Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1851-1858
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211198

Hans汉斯

Laplace方程的斜导数边值问题梯度估计

吴婷婷，韩　菲

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年9月28日；录用日期：2022年10月28日；发布日期：2022年11月8日

摘　要

本文主要是研究一类Laplace方程第二边值问题的梯度估计，通过构造合适的辅助函数，利用函数在极大值点的性质，证明Laplace方程的斜导数边值问题解的梯度估计，得到了一类带*Du*的Laplace方程第二类边值问题解的全局梯度估计。

关键词

Laplace方程，极大值原理，梯度估计

The Gradient Estimation of Oblique Derivative Boundary Value Problems for Laplace Equation

Tingting Wu, Fei Han

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 28th, 2022; accepted: Oct. 28th, 2022; published: Nov. 8th, 2022

Abstract

In this paper, we study the gradient estimation of the second boundary value problem for a class of Laplace equations. By constructing appropriate auxiliary functions and using the properties of functions at maximum points, we prove the gradient estimation of the solution of the oblique derivative boundary value problem for the Laplace equation, and obtain the global gradient estimation of the solution of the second class boundary value problem for the Laplace equation with *Du*.

Keywords

Laplace Equation, Maximum Principle, Gradient Estimation

文章引用: 吴婷婷, 韩菲. Laplace 方程的斜导数边值问题梯度估计[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1851-1858.
DOI: 10.12677/pm.2022.1211198

1. 引言

在我们二阶椭圆偏微分方程理论的学习中，我们知道边值问题解的存在性是最重要的问题之一。那么边值问题主要包括 Dirichlet 问题，Neumann 问题和斜导数问题，然而我们解决边值问题解的存在性问题的关键在于需要我们给出解的先验估计，也就是解的梯度估计，最大模估计等。对于梯度估计中的 Dirichlet 问题已有广泛的研究，1969 年 Serrin [1]完成了 Dirichlet 问题的解的存在性的证明。2001 年 Gibarg-Trudinger [2]等人得到了具有 Dirichlet 问题解更一般的性质。对于 Neumann 问题的研究相对较少。麻希南，徐金菊[3]通过综合利用 Spruck [4]，Wang [5]，Liebeman [6]等人的技巧给出了有关 Neumann 边值问题的梯度估计。

Laplace 方程是最简单的椭圆型偏微分方程，它在科学技术的各个领域都有着广泛的应用，譬如静电学中它被称为静电场方程以及牛顿万有引力理论中它被称为静态引力场方程。

2014 年，徐金菊[3]利用极值原理给出了一类 Laplace 方程 Neumann 问题解的梯度估计，即

$$\Delta u = f(x,u)\text{，在 }\Omega\text{ 内}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \psi(x)\text{，在 }\partial\Omega\text{ 上}$$

2016 年，向妮[7]利用极值原理得到了 Laplace 方程斜边值问题解的梯度估计，即

$$\Delta u = f(x)\text{，在 }\Omega\text{ 内}$$

$$D_\beta u = \psi(x)\text{，在 }\partial\Omega\text{ 上}$$

受上述文章的启发，本文考虑如下形式的一类 Laplace 方程斜边值问题的梯度估计

$$\Delta u = f(x,u,\nabla u)\text{，在 }\Omega\text{ 内} \tag{1.1}$$

$$D_\beta u = \psi(x)\text{，在 }\partial\Omega\text{ 上} \tag{1.2}$$

其中 Ω 是 R^n 中的有界区域，$n \ge 2$，$\partial\Omega \in C^4$，β 是严格斜的单位向量，即 $\beta \cdot \gamma \ge \beta_0$，$\gamma$ 为单位内法向量，β_0 为正常数，令 $L_1 = \sup_{\bar{\Omega}} |u|$，$f,\psi$ 分别为定义在 $\bar{\Omega} \times R$ 和 $\bar{\Omega}$ 上给定的有界可微函数，假设存在正常数 L_2, L_3 使得

$$\left|f(x,z,p)\right| + \left|f_x(x,z,p)\right| + \left|f_z(x,z,p)\right| + \left|f_p(x,z,p)\right| \le L_2 \tag{1.3}$$

$$\left|\psi(x)\right|_{C^3(\bar{\Omega})} \le L_3\text{，} \tag{1.4}$$

本文中，我们给出 Laplace 方程斜边值问题解的梯度估计的证明。通过选取适当的辅助函数来讨论解的边界梯度估计，近边梯度估计，以及梯度内估计，从而得到解的全局梯度估计。在证明中，我们构造合适的辅助函数，充分利用函数在极大值点的性质以及斜边值条件得到梯度估计。

