Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1882-1890
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211202

Hans汉斯

一类拟线性方程Neumann问题的梯度估计

马春梅[1]，阿迪拉·阿布都热依木[2]，司雨欣[1]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]和田师范专科学校数学与信息学院，新疆 和田

收稿日期：2022年10月9日；录用日期：2022年11月8日；发布日期：2022年11月16日

摘 要

研究了一类拟线性方程Neumann问题的梯度估计，通过选取适当的辅助函数，利用函数在极大值点的性质，证明了解的边界梯度估计有界。得到了方程中关于f依赖于x，u时Neumann问题的解的边界梯度估计。

关键词

拟线性方程，Neumann问题，极大值原理，梯度估计

Gradient Estimation of the Neumann Problem for a Class of Quasilinear Equations

Chunmei Ma[1], Adila·Abudureyimu[2], Yuxin Si[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]School of Mathematics and Information, Hetian Normal College, Hotan Xinjiang

Received: Oct. 9th, 2022; accepted: Nov. 8th, 2022; published: Nov. 16th, 2022

Abstract

The gradient estimation of a class of quasilinear equations Neumann problem is studied. By selecting appropriate auxiliary functions and using the properties of functions at maximum points, it is proved that boundary gradient estimation is bounded. The boundary gradient estimation of Neumann problem solution is obtained when f depends on x, u in the equation.

Keywords

Quasilinear Equations, Neumann Problem, Maximum Principle, Gradient Estimation

文章引用: 马春梅, 阿迪拉·阿布都热依木, 司雨欣. 一类拟线性方程 Neumann 问题的梯度估计[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1882-1890. DOI: 10.12677/pm.2022.1211202

1. 引言

在二阶椭圆型偏微分方程的研究过程中，边值问题的解的存在性是最重要的问题之一。而边值问题主要分为 Dirichlet 问题，Neumann 问题与斜导数问题，解决边值问题解的存在性问题的关键在于先验估计，即解的梯度估计，最大模估计等。即使最简单的偏微分方程，例如波动方程、Laplace 方程，求解都是有难度的，对其不同的边值问题有不同的求解方法。

2018 年，Ma [1]研究了如下平均曲率方程的 Neumann 问题：

$$\begin{cases} div\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+Du^2}}\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=\psi(x), & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

通过引入一个特殊标架，构造了一个新的辅助函数，利用极值原理得到了平均曲率方程 Neumann 问题的梯度估计，从而得到平均曲率方程 Neumann 问题解的存在性，证明综合利用 Spruck [2]，Wang [3]，Liebeman [4]等人的技巧。

对于上述 Ma [1]研究的平均曲率方程的 Neumann 问题中 f 依赖于 x，u 时，徐金菊[5]得到了他的梯度估计。

2021 年，刘晋鹏[6]研究如下拟线性方程 Neumann 边值问题的梯度估计，即：

$$\begin{cases} a_{ij}(\nabla u)u_{ij}=f(x), & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}=\psi(x,u), & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

受刘晋鹏文章的启发，本文考虑如下形式的拟线性方程 Neumann 边值问题的梯度估计：

$$\begin{cases} a_{ij}(\nabla u)u_{ij}=f(x,u), & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}=\psi(x,u), & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$n\ge 2$，$\partial\Omega\in C^3$，γ 是 $\partial\Omega$ 的单位内法向。f 为定义在 $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ 上给定的有界可微函数。鉴于椭圆型偏微分方程解的梯度估计证明[7] [8]，本文目的是利用刘晋鹏所使用的 Bernstein 技巧，从而推出方程中关于 f 依赖于 x，u，时 Neumann 问题的解的边界梯度估。本文第二节主要给出证明所需的一些基本概念，第三节综合利用 Spruck [2]，Wang [3]，Liebeman [4]等人的技巧，用极值原理证明了一类拟线性方程 Neumann 问题的边界梯度估计，从而得到了一个存在性定理。

