Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1910-1917
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211205

一类平均曲率方程的内部梯度估计

司雨欣，韩　菲*，孙文静

新疆师范大学，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年10月12日；录用日期：2022年11月11日；发布日期：2022年11月21日

摘　要

本文研究了一类平均曲率方程，通过选取适当的辅助函数G，然后运用极值原理和对极值点性质的讨论，得到了此类平均曲率方程的内部梯度估计，完善了此类方程的内部梯度估计。

关键词

平均曲率方程，内部梯度估计，极值原理

Internal Gradient Estimation for a Class of Mean Curvature Equations

Yuxin Si, Fei Han*, Wenjing Sun

Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 12th, 2022; accepted: Nov. 11th, 2022; published: Nov. 21st, 2022

Abstract

In this paper, we study a class of mean curvature equations. By selecting an appropriate auxiliary function G, and then using the extreme value principle and the discussion of the properties of extreme points, we obtain the internal gradient estimation of such mean curvature equations, and improve the internal gradient estimation of such equations.

Keywords

Mean Curvature Equation, Internal Gradient Estimation, Extreme Value Principle

*通讯作者。

文章引用: 司雨欣, 韩菲, 孙文静. 一类平均曲率方程的内部梯度估计[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1910-1917.
DOI: 10.12677/pm.2022.1211205

1. 引言

平均曲率方程是偏微分方程中一类重要方程，对于给定的平均曲率方程的内部梯度估计和全局梯度估计已经被广泛研究。Bombieri [1]等人首先利用测试函数技巧和图上的 Sobolev 不等式，对高维的极小曲面得到了极小曲面方程的内部梯度估计。在 1970 年 Ladyzhenskaya 和 Ural'Tseva [2]运用了测试函数的方法对一类的平均曲率方程得到了内部梯度估计，详细过程请参见文献 Gilbarg [3]。随后在 1991 年，Barles 考虑了一类方程，通过对此方程的粘性解证明得出梯度估计并且给出了拟线性和完全非线性椭圆方程的一些推广[4]。1998 年文献[5]中 Wang 利用 Bernstein 技巧给出的一个新证明。2016 年 Ma 等在[6]中给出了带有 Neumann 边值的平均曲率方程梯度估计的新证明，2018 年，Wang 与 Ma 利用曲面上的活动标架和极大值原理，进一步得出了预定夹角边值平均曲率方程的解的梯度估计[7]。

本文首先介绍了平均曲率型方程和 Wang 及其学生的研究方法，然后利用极值原理及其研究方法，最终得出一类平均曲率方程的内部梯度估计。王培合教授研究的梯度估计适用于大部分的 $H(x,u)$ 在 $H_u \ge 0$ 时的情况而对于 $\alpha \le 0, H(x,u) = H(x) + \alpha^3/u$ 的情形不在其考虑类型中，本文对此进行了研究。

2. 预备知识

首先给出平均曲率方程，设 $\Omega \subset R^n$ 是一个有界的 C^3 区域，我们考虑映射 $F:\Omega \to R^{n+1}$，则 $u:\Omega \to R$ 是定义在 Ω 的光滑函数，则 $\Sigma = F(\Omega)$ 是 R^{n+1} 中的超曲面。

$$F(x) \triangleq X = x + u(x) \bullet e_{n+1}$$

假设 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 是 Ω 上的笛卡尔坐标，则有 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) = x^i \bullet e_i$。
其中 $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0), i = (1,2,\cdots,n)$。因此由上述的记号和计算得出

$$dX = \left(e_i + \frac{\partial u}{\partial x^i} \bullet e_{n+1}\right) \bullet dx^i$$

$$g = g_{jk}(x) dx^j \bullet dx^k$$

记 $\gamma = (\nabla u, -1) \Big/ \sqrt{1+|\nabla u|^2}$ 为 Σ 的向下方向的单位法向量场，我们有 $\gamma \perp \Sigma$，即 Σ 关于 γ 的第二基本型是 $\text{II} = dX \bullet d\gamma$ 则可以得到

$$\text{II} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \bullet dx^j \Big/ \sqrt{1+|\nabla u|^2} = h_{ij} dx^i dx^j$$

因此 Σ 的平均曲率为 $H = g^{ij} h_{ij}$，

其中 $g^{ij} = \delta_{ij} - \dfrac{u_i u_j}{1+|\nabla u|^2}$ 代入第二基本型中可得 $H = \left(\Delta u - \dfrac{u_i u_j u_{ij}}{1+|\nabla u|^2}\right) \Big/ \sqrt{1+|\nabla u|^2}$，