下面，我们给出本文的主要结论。

定理 1.1 设 $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ 为问题(1.1)~(1.2)的解，且 f,φ 满足结构性条件(1.3)，(1.4)，则

$$\sup_{\bar{\Omega}} |Du| \le C$$

其中 C 为正的常数依赖于 $n, \Omega, L_1, L_2, L_3, \beta_0$。

2. 预备知识

基本概念以及 Laplace 方程标准的梯度内估计。

设 Ω 是 R^n 中的有界区域，$n \ge 2$，$\partial\Omega \in C^4$，γ 是 $\partial\Omega$ 上的单位内法向量。令

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega)$$

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega : d(x) < \mu\}$$

则存在常数 $\mu_1 > 0$ 使得 $d(x) \in C^4(\bar{\Omega}_{\mu_1})$。在 Ω_{μ_1} 内，可取 $\gamma = Dd$，并且 γ 是一个 $C^2(\bar{\Omega}_{\mu_1})$ 向量场，且有以下性质：

$$|D\gamma| + |D^2\gamma| \le C(n, \Omega)\text{，在 } \Omega_{\mu_1} \text{ 内}$$

$$|\gamma| = 1\text{，}\sum_{1 \le i \le n} \gamma^i D_j \gamma^i = 0\text{，}\sum_{1 \le i \le n} \gamma^i D_i \gamma^j = 0\text{，在 } \Omega \text{ 内}$$

引入记号

$$c^{ij} = \delta_{ij} - \gamma^i \gamma^j\text{，在 } \Omega \text{ 内}$$

则 $(c^{ij})_{n\times n}$ 非负定。

对任一 R^n 中向量 ξ，记 ξ' 为 ξ 的切向部分，其第 i 个分量定义为

$$\sum_{1 \le j \le n} c^{ij} \xi_j$$

梯度 Du 的切向量记为 $D'u$，则

$$|D'u|^2 = \sum_{1 \le i, j \le n} c^{ij} u_i u_j$$

引理 2.1 设 $u \in C^3(\Omega)$ 为方程(1.1)的解，则对任意区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有

$$\sup_{\Omega'} |Du| \le M_1$$

其中 M_1 只依赖于 n, Ω, L_1, L_2, L_3。

引理 2.2 设 $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ 为斜边值问题(1.1)~(1.2)的解。且 f, φ 满足条件(1.3)，(1.4)则

$$\sup_{\partial\Omega} |D_{\beta\gamma} u| \le C_2 \sup |Du| + C_3$$

其中 C_2 和 C_3 依赖于 n, Ω, L_1, L_2, L_3。

3. Laplace 方程斜导数边值问题的全局梯度估计

下面我们讨论该方程在 ∇u 影响下的情况：

定理 3.1 设 $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ 为斜边值问题(1.1)~(1.2)的解。f, φ 满足条件(1.3)，(1.4)，则存在小的正常数 μ_0，使得

$$\sup_{\bar{\Omega}_{\mu_0}} |Du| \le M_1$$

其中 C 依赖于 $n, \Omega, \beta_0, \mu_0, L_1, L_2, L_3$。

下面我们利用文献[3]中的方法，构造合适的辅助函数，再利用极大值原理以及斜边导数边值条件得到梯度估计。

证：令

$$G(x)=|Dw|^2 e^{\frac{1}{1+L_1+u}e^{\alpha_0 d}} \tag{3.1}$$

其中 $w(x)=u(x)-\psi(x)d$， $\alpha_0=\dfrac{L_3+4C_1+1}{\beta_0}$ 其中 C_1 为正常数依赖于 n,Ω。