2. 预备知识

为了证明简便，本节将介绍一些基本概念及性质。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域 $n\ge 2$，$\partial\Omega\in C^3$，$a_{ij}\in C^0$ 且 $a_{ij}\xi_i\xi_j>\lambda|\xi|^2$，$\gamma$ 是 $\partial\Omega$ 的单位内法向。令

$$d(x)=\text{dist}(x,\partial\Omega),$$

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega : d(x) < \mu\}.$$

则存在常数 $\mu_1 > 0$ 使得 $d(x) \in C^3(\bar{\Omega}_{\mu 1})$。由 Simon-Spruck [9]可知，在 $\Omega_{\mu 1}$ 内可取 $\gamma = Dd$，并且 γ 是 $C^2(\bar{\Omega}_{\mu 1})$ 向量场。且具有以下性质：

$$|D\gamma| + |D^2\gamma| \le C(n,\Omega) \tag{1}$$

$$|\gamma| = 1, \sum_{1\le i\le n} \gamma^i D_j \gamma^i = 0, \sum_{1\le i\le n} \gamma^i D_i \gamma^j = 0.$$

引入记号：$c^{ij} = \delta_{ij} - \gamma^i\gamma^j$。对任一 $\mathbb{R}^n$ 中向量 ζ，记 ζ' 为 ζ 的切向部分，其第 i 个分量定义为

$$\sum_{1\le j\le n} c^{ij}\zeta_j.$$

梯度 Du 的切向量记为 $D'u$，则

$$|D'u|^2 = \sum_{1\le i,j\le n} c^{ij} u_i u_j \tag{2}$$

3. 主要结果

考虑如下椭圆方程的 Neumann 问题：

$$\begin{cases} a_{ij}(\nabla u)u_{ij} = f(x,u), & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = \psi(x,u), & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$n \ge 2$，$\partial\Omega \in C^3$，$a_{ij} \in C^0$ 且 $a_{ij}\xi_i\xi_j > \lambda|\xi|^2$，$\gamma$ 是 $\partial\Omega$ 的单位内法向。f 和 ψ 为定义在 $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ 上给定的有界可微函数，设存在正常数 M_0, L_1, L_2 使得

$$|u| \le M_0 \quad \text{in } \bar{\Omega} \tag{4}$$

$$|f(x,z)| + |f_x(x,z)| \le L_1 \quad \forall (x,z,) \in \bar{\Omega}\times[-M_0, M_0] \tag{5}$$

$$|\psi(x,u)|_{C^3(\bar{\Omega})} \le L_2 \tag{6}$$

我们的主要结果为如下定理：

定理 1 设 $u \in C^2(\bar{\Omega})\cap C^3(\Omega)$ 为方程(3)的解且满足式(4)。若 f,ψ 满足式(5), (6)则存在小的正常数 μ_0 使得

$$\sup_{\bar{\Omega}_{\mu 0}} |Du| \le \max\{M_1, M_2\},$$

其中 M_1 为正常数只依赖于 n,μ_0,M_0,L_1，来自于梯度内估计；M_2 为正常数只依赖于 $n,\Omega,\mu_0,M_0,L_1,L_2$。

因为边界梯度估计依赖于梯度内估计，所以首先叙述梯度内估计。

引理 1 [10]设 $u \in C^3(\Omega)$ 为方程

$$a_{ij}(\nabla u)u_{ij} = f(x,u),\ x\in\Omega.。$$

的解，对于 $f \in C^0(\bar{\Omega})$，有

$$|\nabla u|_{L^\infty(\Omega)} \le M_1\left\{|\nabla u|_{L^\infty(\partial\Omega)} + |u|_{L^\infty(\Omega)} + |f|_{C^0(\bar{\Omega})}\right\}.$$