这里 Δ 表示的 Laplace 算子，

最后得到平均曲率方程

$$H(u) = div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

文献[5]中，Wang 考虑了如下的平均曲率方程

$$a_{ij}u_{ij}=\left(\delta_{ij}-\frac{u_iu_j}{1+|\nabla u|^2}\right)u_{ij}=H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} \tag{1}$$

他对于方程(1)内部梯度估计的证明有如下结果：

设 $u\in C^3(B_r(0))$ 是方程(1)的非负解，当 $|H(x)|\le C_0$，并且 $|\nabla H(x)|\le C_0$，则有

$$|\nabla u(0)|\le \exp\left(C_1+C_2\frac{M^2}{r^2}\right)$$

其中 $M=\sup\limits_{B_r(0)}u(x)$，$C_1$ 依赖于 n，M 和 C_0；C_2 依赖于 n，和 C_0。

Wang 在证明过程中附加了条件，即梯度估计适用于大部分的 $H(x,u)$ 在 $H_u\ge 0$ 时的情况而对于 $\alpha<0,H(x,u)=H(x)+\alpha u$ 的情况则不在 Wang 的结果中。

文献[8]中王聪涵则对该情况进一步的研究，尝试得出类似的内部梯度估计结果，并研究平均曲率型方程的梯度估计时用到了几个极值原理，具体的证明参见。他考虑了如下平均曲率方程。

$$a_{ij}u_{ij}=H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2}+\alpha u \tag{2}$$

对于 $u\in C^2(B_r(0))$ 时，我们令

$$a_{ij}=\left(\delta_{ij}-\frac{u_iu_j}{1+|\nabla u|^2}\right)$$

其中使用求和约定来表示。他的结果是如下：

设 $u\in C^3(B_r(0)),u\ge 0$ 是方程(2)的非负解，当 $|H(x)|\le C_0$，并且 $|\nabla H(x)|\le C_0$，则有

$$|\nabla u(0)|\le \exp\left(C_1+C_2|\alpha|+C_3\frac{M^2}{r}+C_4\frac{M^2}{r^2}\right)$$

其中 $M=\sup\limits_{B_r(0)}u(x)$，$C_1,C_2$ 依赖于 n,M 和 C_0；C_3,C_4 依赖于 n 和 C_0。

证明的大致过程为，选取适当的辅助函数 G，并对 $\log G$ 和平均曲率方程分别求导，最后得出平均曲率型方程的内部梯度估计。

3. 主要结果

本节对于平均曲率型方程

$$a_{ij}u_{ij}=H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2}+\frac{\alpha^3}{u} \tag{3-1}$$

其中 $H(x)\in C^{0,1}(B_r(0)),u_{ij}=u_{x_i}u_{x_j},\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $\alpha\le 0$，给出以下证明结果。

定理：

设 $u\in C^3(B_r(0)),u\ge 1$，满足方程

$$a_{ij}u_{ij}=H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2}+\frac{\alpha^3}{u}$$

当 $|H(x)|\le C_0$，并且 $|\nabla H(x)|\le C_0$，则有

$$|\nabla u(0)|\le \exp\left(C_1+C_2|\alpha|^3+C_3\frac{M^2}{r}+C_4\frac{M^2}{r^2}\right)$$

其中 $M=\sup\limits_{B_r(0)}u(x)$，$C_1,C_2$ 依赖于 n,M 和 C_0；C_3,C_4 依赖于 n 和 C_0 我们使用 C_i 表示各种统一常数，这些常数可能会逐行改变。

证明：

$$f(x)=H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2}+\frac{\alpha^3}{u}$$

令辅助函数

$$G(x)=g(x)\varphi(u)\log u_\xi(x)$$

其中

$$g(x)=1-\frac{|x|^2}{r^2},\xi\in S^{n-1}$$

$$\varphi(u)=1+\frac{u}{M},\varphi_u=\frac{1}{M},M=\sup_{B_r(0)}u(x)$$

假设上确界

$$\sup\left\{G(x,\xi),x\in B_r(0),\xi\in S^{n-1}\right\}$$

在某一点 x_0 延 x_1 的方向上达到。因此在 x_0 处对 $i=1,2,\cdots,n$ 我们有

$$0=(\log G)_i=\frac{g_i}{g}+\frac{\varphi'}{\varphi}u_i+\frac{u_{1i}}{u_1\log u_1} \tag{3-2}$$

