|))^{-2a}\\
\leqslant&b^2\sum_{\lambda\in V_{(k+1)^N}\setminus V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2\cdot(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}\\
\leqslant&b^2\left[1-\sum_{\lambda\in V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2\right]\cdot(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}.
\end{aligned}$$

第一个等式来自 (3.22), 第二个等式来自 (2.1), 第一个不等式来自定理 3.1, 第二个不等式来自 (3.20), 最后一个不等式来自 (3.21), 其中 b由 (3.5)给出, 即 $b=\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|\cdot[\ln(3+|x|)]^a\}$. 在下面的证明中我们限制 $t\in(-(3p)^2,\ (3p)^2)$.

此外, 我们有

$$\begin{aligned}
Q_k(t)=&\sum_{\lambda\in V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2\cdot|\widehat{\mu_{\rho,D}}(\rho^{(k+1)^N}(t+\lambda))|^2\\
\leqslant&\sum_{\lambda\in V_{k^N}}\prod_{s=1}^{(k+1)^N}|M_D(\rho^s(t+\lambda))|^2.
\end{aligned}$$

因此

$$1-Q_{k+1}(t)\geqslant[1-Q_k(t)]\cdot[1-b^2(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}]. \tag{3.23}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}}{k^{-2Na}}\\
=&\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)^N\ln|\rho|+k^N\ln 3p}{k^N}\right)^{-2a}=(\ln q)^{-2a}>0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

显然存在 $n_0>0$, 使得任意 $k\geqslant n_0$, 有 $[1-b^2(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}]>0$. 根据 (3.23) 可知

$$1-Q_{K+1}(t)\geqslant[1-Q_n(t)]\prod_{k=n}^{K}[1-b^2(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}]>0,\quad\forall K\geqslant n\geqslant n_0.\quad(3.25)$$

根据假设 $N>a^{-1}$, 我们有 $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2Na}<\infty$. 因此 $\lim_{K\to\infty}\prod_{k=1}^{K}[1-k^{-2Na}]$ 收敛到一个正实数. 因此, 通过 (3.24) 我们能找到 $k_0>n_0>0$, 使得

$$\prod_{k=k_0}^{+\infty}[1-b^2(\ln(1+|\rho^{(k+1)^N}(3p)^{k^N-1}|))^{-2a}]=:a_0\in(0,\ 1).$$

然后, 根据 $(\mu_{\rho,D},\ \Lambda)$ 是谱对和 (3.25), 对 $t\in(-(3p)^2,\ (3p)^2)$, 有

$$0=1-\sum_{\lambda\in\Lambda}|\widehat{\mu_{\rho,D}}(t+\lambda)|^2=\lim_{K\to\infty}[1-Q_{K+1}(t)]\geqslant a_0[1-Q_{k_0}(t)]\geqslant 0.$$

因此, 对 $t\in(-(3p)^2,\ (3p)^2)$, 有 $Q_{k_0}(t)=1$. 又因为 $Q_{k_0}(t)$ 能延拓为复平面上的整函数, 从而对 $t\in\mathbb{R}$, $Q_{k_0}(t)\equiv 1$. 因此 $\Lambda_{k_0^N}$ 是谱. 但是这与 $\Lambda_{k_0^N}$ 是有限集矛盾. 定理得证. □

本文命题 2.5 证明了 *Moran* 型测度关于数字集平移和缩放的谱性不变性, 然后引理 3.6 将测度的包含零元素的任意谱分解为三个整数谱, 接着使用定理 3.1 得到的 $|\widehat{\mu_{\rho,D}}(x)|$ 衰减速度和反证法得到最后结论.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11971109, 11971190)。

参考文献

[1] An, L.X. and He, X.G. (2014) A Class of Spectral Moran Measures. *Journal of Functional Analysis*, **266**, 343-354. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.08.031

[2] Dai, X.R., He, X.G. and Lai, C.K. (2013) Spectral Property of Cantor Measures with Consecutive Digits. *Advances in Mathematics*, **242**, 187-208. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.04.016

[3] Dai, X.R., He, X.G. and Lau, K.S. (2014) On Spectral N-Bernoulli Measures. *Advances in Mathematics*, **259**, 511-531. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.03.026

[4] Deng, Q.R. (2014) Spectrality of One Dimensional Self-Similar Measures with Consecutive Digits. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 331-346. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.046

[5] Dutkay, D., Haussermann, J. and Lai, C.K. (2019) Hadamard Triples Generate Self-Affine

Spectral Measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, **371**, 1439-1481. https://doi.org/10.1090/tran/7325

[6] Fu, Y.S. and Wen, Z.X. (2017) Spectrality of Infinite Convolutions with Three-Element Digit Sets. *Monatshefte für Mathematik*, **183**, 465-485. https://doi.org/10.1007/s00605-017-1026-1

[7] Fuglede, B. (1974) Commuting Self-Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem. *Journal of Functional Analysis*, **16**, 101-121. https://doi.org/10.1016/0022-1236(74)90072-X

[8] He, L. and He, X.G. (2017) On the Fourier Orthonormal Bases of Cantor-Moran Measures. *Journal of Functional Analysis*, **272**, 1980-2004. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.09.021

[9] Jorgensen, P.E.T. and Pedersen, S. (1998) Dense Analytic Subspaces in Fractal L^2-Spaces. *Journal d' Analyse Mathématique*, **75**, 185-228. https://doi.org/10.1007/BF02788699

[10] Kolountzakis, M.N. and Matolcsi, M. (2004) Complex Hadamard Matrices and the Spectral Set Conjecture. *Collectanea Mathematica*, **57**, 281-291.

[11] Kolountzakis, M.N. and Matolcsi, M. (2006) Tiles with No Spectra. *Forum Mathematicum*, **18**, 519-528. https://doi.org/10.1515/FORUM.2006.026

[12] Li, J.L. (2011) Spectra of a Class of Self-Affine Measures. *Journal of Functional Analysis*, **260**, 1086-1095. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.12.001

[13] Shi, R. (2019) Spectrality of a Class of Cantor-Moran Measures. *Journal of Functional Analysis*, **276**, 3767-3794. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.10.005

[14] Tao, T. (2004) Fuglede's Conjecture Is False in 5 and Higher Dimensions. *Mathematical Research Letters*, **11**, 251-258. https://doi.org/10.4310/MRL.2004.v11.n2.a8

[15] Wang, Z.Y., Dong, X.H. and Liu, Z.S. (2018) Spectrality of Certain Moran Measures with Three-Element Digit Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **459**, 743-752. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.006