其中 M_1 只依赖于 Ω, L。

证明：令 $\omega = u - \psi(x,u)d$，并选取如下辅助函数

$$\phi(x)=\log|Dw|^2 e^{1+M_0+u} e^{\alpha_0 d}, x\in\bar{\Omega}_{\mu_0}.$$

其中 $\alpha_0=|\psi|_{C^0(\bar{\Omega}\times[-M_0,M_0])}+C_0+1$，$C_0$ 为正常数，只依赖于 n,Ω；为了简化计算，我们令

$$\varphi(x)=\log\Phi(x)=\log\log|D\omega|^2+h(u)+g(d).$$

其中

$$h(u)=1+M_0+u, g(d)=\alpha_0 d \tag{7}$$

设 $\varphi(x)$ 在 $x_0\in\bar{\Omega}_{\mu 0}$ 点达到极大值，其中 $0<\mu_0<\mu_1$ 为充分小常数，将在后面确定。下面分三种情形证明定理 1。

情形 1： $x_0\in\partial\Omega$，由 Hopf 引理得 $|Du|(x_0)$ 有界，对 φ 求法向导数，再利用边界点性质即可得到，过程与参考文献 6 的情形 1 完全相同，可参照文献。

情形 2： 若 $x_0\in\partial\Omega_{\mu 0}\cap\Omega$ 则归结为内部梯度估计。由引理 1，可得

$$\sup_{\partial\Omega_{\mu 0}\cap\Omega}|Du|\le\widetilde{M_1},$$

其中 $\widetilde{M_1}$ 只依赖于 n,M_0,μ_0,L_1。

情形 3： 若 $x_0\in\Omega_{\mu 0}$，证明 $|Du|(x_0)$ 有界。

在 x_0 点选择标准坐标系，设 $u_i(x_0)=0$，$2\le i\le n$，$u_1(x_0)=|Du|>0$。进一步设矩阵 $\{u_{ij}(x_0)\}_{i,j=2}^n$ 是对角的。取 $\mu_2\le\dfrac{1}{100L_2}$ 则

$$|\psi_u|\mu_2\le\frac{1}{10}，从而 \frac{99}{100}\le 1-\psi_u\mu_2\le\frac{101}{100} \tag{8}$$

选取

$$d<\mu_0=\frac{1}{2}\min\{\mu_1,\mu_2,1\}.$$

为简化计算，令

$$\omega=u-G, G=\psi(x,u)d.$$

则有

$$\omega_k=(1-G_u)u_k-G_{x_k}.$$

因为在 x_0 点，

$$|D\omega|^2=\omega_1^2+\sum_{2\le i\le n}\omega_i^2,$$

$$\omega_1=(1-G_u)u_1-G_{x_1}=(1-G_u)u_1-\psi_{x_1}d-\psi\gamma^1,$$

$$\omega_i=-G_{x_i}=-\psi_{x_i}d-\psi\gamma^i, i=2,\cdots,n.$$

由以上关系式，在 x_0 点，可设

$$u_1=|Du|(x_0)\ge\sqrt{3000\left(1+|\psi|^2_{C^0(\bar{\Omega}\times[-M_0,M_0])}\right)},$$

则有

$$\frac{9}{10}u_1^2\le|D\omega|^2\le\frac{11}{10}u_1^2,\frac{9}{10}u_1^2\le\omega_1^2\le\frac{11}{10}u_1^2.$$

由 μ_0 的选取和式(7)，我们得到

$$\frac{99}{100}\le 1-G_u\le\frac{101}{100}.$$

此种证明较长，下面分两步完成定理的证明，以下计算均在 x_0 点进行。

第一步：先推导 $\Delta\varphi$，对 φ 微分两次，并由 $\varphi_i(x_0)=0$，可得

$$\varphi_{ij}=\frac{\left(|D\omega|^2\right)_{ij}}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}+h'u_{ij}+\left[h''-\left(1+\log|D\omega|^2\right)h'^2\right]u_iu_j$$
$$+\left[g''-\left(1+\log|D\omega|^2\right)g'^2\right]\gamma^i\gamma^j-\left(1+\log|D\omega|^2\right)h'g'\left(\gamma^iu_j+\gamma^ju_i\right)+g'\left(\gamma^i\right)_j.$$