取

$$\phi(x)=\log G(x)=\log|Dw|^2+h(u)+g(d) \tag{3.2}$$

其中

$$h(u)=\frac{1}{1+L_1+u},\ g(d)=\alpha_0 d \tag{3.3}$$

设 $\phi(x)$ 在 x_0 点达到极大值。以下所有计算均在 x_0 点进行。下面分三种情况证明定理 3.1：

情形 1 若 $x_0\in\partial\Omega$，我们将证明 $|Du|(x_0)$ 有界。

这种情形的证明与文献[7]的证明方式一致。

首先对 ϕ 沿 β 方向求导数，有

$$D_\beta\phi=\frac{1}{|Dw|^2}\sum_{1\le i\le n}\left(|Dw|^2\right)_i\beta^i+h'D_\beta u+\beta_0\gamma^i\beta^i \tag{3.4}$$

因为

$$\begin{gathered}w_i=u_i-\psi_i d-\psi\gamma^i=u_i-\psi\gamma^i\\ |Dw|^2=|D'w|^2+w_\gamma^2\\ w_\gamma=u_\gamma-\psi_\gamma d-\psi=u_\gamma-\psi(x)\end{gathered} \tag{3.5}$$

所以，在 $\partial\Omega$ 上有

$$\left(|Dw|^2\right)_i=\left(|D'w|^2\right)_i+\left(w_\gamma^2\right)_i \tag{3.6}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}\left(|Dw|^2\right)_i\beta^i&=\sum_{1\le i\le n}\left(|D'w|^2\right)_i\beta^i+\sum_{1\le i\le n}\left(w_\gamma^2\right)_i\beta^i\\&=2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}w_{ki}w_l\beta^i+\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(c^{kl}\right)_i w_k w_l\beta^i+\sum_{1\le i\le n}\left(w_\gamma^2\right)_i\beta^i\\&=2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}\left(u_{ki}-\psi_k\gamma^i-\psi\left(\gamma^i\right)_k\right)\left(u_l-\psi\gamma^l\right)\beta^i\\&\quad+\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(c^{kl}\right)_i\left(u_k-\psi\gamma^k\right)\left(u_l-\psi\gamma^l\right)\beta^i\\&\quad+\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(u_\gamma^2-2u_\gamma\psi+\psi^2\right)_i\beta^i\\&=2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}w_{ki}w_l\beta^i+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_{ki}\gamma^k\beta^i\\&\quad-2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}\psi_k\gamma^i u_l\beta^i-2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^i\right)_k u_k\psi\beta^i\\&\quad+\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(c^{kl}\right)_i u_k u_l\beta^i+2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^k\right)_i u_k\psi\beta^i\\&\quad+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_k\left(\gamma^k\right)_i\beta^i-2u_\gamma\sum_{1\le i\le n}\psi_i\beta^i+2\sum_{1\le i\le n}\psi\psi_i\beta^i\end{aligned} \tag{3.7}$$

对边界条件(1.2)关于切向求导，有

$$\left(D_\beta u\right)_k=\psi_k \tag{3.8}$$

因此

$$u_{ik}\beta^i+u_i\left(\beta^i\right)_k=\psi_k \tag{3.9}$$

计算可得

$$u_{ik}\beta^i=-u_i\left(\beta^i\right)_k+\psi_k \tag{3.10}$$

所以

$$\sum_{1\le i,k\le n}c^{kl}u_{ki}\beta^i=-\sum_{1\le i,k\le n}c^{kl}u_i\left(\beta^i\right)_k+\sum_{1\le k\le n}c^{kl}\psi_k \tag{3.11}$$

