

高考试卷中数学核心素养的考核分析

——以2021年新高考I卷平面解析几何试题为例

夏一凡

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2022年9月22日; 录用日期: 2022年10月21日; 发布日期: 2022年10月28日

摘要

《普通高中数学课程标准(2017年版)》, 以下简称课标(2017版), 提出教育应重视对学生数学核心素养的培养。平面解析几何是高中数学的重要内容, 也是高考题中的一大重要考点, 而数学高考试题对于学生数学核心素养的衡量又是一个不可缺少的载体。所以本文对2021年全国新高考数学I卷上的平面解析几何试题作分析, 并根据喻平的数学核心素养评价框架, 制作数学核心素养教育评价表。研究平面解析几何内容在高考试卷上数学核心素养的考察情况, 并从中得到一定的结论与思考。

关键词

数学核心素养, 平面解析几何

Assessment and Analysis of Mathematics Core Literacy in the College Entrance Examination Papers

—A Case Study of Plane Analytic Geometry in Volume I of the New College Entrance Examination in 2021

Yifan Xia

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 22nd, 2022; accepted: Oct. 21st, 2022; published: Oct. 28th, 2022

Abstract

“Ordinary Senior High School Mathematics Curriculum Standards (2017 edition)”, hereinafter re-

ferred to as curriculum standards (2017 edition), puts forward that education should pay attention to the cultivation of students' mathematics core literacy. Plane analytic geometry is an important content of high school mathematics, and is also an important test point in the college entrance examination, and the mathematics high test questions are an indispensable carrier to measure mathematics core literacy of students. Therefore, this paper analyzes the plane analytic geometry test questions on the Mathematics I volume of the new National College Entrance Examination in 2021, and makes the evaluation table of mathematics core literacy education according to Yu Ping's mathematics core literacy evaluation framework. To study the plane analytic geometry content in the examination of the core quality of mathematics in the college entrance examination paper, and get some conclusions and thinking.

Keywords

Mathematics Core Literacy, Plane Analytic Geometry

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 平面解析几何内容体现的数学核心素养

平面解析几何的内容包括：直线与方程、圆与方程、圆锥曲线与方程、*平面解析几何的形成与发展。课标(2017 版)中提出在这一内容上要重点提升学生直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理和数学抽象素养。该课标对教师也作出了教学提示，即教师应主要用代数方法来研究这一主题的内容，引导学生通过实例了解几何图形的背景，结合情境描述图形的几何特征与问题，用代数语言描述特征与问题；通过直观想象和代数运算解决问题。同时也对学生提出了学业要求，要求学生能够根据具体情境建立平面直角坐标系，使用代数语言实现几何问题向代数问题的转化，运用平面解析几何思想解决实际问题等[1]。平面解析几何内容主要体现了数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学建模和数学运算五大数学核心素养(见表 1)。

具体分析而言，直线与方程这一内容的关键是找到直线的本质特征，直线上的动点坐标应满足的条件以及通过代数的形式与角度建立联系引入斜率概念，并以此为基础得到直线的方程。因此这一内容发展了学生的直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养[2]。

圆与方程这一学习内容课标(2017 版)提出学生要掌握圆的标准方程与一般方程，并能够根据直线与圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系及解决数学问题与实际问题的[1]。以直线与圆的位置关系为例，学生通过类比圆的学习过程产生建立坐标系的坐标法思想，并逐步从部分代数化到全部代数化[3]。这一学习内容体现了学生的数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理方面的数学核心素养。

圆锥曲线这一内容上课标(2017 版)提出的要求是了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用；经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质；了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程，以及它们的简单几何性质；通过圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数学结合的思想[1]。在学习这一内容过程中，充分体现了函数思想、方程思想、化归与转化等数学思想的渗透与运用，同时提升了数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理的核心素养。在这一内容上还会涉及到一些实际问题向数学模型的转化，如在圆锥曲线的光学性质及应用方面，手电筒的反光镜、胶片电影放映机的聚光灯的反射镜等，这一过程体现了对学生数学建模核心素养的培养。

Table 1. Knowledge points of mathematics core literacy

表 1. 数学核心素养知识点

知识内容	数学核心素养
直线与方程	直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算
圆与方程	直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算
圆锥曲线	直观想象、数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模

测量和评价学科核心素养是新时期高考内容改革的核心要求和重要任务, 高考要实现从能力立意到学科核心素养立意的转变[4]。构建综合性、立体式的数学核心素养体系是有序、高效地落实数学核心素养的重要保障[5]。数学核心素养的测评研究是反馈学生核心素养培养成效的重要手段, 高考试题是检测学生数学素养的重要载体, 开展以高考试卷为样本的数学核心素养测评研究对中国新一轮高考改革有重要意义[6]。因此, 有不少相关研究对高考试卷涉及到的数学核心素养进行测评。如李华、胡典顺基于喻平提出的数学核心素养评价体系对 2019 年高考全国卷进行数学核心素养测评[6]。李爽、杨泽恒等人基于数学核心素养评价体系, 分别对云南高中学业水平试卷和全国高考数学 3 卷进行数学核心素养分析[7]。俞梦飞、章飞基于数学核心素养评价体系对 2018 年和 2019 年江苏高考卷进行数学核心素养测评[8]。