从而可得

$$0\ge\sum_{1\le i,j\le n}a^{ij}\varphi_{ij}=I_1+I_2 \tag{9}$$

其中

$$I_1=\frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\sum_{1\le i,j\le n}a^{ij}\left(|D\omega|^2\right)_{ij},$$
$$I_2=\sum_{1\le i,j\le n}a^{ij}\left\{h'u_{ij}+\left[h''-\left(1+\log|D\omega|^2\right)h'^2\right]u_iu_j+\left[g''-\left(1+\log|D\omega|^2\right)g'^2\right]\gamma^i\gamma^j\right.$$
$$\left.-\left(1+\log|D\omega|^2\right)h'g'\left(\gamma^iu_j+\gamma^ju_i\right)+g'\left(\gamma^i\right)_j\right\}.$$

由 $a_{ij}\in C^0$，$a_{ij}\xi_i\xi_j>\lambda|\xi|^2$，以及坐标系的选取和方程(3)式(7)可得

$$I_2=h'f-a_{ij}u_iu_jh'^2\log|D\omega|^2+a_{ij}u_iu_j\left[h''-h'^2\right]+a_{ij}\left[g''-\left(1+\log|D\omega|^2\right)g'^2\right]\gamma^i\gamma^j$$
$$-2a_{i1}\left(1+\log|D\omega|^2\right)h'g'\left(\gamma^iu_1\right)+a_{ij}g'\left(\gamma^i\right)_j$$
$$\ge f-\lambda\log|D\omega|^2u_1^2-C_1u_1^2-C.$$

其中 C_1 为正常数只依赖于 $n,\Omega,\mu_0,M_0,\lambda,L_2$，下面计算 I_1。

对 $|D\omega|^2$ 微分两次，我们有

$$\left(|D\omega|^2\right)_{ij}=2\sum_{1\le k\le n}\omega_k\omega_{ijk}+2\sum_{1\le k\le n}\omega_{ki}\omega_{kj} \tag{10}$$

将式(10)代入 I_1 中，可重写为

$$I_1=\frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\left[2\sum_{1\le i,j,k\le n}a_{ij}\omega_k\omega_{ijk}+2\sum_{1\le i,j,k\le n}a_{ij}\omega_{ki}\omega_{kj}\right].$$

下面我们处理 I_1，因为我们已经令

$$\omega=u-G,G=\psi(x,u)d.$$

则有

$$\omega_{ki}=\left(1-G_u\right)u_{ki}-G_{uu}u_ku_i-G_{ux_i}u_k-G_{ux_k}u_i-G_{x_kx_i},$$
$$\omega_{kij}=\left(1-G_u\right)u_{kij}-G_{uu}\left(u_{ki}u_j+u_{kj}u_i+u_{ij}u_k\right)-G_{ux_i}u_{kj}-G_{ux_j}u_{ki}-G_{ux_k}u_{ij}-G_{uuu}u_ku_iu_j$$
$$-G_{uux_i}u_ku_j-G_{uux_j}u_ku_i-G_{uux_k}u_iu_j-G_{ux_kx_j}u_i-G_{ux_ix_j}u_k-G_{ux_ix_k}u_j-G_{x_ix_kx_j}.$$