由(3.3)，(3.4)，(3.7)及(3.11)式得

$$\begin{aligned}
|Dw|^2D_\beta\phi(x_0)&=\left(h'\psi+\alpha_0\gamma^i\beta^i\right)|Dw|^2+2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}u_{ki}u_l\beta^i\\
&\quad+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_{ki}\gamma^k\beta^i-2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}\psi_k\gamma^iu_l\beta^i\\
&\quad-2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^i\right)_ku_k\psi\beta^i+\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(c^{kl}\right)_iu_ku_l\beta^i\\
&\quad+2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^k\right)_iu_k\psi\beta^i+2\sum_{1\le i,k\le n}\left(u_\gamma-\psi\right)u_k\left(\gamma^k\right)_i\beta^i\\
&\quad-2u_\gamma\sum_{1\le i\le n}\psi_i\beta^i+2\sum_{1\le i\le n}\psi\psi_i\beta^i\\
&=\left(h'\psi+\alpha_0\gamma^i\beta^i\right)|Dw|^2-2\sum_{1\le i,k\le n}c^{kl}u_iu_l\left(\beta^i\right)_k\\
&\quad+2\sum_{1\le k\le n}c^{kl}\psi_ku_l+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_{ki}\gamma^k\beta^i\\
&\quad-2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}\psi_k\gamma^iu_l\beta^i-2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^k\right)_iu_k\psi\beta^i\\
&\quad+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_k\left(\gamma^k\right)_i\beta^i-2u_\gamma\sum_{1\le i\le n}\psi_i\beta^i+2\sum_{1\le i\le n}\psi\psi_i\beta^i\\
&\ge\left(h'\psi+\alpha_0\gamma^i\beta^i\right)|Dw|^2-2\sum_{1\le i,k\le n}c^{kl}u_iu_l\left(\beta^i\right)_k\\
&\quad+2\sum_{1\le k\le n}c^{kl}\psi_ku_l-\sum_{1\le i,k\le n}2\left|\left(u_\gamma-\psi\right)\right|\left(C_2\sup|Du|+C_3\right)\\
&\quad-2\sum_{1\le i,k,l\le n}c^{kl}\psi_k\gamma^iu_l\beta^i-2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^k\right)_ku_k\psi\beta^i\\
&\quad+2\sum_{1\le i,k,l\le n}\left(c^{kl}\right)_iu_ku_l\beta^i+2\sum_{1\le i,k\le n}\left(\gamma^k\right)_iu_k\psi\beta^i\\
&\quad+\sum_{1\le i,k\le n}2\left(u_\gamma-\psi\right)u_k\left(\gamma^k\right)_i\beta^i-2u_\gamma\sum_{1\le i\le n}\psi_i\beta^i+2\sum_{1\le i\le n}\psi\psi_i\beta^i\\
&\ge\left(\alpha_0\beta_0-\frac{|\psi|}{\left(1+L_1+u\right)^2}\right)|Dw|^2-C_1|Du|^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

第一个等式利用(3.7)式，第二个等式利用(3.11)式，第一个不等式是利用引理 2.2 以及$|Du|$的连续性得到的。最后一个不等式我们假设$|Du|$充分大，否则可得到估计，其中 C_1 依赖于 n,Ω,β_0,L_3。

由(3.5)式，在 x_0 点，可得

$$|Dw|^2 = \sum_{1\le k\le n} \left|u_k - \psi\gamma^k\right|^2 \tag{3.13}$$

$$|Du|^2 = \sum_{1\le k\le n} \left|w_k + \psi\gamma^k\right|^2 \tag{3.14}$$

由 Cauchy 不等式，可得

$$|Du|^2 \le |Dw|^2 + 2|\psi|^2 \tag{3.15}$$

不妨设 $|Du|^2 \ge 2|\psi|^2$，$|Dw|^2 \ge |\psi|^2$，否则 $|Du|^2 \le 4|\psi|^2$，得到估计。因此不妨设

$$2|\psi|^2_{c^0(\partial\Omega)} \le |Du|^2 \le 4|Dw|^2$$

因此

$$|Du|^2 D_\beta\phi(x_0) \ge \left(\alpha_0\beta_0 - |\psi| - 4C_1\right)|Dw|^2 \ge |Dw|^2 > 0 \tag{3.16}$$