并且矩阵 $\left\{(\log G)_{ij}\right\}\le 0$，

即有

$$(\log G)_{ij}=\left(\frac{g_{ij}}{g}-\frac{g_ig_j}{g^2}\right)+\left(\frac{\varphi''}{\varphi}-\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right)u_iu_j+\frac{\varphi'}{\varphi}u_{ij}+\frac{u_{1i}}{u_1\log u_1}-\left(1+\frac{1}{\log u_1}\right)\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2\log u_1}$$

由(3-2)可知

$$\begin{aligned}\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2\log u_1^2}&=\frac{g_ig_j}{g^2}+\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}u_iu_j+\frac{\varphi'}{\varphi g}\left(g_iu_j+g_ju_i\right)\\(\log G)_{ij}&=\frac{g_{ij}}{g}+\frac{\varphi''}{\varphi}u_iu_j+\frac{\varphi'}{\varphi}u_{ij}+\frac{\varphi'}{\varphi g}\left(g_iu_j+g_ju_i\right)\\&\quad+\frac{u_{1i}}{u_1\log u_1}-\left(1+\frac{2}{\log u_1}\right)\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2\log u_1}\end{aligned} \tag{3-3}$$

当 $i\ge 2$ 时，在 x_0 处有 $u_i(x_0)=0,a_{11}=\dfrac{1}{1+u_1^2},a_{ii}=1$ 并且当 $i\ne j$ 时 $a_{ij}=0$ 对平均曲率型方程(3-1)进行微分可得

$$a_{ij}u_{ij}=\left(\delta_{ij}-\frac{u_iu_j}{1+|\nabla u|^2}\right)u_{ij}+\frac{\alpha^3}{u}=f(x) \tag{3-4}$$

我们也可以得到

$$a_{ij1}=-\left(\frac{u_iu_j}{1+|\nabla u|^2}\right)_1=-\frac{u_{1i}u_j}{1+u_1^2}-\frac{u_iu_{1j}}{1+u_1^2}+\frac{u_iu_j}{\left(1+u_1^2\right)^2}\bullet 2u_1u_{11}$$

故对(3-4)式求偏微分有

$$\begin{aligned} a_{ii}u_{ii1} &= f_1 - a_{ij1}u_{ij} \\ &= f_1 + \frac{u_{1i}u_j}{1+u_1^2}u_{ij} + \frac{u_iu_{1j}}{1+u_1^2}u_{ij} - \frac{2u_iu_ju_1u_{11}}{\left(1+u_1^2\right)^2}u_{ij} \\ &= f_1 + \frac{2u_1u_{11}^2}{1+u_1^2} - \frac{2u_1^3u_{11}^2}{\left(1+u_1^2\right)^2} + \sum_{i\ge 2}\frac{2u_1u_{1i}^2}{1+u_1^2} \\ &= f_1 + \frac{2u_1u_{11}^2}{\left(1+u_1^2\right)^2} + \sum_{i\ge 2}\frac{2u_1u_{1i}^2}{1+u_1^2} \end{aligned}$$

如果 $u_1\left(x_0\right)$ 充分大时，即有

$$\begin{aligned} & a_{ii}\left(u_{ii1} - \left(1+\frac{2}{\log u_1}\right)\frac{u_{1i}^2}{u_1}\right) \\ &= f_1 + \frac{2u_1u_{11}^2}{\left(1+u_1^2\right)^2} - \frac{1}{1+u_1^2}\left(1+\frac{2}{\log u_1}\right)\frac{u_{11}^2}{u_1} + \sum_{i\ge 2}\frac{2u_1u_{1i}^2}{1+u_1^2} \\ &\ge f_1 + \frac{2u_1u_{11}^2}{\left(1+u_1^2\right)^2} + \sum_{i\ge 2}\frac{2u_1u_{1i}^2}{1+u_1^2} \end{aligned}$$

由假设可得 $\varphi\left(u\right) = 1+\dfrac{u}{M}, \varphi'\left(u\right) = \dfrac{1}{M}, \varphi''\left(u\right) = 0$