因此

$$\sum_{1\le i,j,k\le n} a_{ij}\omega_k\omega_{ijk} = \sum_{1\le i,j,k\le n}(1-G_u)\omega_k a_{ij}u_{kij} - G_{uu}\omega_1 u_1 f - 2G_{uu}a_{i1}u_1\sum_{1\le k\le n}\omega_k u_{ki} - f\sum_{1\le k\le n}\omega_k G_{ux_k}$$
$$-2\sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_k a_{ij}G_{ux_i}u_{kj} - a_{11}G_{uuu}\sum_{1\le k\le n}\omega_k u_1^2 - 2\omega_1 u_1^2\sum_{1\le i\le n}a_{i1}G_{uux_i} - a_{11}G_{uux_k}\sum_{1\le k\le n}\omega_k u_1^2$$
$$-\omega_1 u_1\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}G_{ux_ix_j} - 2\sum_{1\le i,k\le n}\omega_k a_{i1}G_{ux_ix_k}u_1 - \sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_k a_{ij}G_{x_ix_kx_j}.$$

对方程 $a_{ij}(\nabla u)u_{ij} = f(x,u)$，求导可得

$$\sum_{1\le i,j,k\le n} a_{ij}u_{ijk} = -(a_{ij})_{p_l}u_{lk}u_{ij} + D_k f.$$

且 $D_k f = f_{x_k} + f_u u_k$，我们设 $(a_{ij})_{p_l} < C$，因此

$$I_1 = \frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\left[2\sum_{1\le i,j,k\le n}a_{ij}\omega_k\omega_{ijk} + 2\sum_{1\le i,j,k\le n}a_{ij}\omega_{ki}\omega_{kj}\right]$$
$$= \frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\left\{\sum_{1\le i,j,k\le n}2a_{ij}\left[(1-G_u)^2u_{ki}u_{kj}\right]\right.$$
$$-2a_{ij}(1-G_u)u_{kj}\left(G_{uu}u_ku_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_kx_i}\right) - 2a_{ij}(1-G_u)u_{ki}$$
$$\left(G_{uu}u_ku_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_kx_j}\right) + 2a_{ij}\left(G_{uu}u_ku_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_kx_i}\right)$$
$$\left(G_{uu}u_ku_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_kx_j}\right) + 2\left[\sum_{1\le i,j,k\le n}(1-G_u)\omega_k\left(-(a_{ij})_{p_l}u_{lk}u_{ij} + f_{x_k} + f_u u_k\right)\right.$$
$$-G_{uu}\omega_1u_1f - 2G_{uu}a_{i1}u_1\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_{ki} - f\sum_{1\le k\le n}\omega_kG_{ux_k} - 2\sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_ka_{ij}G_{ux_i}u_{kj}$$
$$-a_{11}G_{uuu}\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_1^2 - 2\omega_1u_1^2\sum_{1\le i\le n}a_{i1}G_{uux_i} - a_{11}G_{uux_k}\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_1^2 - \omega_1u_1\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}G_{ux_ix_j}$$
$$\left.-2\sum_{1\le i,k\le n}\omega_ka_{i1}G_{ux_ix_k}u_1 - \sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_ka_{ij}G_{x_ix_kx_j}\right].$$

将 I_1 和 I_2 代入式(9)，我们可以得到

$$0 \ge \sum_{1\le i,j\ge n}a_{ij}\varphi_{ij} = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

其中 Q_1 包含 u_{ij} 所有二次项，Q_2 包含 u_{ij} 所有的一次项，其他剩余项记为 Q_3

$$Q_1 = \frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\left[\sum_{1\le i,j,k\le n}2a_{ij}(1-G_u)^2u_{ki}u_{kj} - 2(1-G_u)\omega_k(a_{ij})_{p_l}u_{lk}u_{ij}\right].$$

$$Q_2 = \frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}\left[-2a_{ij}(1-G_u)u_{kj}\left(G_{uu}u_ku_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_kx_i}\right) - 2\sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_ka_{ij}G_{ux_i}u_{kj}\right.$$
$$\left.-2a_{ij}(1-G_u)u_{ki}\left(G_{uu}u_ku_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_kx_j}\right) - 2G_{uu}a_{i1}u_1\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_{ki}\right].$$