另一方面，由 ϕ 在 x_0 点取到极大值，则

$$D_\beta\phi(x_0) \le 0 \tag{3.17}$$

与(3.16)式矛盾，因此，$|Du|(x_0)$ 有界。

情形 2 若 $x_0 \in \Omega_{\mu_0}$，我们将证明 $|Du|(x_0)$ 有界。

在 x_0 点选择标准坐标系，不妨设 $u_i(x_0) = 0, 2 \le i \le n$，$u_1(x_0) = |Du| > 0$。

由 $w(x) = u(x) - \psi(x)d$ 可知

$$\begin{aligned} |Dw|^2 &= \sum_{1\le k\le n} \left(u_k - (d\psi)_k\right)^2 \\ &\le 2|Du|^2 + 2\sum_{1\le k\le n} (d\psi)_k^2 \\ &\le 2|Du|^2 + 4\sum_{1\le k\le n} \left(\gamma^k\right)^2 |\psi|^2 + 4\sum_{1\le k\le n} d^2\psi_k^2 \\ &\le C_2|Du|^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 C_2 为正常数依赖于 n, Ω, L_3，假设(3.18)式最后一个不等式成立，否则可得到估计。

同理可得

$$|Du|^2 \le C_3|Dw|^2 \tag{3.19}$$

因此

$$\frac{1}{C_4}|Dw|^2 \le |Du|^2 \le C_4|Dw|^2 \tag{3.20}$$

其中 C_3 和 C_4 依赖于 n, Ω, L_3。

对 ϕ 求导可得

$$\phi_i = \frac{\left(|Dw|^2\right)_i}{|Dw|^2} + h'u_i + g'\gamma^i, \tag{3.21}$$

由 $\phi_i = 0$，可得

$$\left(|Dw|^2\right)_i = -|Dw|^2\left(h'u_i + g'\gamma^i\right), \tag{3.22}$$

对 ϕ 求两次导可得

$$\begin{aligned} 0 &\ge \Delta\phi \\ &= \frac{\Delta|Dw|^2}{|Dw|^2} + h'\Delta u + \left(h'' - h'^2\right)|Du|^2 - 2h'g'\sum_{1\le i\le n}\gamma^i u_i - g'^2 + g'\sum_{1\le i\le n}\left(\gamma^i\right)_i \\ &= \frac{\Delta|Dw|^2}{|Dw|^2} + \left(h'' - h'^2\right)u_1^2 - 2h'g'\gamma^1 u_1 - h'f - g'^2 + g'\sum_{1\le i\le n}\left(\gamma^i\right)_i \end{aligned} \tag{3.23}$$

接下来计算 $\Delta|Dw|^2$。由 $w = u - d\psi$，可得

$$\begin{aligned} \Delta|Dw|^2 &= \sum_{1\le i\le n}\left[\sum_{1\le k\le n} w_k^2\right]_{ii} = \sum_{1\le i\le n}\left[\sum_{1\le k\le n} 2w_k w_{ki}\right]_i \\ &= 2\sum_{1\le i\le n} w_{ki}^2 + 2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta w\right)_k \\ &= 2\sum_{1\le k,i\le n} w_{ki}^2 + 2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta u\right)_k - 2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta\left(d\psi\right)\right)_k \\ &= 2\sum_{1\le k,i\le n} w_{ki}^2 + 2\sum_{1\le k\le n} w_k D_k f - 2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta\left(d\psi\right)\right)_k \\ &= 2\sum_{1\le k,i\le n} w_{ki}^2 + 2\sum_{1\le k\le n} w_k f_{x_k} + 2f_u\sum_{1\le k\le n} w_k u_k \\ &\quad + f_{u_k}\sum_{1\le k,i\le n} w_k u_{ki} - 2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta\left(d\psi\right)\right)_k \end{aligned} \tag{3.24}$$

下面我们对(3.24)的每一项进行计算：

由 Cauchy 不等式，可得

$$2\sum_{1\le k,i\le n} w_{ki}^2 = 2\sum_{1\le k,i\le n}\left[u_{ki} - \left(d\psi\right)_{ki}\right]^2 \ge \sum_{1\le k,i\le n} u_{ki}^2 - 2\sum_{1\le k,i\le n}\left(d\psi\right)_{ki}^2$$

由(1.3)和(3.20)式，可得

$$2\sum_{1\le k,i\le n} w_k f_{x_k} \ge -2L_2\sum_{1\le k,i\le n} w_k \ge -2L_2|Dw|^2$$