以上研究均是对整个高考试卷进行数学核心素养分析, 而本文选取新高考 I 卷中占比分值较大的内容即高中平面解析几何进行数学核心素养分析, 并以喻平教授提出的数学核心素养评价指标体系为研究工具, 分析 2021 年新高考 I 卷平面解析几何试题所涉及到的数学核心素养的考察情况, 进而为培养学生相应的数学核心素养提出建议。此研究着重选取了平面解析内容, 更有针对性地进行数学核心素养分析, 以实现数学核心素养地精准落地。

2. 研究方法

2.1. 评价框架的确定

本文依据喻平提出的基于知识学习的数学核心素养划分标准, 将学习分为 3 个水平, 依次为: 知识理解、知识迁移、知识创新。知识理解包括两层含义, 一是指学习者对知识的本质、类属以及与其它知识之间的种种联系的理解, 二是指基本技能的形成和发展。知识迁移是指学习者把理解的知识、形成的基本技能迁移到不同的情境中去, 促进新知识的学习或解决不同情境中的问题。知识创新的一层涵义是指学习者能够解决一些非常规的开放性问题; 或者生成超越教材规定内容的数学知识; 或者对问题进行推广与变式得到一个新的问题。知识创新的另一层涵义是指学生能够用数学思维去看待和处理一些现实生活中的问题[9]。

2.2. 评价指标体系的确定

基于 2017 年版课标中提出六大核心素养, 按照喻平提出的核心素养划分标准将其 6 个核心素养划分为 18 个水平层次, 创建如下的数学核心素养评价指标体系表(见表 2)。

3. 数学核心素养的考察分析

1) 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 M 在 C 上, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为

- A. 13 B. 12 C. 9 D. 6

素养分析: 该题属于知识迁移的题目, 首先可以根据题目已知条件作简图, 再用椭圆的标准方程求出相关参数 a, b, c, F_1, F_2 的值考察了学生能否运用图形建立数和形的联系, 再根据点 M 在椭圆

Table 2. The evaluation index system table of mathematics core literacy
表 2. 数学核心素养评价指标体系表

数学核心素养	水平 1: 知识理解	水平 2: 知识迁移	水平 3: 知识创新
数学抽象(mathematical abstraction)	A_1	A_2	A_3
逻辑推理(logical reasoning)	L_1	L_2	L_3
数学建模(mathematical modeling)	M_1	M_2	M_3
直观想象(intuitive imagination)	I_1	I_2	I_3
数学运算(mathematical operation)	O_1	O_2	O_3
数据分析(data analysis)	D_1	D_2	D_3

上及椭圆的定义可求出 $|MF_1| + |MF_2|$ 的值为一定值, 而我们要求出的是 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的值, 所以可根据均值不等式即求出 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最小值。这考察了学生能否在新的情境中理解运算对象, 选择合适的运算方式。标定相应的指标分数值为 $I_2 - 2.5$, $O_2 - 2.5$, $I_2 - 2.5$ 表示考察了知识迁移水平下的直观想象素养, 标定分数值为 2.5 分, $O_2 - 2.5$ 表示考察了知识迁移水平下的数学运算素养, 标定分数值为 2.5 分, 所有分数值合计为题目总分, 为 5 分。

2) 已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4,0)$, $B(0,2)$, 则

- A. 点 P 在直线 AB 的距离小于 10
- B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
- C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB| = 3\sqrt{2}$
- D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 3\sqrt{2}$

素养分析: 该题 A, B 两个选项考察的是点到直线的距离公式; 考察的是学生对知识的理解, 能通过简单的知识解决简单的数学问题的数学抽象素养; C, D 两个选项考察的是学生对知识的迁移, 需要学生做出简图, 再根据几何关系根据勾股定理计算出 $|PB|$, 考察学生是否具备能够运用图形建立起数和形的联系, 借助图形解决常规性复杂问题的直观想象素养; 同时也考察了学生是否具备能够运用运算法则和运算技巧进行运算的数学运算素养。标定相应的指标值分别为 $A_1 - 1$, $I_2 - 3$, $O_1 - 1$ 。

3) 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P 为 C 上一点, PF 与 x 轴垂直, Q 为 x 轴上一点, 且 $PQ \perp OP$ 。若 $|FQ| = 6$, 则 C 的准线方程为