$$Q_3 = I_2 + \frac{1}{|D\omega|^2\log|D\omega|^2}2\left[\sum_{1\le i,j,k\le n}(1-G_u)\omega_k\left(f_{x_k} + f_uu_k\right) + 2a_{ij}\left(G_{uu}u_ku_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_kx_i}\right)\right.$$
$$\left(G_{uu}u_ku_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_kx_j}\right) - G_{uu}\omega_1u_1f - f\sum_{1\le k\le n}\omega_kG_{ux_k} - a_{11}G_{uuu}\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_1^2 - 2\omega_1u_1^2\sum_{1\le i\le n}a_{i1}G_{uux_i}$$
$$\left.-a_{11}G_{uux_k}\sum_{1\le k\le n}\omega_ku_1^2 - \omega_1u_1\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}G_{ux_ix_j} - 2\sum_{1\le i,k\le n}\omega_ka_{i1}G_{ux_ix_k}u_1 - \sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_ka_{ij}G_{x_ix_kx_j}\right].$$

对 I_2 的估计有

$$Q_3 \ge f - \lambda \log|D\omega|^2 u_1^2 - C_2 u_1^2 - \frac{2G_{uu}\omega_1 u_1 f}{|D\omega|^2 \log|D\omega|^2}.$$

其中 C_2 为正常数只依赖于 $n,\Omega,\mu_0,M_0,\lambda,L_2$。

第二步：记 $A=|D\omega|^2\log|D\omega|^2$，利用一阶导数条件化简 Q_1、Q_2 中的每一项，由条件 $\varphi_i(x_0)=0$，和坐标系的选取得

$$u_{1i} = -\frac{1}{\omega_1}\omega_i u_{ii} - \frac{g'\gamma^i}{2(1-G_u)}\frac{A}{\omega_1} + \frac{G_{ux_i}}{1-G_u}u_1 + \frac{G_{x_k x_i}}{1-G_u}\sum_{1\le k\le n}\omega_k,\ i=2,\cdots,n,$$

$$u_{11} = \sum_{2\le i\le n}\frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}u_{ii} - \frac{h'}{2(1-G_u)}\frac{Au_1}{\omega_1} + \frac{D}{1-G_u}.$$

其中

$$\begin{aligned} D = {} & G_{uu}u_1^2 - \frac{g'\gamma^1}{2}\frac{A}{\omega_1} + G_{ux_1}u_1 + \frac{u_1}{\omega_1}\sum_{1\le k\le n}\omega_k G_{x_k x_i} + \frac{g'}{2}\sum_{2\le i\le n}\omega_i\gamma^i\frac{A}{\omega_1^2} \\ & - \frac{u_1}{\omega_1}\sum_{2\le i\le n}\omega_i G_{x_i u} + \frac{1}{\omega_1}\sum_{1\le k\le n}\omega_k G_{x_k x_1} - \frac{1}{\omega_1^2}\sum_{1\le i,k\le n}\omega_k\omega_i G_{x_k x_i}. \end{aligned} \tag{11}$$

从而

$$|D| \le C_3 u_1^2.$$

其中 C_3 为正常数只依赖于 $n,\Omega,\mu_0,M_0,\lambda,L_1,L_2$。

$$\begin{aligned} u_{ki} = {} & -\frac{h'}{2(1-G_u)}\frac{Au_i}{\omega_k} + \frac{G_{uu}}{1-G_u}u_i u_k - \frac{g'\gamma^i}{2(1-G_u)}\frac{A}{\omega_k} + \frac{G_{ux_i}}{1-G_u}u_k \\ & + \frac{G_{ux_k}}{1-G_u}u_i + \frac{G_{x_i x_k}}{1-G_u}, \quad i=1,\cdots,n. \end{aligned}$$