由 Cauchy 不等式，(1.3)式以及(3.20)，可得

$$2f_u\sum_{1\le k\le n} w_k u_k \ge -f_u\sum_{1\le k\le n}\left(w_k^2 + u_k^2\right) \ge -f_u\left(|Dw|^2 + |Du|^2\right) \ge -2L_2C_4|Dw|^2$$

$$2f_{u_k}\sum_{1\le k,i\le n} w_k u_{ki} \ge -\sum_{1\le k\le\le n} w_k^2 f_{u_k}^2 - \sum_{1\le k,i\le n} u_{ki}^2 \ge -L_2|Dw|^2 - \sum_{1\le k,i\le n} u_{ki}^2$$

由(1.4)式，可得

$$-2\sum_{1\le k\le n} w_k\left(\Delta\left(d\psi\right)\right)_k \ge -2L_2\sum_{1\le k\le n} w_k \ge -2L_3|Dw|^2$$

因此我们有

$$\Delta|Dw|^2 \ge \sum_{1\le k,i\le n} u_{ki}^2 - 2\sum_{1\le k,i\le n}\left(d\psi\right)_{ki}^2 - \left(3L_2 + 2L_2C_4 + 2L_3\right)|Dw|^2 - \sum_{1\le k,i\le n} u_{ki}^2 \ge -C_5|Dw|^2 \tag{3.25}$$

其中 C_5 为正常数依赖于 n,Ω,L_2,L_3。

将(3.25)代入(3.23)，结合(3.3)，我们有

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \Delta\phi \\
&\geq \left(h'' - h'^2\right)u_1^2 - 2h'g'\gamma^1 u_1 - h'f - g'^2 + g'\sum_{1\leq i\leq n}\left(\gamma^i\right)_i - C_5 \\
&\geq \left(h'' - h'^2\right)u_1^2 - C_6 u_1 \\
&\geq \frac{1}{1+2L_1}u_1^2 - C_6 u_1
\end{aligned}
$$

其中 C_6 为正常数依赖于 n,Ω,L_2,L_3。

取 u_1 充分大，否则可得到估计。

因此

$$|Du|^2 \leq C_7$$

其中 C_7 为正常数依赖于 n,Ω,L_1,L_2,L_3。

情形 3 若 $x_0 \in \Omega\setminus\bar{\Omega}_{\mu_0}$，则问题归结内部梯度估计。

有引理 2.1，我们在其证明中令

$$dist\left(\Omega',\Omega\right) = \frac{\mu_0}{2}$$

得到这样区域的内估计。

综合 3 种情况，可以得到

$$\sup_{\bar{\Omega}_{\mu_0}}|Du| \leq M_1$$

其中 C 为正常数依赖于 $n,\Omega,L_1,L_2,L_3,\beta_0$。

4. 总结

研究结果主要推广了向妮的 Laplace 方程中 f 只依赖于 x 和 u 时的斜边值问题的梯度估计，即 Laplace 方程中关于 f 依赖于 x，u，Du 时斜边值问题的梯度估计。

参考文献

[1] Serrn, J. (1969) The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **264**, 413-496. https://doi.org/10.1098/rsta.1969.0033

[2] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Gilbarg, D., *et al*. (2001) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61798-0

[3] Xu, J.J. (2014) Gradient Estimates for the Neumann Problem of Mean Curvature Equation. Ph.D. Thesis, University of Science and Technology of China, Hefei.

[4] Spruck, J. (1975) On the Existence of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 189-200. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280202

[5] Wang, X.J. (1998) Interior Gradient Estimates for Mean Curvature Equations. *Mathematische Zeitschrift*, **228**, 73-82. https://doi.org/10.1007/PL00004604

[6] Liberman, G.M. (1984) The Nonlinear Oblique Derivative Problems for Quasilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **8**, 49-65. https://doi.org/10.1016/0362-546X(84)90027-0

[7] 向妮，石菊花，徐金菊，吴燕. Laplace 方程斜边值问题的梯度估计[J]. 数学物理学报, 2016, 36(3): 481-492.