素养分析: 该题考察到有关抛物线的基本知识, 能够根据已知条件作图, 得出 $|OF| \cdot |FQ| = |PF|^2$ 的关系, 可求出点 P 的横坐标, 即可求出其准线方程。该题属于知识迁移类题目, 考察到的素养有数学抽象、直观想象。考察的是学生对抛物线知识的理解, 及根据条件画图建立数与形的关系的基本技能。标记相应的指标分数值为 $A_2 - 2$, $I_2 - 2$, $O_1 - 1$ 。

4) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$ 。记 M 的轨迹为 C 。

a) 求 C 的方程。

b) 设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和。

素养分析: 第(1)问考察的是学生对双曲线定义及其标准方程基本知识的理解, 属于知识理解层面, 考察学生能辨析概念, 运用简单知识解决简单数学问题的数学抽象素养, 标记相应的指标值为 $A_1 - 4$ 。

第(2)问中属于知识迁移类题目, 学生需要建立过点 T 的直线参数方程, 并与椭圆方程联立得到一元二次方程, 进而可以表示出 $|TA| \cdot |TB|$ 及 $|TP| \cdot |TQ|$, 再根据已知条件即可求出两条直线的斜率。此题需要一定的运算量, 考察了知识迁移下的数学运算素养; 学生通过画图再根据已知条件建立数与形的关系考察了知识迁移下的直观想象素养以及数学抽象素养。标记相应的指标分数值为 O_1-2 , I_2-3 , A_2-3 。总体分析内容汇总如表 3:

Table 3. Plane analytical geometry content structure of the new mathematics college entrance examination I volume

表 3. 数学新高考 I 卷平面解析几何内容结构

题号	分值	核心素养
1	5 分	I_2 、 O_2
2	5 分	A_1 、 O_2 、 I_1
3	5 分	A_1 、 I_2 、 O_1
4	12 分	A_1 、 O_1 、 I_2 、 A_2

4. 结论与思考

通过对 2021 年新高考 1 卷中平面解析几何试题的分析, 可以看出平面解析几何试题在高考卷中比重很大, 占有 27 分的分值。平面解析几何内容的考察更多注重考察知识迁移水平下的数学核心素养, 强化对数学抽象、数学运算、直观想象的考察, 而对数学建模, 逻辑推理的考察较少。同时也更加侧重对学生基础知识, 基本技能的考察, 侧重学生对知识的理解与应用方面的考察。此外, 该高考试卷中仍侧重考察了数学结合思想的运用。因此, 在平面解析几何的学习过程中, 教师应强化学生以数学结合的思想方法来分析解题思路, 并要使得学生应用数学结合思想方法的能力得到一定提升[10]。教师要创设能够引起学生观察、思考、分析、抽象、概括的数学情境与问题, 培养他们的“四能”[11]。

同时在实际教学中, 教师还应注重培养学生的数学核心素养。如教师可以在平面解析几何这一章的教学中创设丰富多样的教学情境、结合教育技术制作几何动画以发展学生的数学抽象和直观想象的数学核心素养。教师还可以通过设置一题多解类的平面解析几何类问题并以小组合作的方式解决, 以此发展学生数学运算及逻辑推理的数学核心素养。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 赵银仓. 抓住解析几何教学关键提升数学学科核心素养[J]. 数学通讯, 2020(1): 1-3.
- [3] 胡云飞. “教什么”和“怎么教”是课堂教学落实核心素养的关键维度——以“直线与圆的位置关系”为例[J]. 数学通报, 2019(58): 33-37.
- [4] 任子朝, 陈昂, 赵轩. 数学核心素养评价研究[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(5): 116-121.
- [5] 吕世虎, 吴振英. 数学核心素养的内涵及其体系构建[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(9): 12-17.
- [6] 李华, 胡典顺. 基于数学核心素养评价框架的试卷测评研究——以 2019 年高考全国卷为例[J]. 数学教育学报, 2020, 29(2): 18-23.
- [7] 李爽, 杨泽恒, 王彭德. 核心素养视角下云南高中学业水平考试和高考数学试卷分析[J]. 数学教育学报, 2020, 29(6): 25-31+91.
- [8] 俞梦飞, 章飞. 核心素养视角下数学高考试卷评价研究——以 2018 和 2019 年江苏高考卷为例[J]. 数学教育学报, 2020, 29(2): 35-40.
- [9] 喻平. 数学核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 19-23+59.

- [10] 徐建新. 核心素养为目标导向思想方法为实施载体——高三平面解析几何复习有效性的思考与实践[J]. 数学通报, 2020, 59(7): 44-48.
- [11] 覃创, 严忠权, 李敏. 落实素养为本的高考测评研究——以 2020 年全国 I 卷数学为例[J]. 数学教育学报, 2020, 29(6): 21-24.