处理 Q_1、Q_2 每一项

$$\begin{aligned} & Q_1: \sum_{1\le i,j,k\le n} 2a_{ij}(1-G_u)^2 u_{ki}u_{kj} \\ & = \sum_{1\le i,j,k\le n}\frac{h'^2}{2}\frac{A^2}{\omega_k}a_{ij}u_i u_j + \sum_{1\le i,j\le n}a_{1j}\frac{h'g'\gamma^j}{4}\frac{A^2 u_1}{\omega_k^2} + \sum_{1\le i,k\le n}a_{i1}\frac{h'g'\gamma^j}{4}\frac{A^2u_1}{\omega_k^2} \\ & \quad + \sum_{1\le i,j,k\le n}2a_{ij}\Bigg[\frac{h'\gamma^i\gamma^j}{4}\frac{A^2}{\omega_k} - \frac{h'}{2}\frac{Au_i}{\omega_k}\left(G_{uu}u_k u_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_k x_j}\right) \\ & \quad - \frac{h'}{2}\frac{Au_j}{\omega_k}\left(G_{uu}u_k u_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_k x_i}\right) - \frac{g'\gamma^i}{2}\frac{A}{\omega_k}\Big(G_{uu}u_k u_j - G_{ux_j}u_k \\ & \quad - G_{ux_k}u_j - G_{x_k x_j}\Big) - \frac{g'\gamma^j}{2}\frac{A}{\omega_k}\left(G_{uu}u_k u_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_k x_i}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2(1-G_u)\omega_k\left(a_{ij}\right)_{p_l}u_{lk}u_{ij} \\ = & \Big[\left(a_{ij}\right)_{pl}h'Au_l - \left(a_{ij}\right)_{pl}G_{uu}\omega_1 u_1 u_l + \left(a_{ij}\right)_{pl}g'\gamma^l A - 2\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_1 u_1 G_{ux_l} \\ & - \sum_{1\le k\le n}\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_k u_l G_{ux_k} - \sum_{1\le k\le n}\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_k G_{x_l x_k}\Big]\sum_{2\le i\le n}\frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}u_{ii} + \frac{\left(a_{ij}\right)_{pl}h'^2}{2(1-G_u)}\frac{A^2u_1}{\omega_1} + AO\left(u_1^2\right). \end{aligned}$$

$$Q_2: -2a_{ij}\left(1-G_u\right)u_{kj}\left(G_{uu}u_k u_i - G_{ux_i}u_k - G_{ux_k}u_i - G_{x_k x_i}\right) = AO\left(u_1^2\right),$$
$$-2a_{ij}\left(1-G_u\right)u_{ki}\left(G_{uu}u_k u_j - G_{ux_j}u_k - G_{ux_k}u_j - G_{x_k x_j}\right) = AO\left(u_1^2\right),$$
$$-2\sum_{1\le i,j,k\le n}\omega_k a_{ij}G_{ux_i}u_{kj} = AO\left(u^1\right),$$
$$-2G_{uu}a_{i1}u_1\sum_{1\le k\le n}\omega_k u_{ki} = AO\left(u_1^2\right).$$

所以得到

$$0 \ge \sum_{1\le i,j\ge n} a_{ij}\varphi_{ij} = Y_1 + Y_2.$$

其中 Y_1 只包含含有 u_{ii} 的项，其他剩余项记为 Y_2

$$Y_1 = \left[\left(a_{ij}\right)_{pl}h'Au_l - \left(a_{ij}\right)_{pl}G_{uu}\omega_1 u_1 u_l + \left(a_{ij}\right)_{pl}g'\gamma^l A - 2\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_1 u_1 G_{ux_l}\right.$$
$$\left. - \sum_{1\le k\le n}\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_k u_l G_{ux_k} - \sum_{1\le k\le n}\left(a_{ij}\right)_{pl}\omega_k G_{x_l x_k}\right]\sum_{2\le i\le n}\frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}u_{ii}$$
$$= \sum_{2\le i\le n}K^i u_{ii}.$$