从而有

$$\begin{aligned} & a_{ii}\left\{\frac{g_{ij}}{g} + \frac{\varphi''}{\varphi}u_i^2 + \frac{\varphi'}{\varphi}u_{ii} + \frac{2\varphi'}{\varphi g}g_iu_i\right\} \\ &\ge \frac{\varphi'}{\varphi}a_{ii}u_{ii} + \frac{a_{11}g_{11}}{g} + \sum_{i\ge 2}\frac{a_{ii}g_{ii}}{g} + \frac{1}{1+u_1^2}\frac{2\varphi'}{\varphi g}g_1u_1 \\ &\ge \frac{\varphi'}{\varphi}f + \frac{1}{1+u_1^2}\left(\frac{-2}{r^2g}\right) - \frac{2\left(n-1\right)}{r^2g} + \frac{2\varphi'}{\varphi g}\frac{g_1u_1}{1+u_1^2} \\ &\ge \frac{\varphi'}{\varphi}f + \left(\frac{-2}{r^2g}\right) - \frac{2\left(n-1\right)}{r^2g} - \frac{4\varphi'}{\varphi g}\frac{x_1}{r^2}\frac{u_1}{1+u_1^2} \\ &\ge \frac{\varphi'}{\varphi}f - \frac{2n}{r^2g} - \frac{4\varphi'}{r\varphi g}\frac{u_1}{1+u_1^2} \end{aligned}$$

我们可以假设 $G\left(x_0\right)$ 足够大，所以有 $gu_1\ge 1$，然后由(3-3)我们可以得到

$$\begin{aligned} 0 &\ge a_{ii}\left(\log G\right)_{ii} \\ &\ge \frac{f_1}{u_1\log u_1} + \frac{\varphi'}{\varphi}f - \frac{2n}{r^2g} - \frac{4\varphi'}{r\varphi g}\frac{u_1}{1+u_1^2} + \frac{u_{11}^2}{2\left(1+u_1^2\right)^2\log u_1} \\ &\ge \frac{f_1}{u_1\log u_1} + \frac{\varphi'}{\varphi}f - \frac{2n}{r^2g} - \frac{4}{Mr} + \frac{u_{11}^2}{2\left(1+u_1^2\right)^2\log u_1} \end{aligned} \tag{3-5}$$

在 $gu_1\ge 1$ 的基础上可得

$$-\frac{4\varphi'}{r\varphi g}\frac{u_1}{1+u_1^2} \ge -\frac{4}{Mr}\frac{1}{gu_1} \ge -\frac{4}{Mr}$$

其中

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{M+u} \le \frac{1}{M}, \quad \frac{u_1}{1+u_1^2} \le \frac{1}{u_1}$$

根据最初给出的 $f(x) = H(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \frac{\alpha^3}{u}$ 的定义我们可以得到

$$f_1(x) = H_1(x)\sqrt{1+|\nabla u|^2} + \frac{-\alpha^3 u_1}{u^2} + \frac{H(x)u_1 u_{11}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

由(3-2)式我们有，

$$\begin{aligned}
&\frac{f_1}{u_1 \log u_1} + \frac{\varphi'}{\varphi} f \\
&= \frac{H_1(x)\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}{u_1 \log u_1} - \frac{\alpha^3 u_1}{u^2 u_1 \log u_1} + \frac{H(x)u_1 u_{11}}{u_1 \log u_1 \left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi'}{\varphi}\left[H(x)\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^3}{u}\right] \\
&\ge \frac{H_1(x)}{\log u_1} - \frac{\alpha^3}{u^2 \log u_1} + \left(-\frac{g_1}{g} - \frac{\varphi'}{\varphi}u_1\right)\frac{H(x)u_1}{\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi'}{\varphi}\left[H(x)\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^3}{u}\right] \\
&\ge \frac{-C_0}{\log u_1} - \frac{g_1}{g}\frac{H(x)u_1}{\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi'}{\varphi}H(x)\left[\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{u_1^2}{\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\alpha^3}{u} \\
&\ge -C_0 - \frac{g_1 H(x)}{g} + \frac{H(x)}{M+u}\frac{1}{\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha^3}{(M+u)u}
\end{aligned}$$

其中 $\sqrt{1+|\nabla u|^2} = \left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge u_1, g_1 = \left|\frac{2x_1}{r^2}\right| \le \frac{2}{r}$。