有

$$\left|K^i\right| \le C_4 A.$$

根据方程(3)和式(11)得

$$Y_1 \ge C_5 u_1^2.$$

由 Q_3 的估计以及 $a_{ij}\xi_i\xi_j > \lambda|\xi|^2$ 得到 Y_2 的估计

$$Y_2 \ge -\lambda\log|D\omega|^2 u_1^2 + \sum_{1\le i,j,k\le n}\frac{h'^2}{2}\frac{A}{\omega_k}a_{ij}u_i u_j + \sum_{1\le i,j\le n}a_{1j}\frac{h'g'\gamma^j}{4}\frac{Au_1}{\omega_k^2}$$
$$+ \sum_{1\le i,k\le n}a_{i1}\frac{h'g'\gamma^j}{4}\frac{Au_1}{\omega_k^2} - C_6 u_1^2$$
$$\ge \frac{\lambda}{4}\log|D\omega|^2 u_1^2 - C_7 u_1^2.$$

由 Y_1 的估计和 Y_2 的估计

$$0 \ge \sum_{1\le i,j\ge n}a_{ij}\varphi_{ij} \ge \frac{\lambda}{4}\log|D\omega|^2 u_1^2 - C_8 u_1^2.$$

从而存在正常数 C_9 使得

$$|Du|\left(x_0\right) \le C_9. \tag{12}$$

由情形 1，情形 2，和式(12)，得到

$$|Du|\left(x_0\right) \le C_9,\quad x_0 \in \Omega_{\mu 0}\cap\partial\Omega.$$

其中以上正常数 $C_2,\cdots,C_9$。只依赖于 $n,\Omega,\mu_0,M_0,L_1,L_2,\lambda$。因为 $\varphi(x)\le\varphi\left(x_0\right)$，$\forall x_0 \in \Omega_{\mu 0}$ 则存在正常数 M_2 使得

$$|Du|(x) \le M_2,\ x \in \Omega_{\mu 0}\cup\partial\Omega.$$

因此，最后得到估计

$$\sup_{\bar{\Omega}_{\mu_0}} |Du| \le \max\{M_1, M_2\},$$

其中 M_1 为正常数只依赖于 n, μ_0, M_0, L_1，它来自于梯度内估计；M_2 为正常数只依赖于 $n, \Omega, \mu_0, M_0, L_1, L_2$。由此，定理得证。

4. 总结

研究结果主要推广了刘晋鹏的一类拟线性方程中 f 只依赖于 x 时的 Neumann 问题梯度估计，即方程中关于 f 依赖于 x，u 时，利用极值原理得到了这类方程解的梯度估计，给出了其解的存在性。

参考文献

[1] 麻希南, 王培合. 具有给定 Neumann 边值或预定夹角边值的平均曲率方程的边界梯度估计[J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(1): 213-226.

[2] Spruck, J. (1975) On the Existence of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 189-200. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280202

[3] Wang, X.J. (1998) Interior Gradient Estimates for Mean Curvature Equations. *Mathematische Zeitschrift*, **228**, 73-82. https://doi.org/10.1007/PL00004604

[4] Lieberman, G.M. (1988) Gradient Estimates for Capillary-Type Problems via the Maximum Principle. *Communications in Partial Differential Equations*, **13**, 33-59. https://doi.org/10.1080/03605308808820537

[5] 徐金菊. 平均曲率方程 Neumann 问题的梯度估计[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2014.

[6] 刘晋鹏. 一类椭圆方程 Neumann 问题解的梯度估计[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆师范大学, 2021.

[7] 张雅楠. 一类椭圆方程弱解的梯度估计[D]: [硕士学位论文]. 唐山: 华北理工大学, 2020.

[8] 马燕, 韩菲, 罗小蓉. 一类半线性椭圆方程的梯度估计[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(1): 6-9.

[9] Simon, L. and Spruck, J. (1976) Existence and Regularity of a Capillary Surface with Prescribed Contact Angle. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **61**, 19-34. https://doi.org/10.1007/BF00251860

[10] Han, Q. and Lin, F. (2011) Elliptic Partial Differential Equations. American Mathematical, 36-39.