由定理的已知条件 $|H(x)| \le C_0$ 和 $C_0 > 0$，即有 $H(x) \ge -C_0$。

我们能够得出

$$\frac{H(x)}{M+u} \ge -\frac{C_0}{M},$$

所以

$$\frac{H(x)}{M+u}\frac{1}{\left(1+u_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ge -\frac{C_0}{M}$$

并且由

$$\frac{u}{M+u} \le 1, \alpha \le 0$$

我们同样能够得到

$$\frac{\alpha^3 u}{M+u} \ge \alpha^3$$

所以我们能够得出

$$\begin{aligned}&\frac{f_1}{u_1\log u_1}+\frac{\varphi'}{\varphi}f\\&\geq -C_0-\frac{C_0}{M}+\alpha^3-\frac{2H(x)}{rg}\\&\geq -\bar{C}_1+|\alpha|^3-\frac{2C_0}{rg}\end{aligned}$$

其中 $\bar{C}_1=C_0+\frac{C_0}{M}$。

若设 $G(x_0)$ 足够大，故在 x_0 处有 $\left|\frac{g_1}{g}\right|\leq\frac{\varphi'}{2\varphi}u_1$，

由(3-2)式代入可得，

$$\begin{aligned}\frac{u_{11}^2}{\left(1+u_1^2\right)^2}&=\frac{\left(\frac{g_1}{g}+\frac{\varphi'}{\varphi}u_1\right)^2}{\left(1+u_1^2\right)^2}u_1^2\log^2 u_1\\&\geq\frac{\left(\frac{\varphi'}{2\varphi}u_1\right)^2}{\left(1+u_1^2\right)^2}u_1^2\log^2 u_1\\&\geq\frac{\varphi'^2}{8\varphi^2}\log^2 u_1\end{aligned}$$

即不等式(3-5)可以进一步得出

$$\begin{aligned}0&\geq a_{ii}\left(\log G\right)_{ii}\\&\geq -\bar{C}_1-|\alpha|^3-\frac{2C_0}{rg}-\frac{2n}{r^2g}-\frac{4}{Mr}+\frac{\varphi'^2}{16\varphi^2}\log u_1\\&\geq -\bar{C}_1-|\alpha|^3-\frac{2C_0}{rg}-\frac{2n}{r^2g}+\frac{\varphi'^2}{16\varphi^2}\log u_1\\&\geq -\bar{C}_1-|\alpha|^3-\frac{2C_0}{rg}-\frac{2n}{r^2g}+\frac{\log u_1}{64M^2}\end{aligned}$$

因此

$$g\bullet\log u_1\leq C_1+C_2|\alpha|^3+C_3\frac{M}{r}+C_4\frac{M}{r^2}$$

即

$$G(x)=g(x)\varphi(u)\log u_1\leq C_1+C_2|\alpha|^3+C_3\frac{M}{r}+C_4\frac{M}{r^2}$$

最后我们能得出

$$|\nabla u(0)|\leq\exp\left(C_1+C_2|\alpha|^3+C_3\frac{M}{r}+C_4\frac{M}{r^2}\right)$$

至此，我们完成了证明。

参考文献

[1] Bombieri, E., De Giorgi, E. and Miranda, M. (1969) Una maggiorazone a priori relativa alleipersuperfici minimali non parabolic. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **32**, 255-267. https://doi.org/10.1007/BF00281503

[2] Ladyzhenskaya, O.A. and Ural'Tseva, N.N. (1970) Local Estimates for Solution of Non-Uniformly Elliptic and Parabolic Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **23**, 677-703. https://doi.org/10.1002/cpa.3160230409

[3] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (2001) Elliptic Partial Differential Equation of Second Order. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61798-0

[4] Barles, G. (1991) Interior Gradient Bounds for the Mean Curvature Equation by Viscosity Solutions Methods. *Differential Integral Equations*, **4**, 263-275.

[5] Wang, X.J. (1998) Interior Gradient Estimates for Mean Curvature Equations. *Mathematische Zeitschrift*, **228**, 73-81. https://doi.org/10.1007/PL00004604

[6] Ma, X. and Xu, J. (2016) Gradient Estimates of Mean Curvature Equations with Neumann Boundary Value Problems. *Advances in Mathematics*, **290**, 1010-1039. https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.10.031

[7] 麻希南, 王培合. 具有给定 Neumann 边值或预定夹角边值的平均曲率方程的边界梯度估计[J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(1): 213-226.

[8] 王聪涵. 平均曲率型方程的内部梯度估计和 Liouville 型结果[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南师范大学, 2019.