Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1948-1953
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211210

改进集下双层强向量均衡问题的存在性

黄文君，曾丽华

江西理工大学基础课教学部，江西 南昌

收稿日期：2022年10月15日；录用日期：2022年11月15日；发布日期：2022年11月24日

摘　要

本文研究了改进集下的双层强向量均衡问题，运用改进集的相关结论，并结合拓扑空间知识，通过向量Thikhonov-type正则化过程得到了其解的存在性。这在一定程度上推广和发展了已有文献的结论。

关键词

改进集，双层强向量均衡问题，解的存在性，Thikhonov-Type正则化

The Existence of Bilevel Strong Vector Equilibrium Problem under Improved Set

Wenjun Huang, Lihua Zeng

Teaching Department of Basic Subjects, Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Oct. 15th, 2022; accepted: Nov. 15th, 2022; published: Nov. 24th, 2022

Abstract

In this paper, we study the bilevel strong vector equilibrium problem under the improved set. By using the relevant conclusions of the improved set and combining the knowledge of topological space, we obtain the existence of its solution through the vector Thikhonov-type regularization process. This extends and develops the conclusions of the previous literature to a certain extent.

Keywords

Improved Set, Bilevel Strong Vector Equilibrium Problem, The Existence of the Solution, Thikhonov-Type Regularization

文章引用: 黄文君，曾丽华. 改进集下双层强向量均衡问题的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1948-1953.
DOI: 10.12677/pm.2022.1211210

1. 引言

均衡问题(也称为广义 KyFan 极大极小不等式)是优化领域研究中的一个重要组成部分。这一问题的研究历史可追溯到二十世纪七十年代 Ky Fan 等人对不等式问题的研究，它是由 Blum 和 Oettli [1]于 1994 年在有限维的欧几里得空间中正式提出的，随后 Ansari [2]，Bianchi，Hadjisavvas 和 Schaible [3]以及 Oettli [4]等多名学者将均衡问题推广到向量情形，提出了向量均衡问题。值得注意的是，向量均衡问题包含了向量最优化问题、向量变分不等式问题、向量鞍点问题、极小极大不等式问题以及不动点问题等诸多重要数学问题作为特例。这也就为研究和处理上述重要的数学问题提供了统一且简洁的框架，同时也为研究向量均衡问题提供了强有力的理论动机(参见文献[5] [6] [7] [8] [9])。

另一方面，经典的数值优化由于目标单一，其最优解通常也是唯一的。与此不同的是向量优化问题，因为它目标是(有限或无限)多个的，所以导致向量优化的解具有多样性。到目前为止，不同的学者从不同的实际应用角度出发，针对向量优化问题，提出了多种解的概念，如：有效解、弱有效解、Benson 真有效解、Hening 真有效解、全局有效解等。然而最近，Chicco [10]在有限维空间中用一个新的集合来代替由像空间中诱导出偏序的锥，称之为改进集。它可以将向量优化中的多种有效解概念统一起来，这为处理向量优化问题提供了统一而又简洁的框架。

受以上工作的启发，本文将结合改进集来研究双层强向量均衡问题解的存在性。这在一定程度上推广和发展了已有文献的结论。全文分为四小节，在第 2 小节给出文中要用到的一些概念和已知结论；第 3 小节考虑了改进集下双层强向量均衡问题，并得出了其解集的存在性结果；第 4 小节总结了本文的研究工作以及所获得的结论。

2. 预备知识

定义 1 [11]设 X,Y 是两个拓扑空间，称集值映射 $F:X\to 2^Y$。

1) 在 $x_0\in X$ 点是上半连续的(简写为 $u.s.c.$)，如果对包含 $F(x_0)$ 的每一开集 V，都存在包含 x_0 的开集 U，使得 $\forall x\in U$，都有 $F(x)\subseteq V$；

2) 在 $x_0\in X$ 点是下半连续的(简写为 $l.s.c.$)，如果对每一开集 V 且 $F(x_0)\cap V\neq\varnothing$，都存在包含 x_0 的开集 U，使得 $\forall x\in U$，都有 $F(x)\cap V\neq\varnothing$；

3) 在 $x_0\in X$ 点是闭的，如果对任意的网

$$\{(x_\alpha,y_\alpha)\}\subseteq graph(F):=\{(x,y):x\in X,y\in F(x)\}$$

且 $(x_\alpha,y_\alpha)\to(x_0,y_0)$，则有 $(x_0,y_0)\in graph(F)$ 或 $y_0\in F(x_0)$；

4) 在 X 上是 $u.s.c.$的(相应地，$l.s.c.$)，如果 F 在 X 上的每一点都是 $u.s.c.$的(相应地，$l.s.c.$)；

5) 在 X 上是连续的，如果 F 在 X 上既是 $u.s.c.$又是 $l.s.c.$的。

引理 1 [11]设 X,Y 是两个拓扑空间，$F:X\to 2^Y$ 是一集值映射。

1) 当 Y 是 Hausdorff 拓扑空间时，若 F 在给定的 $x_0\in X$ 处是 $u.s.c.$的且有紧值(即 $F(x_0)$ 是紧集)，则 F 在 x_0 处是闭的；进而，若 F 在 X 上是 $u.s.c.$的且有紧值，即 F 在 X 上的每一点 $x\in X$ 是 $u.s.c.$的且有紧值，则 F 在 X 上是闭的；

2) 对给定的 $x_0\in X$，若 $F(x_0)$ 是紧的，那么 F 在 x_0 处是 $u.s.c.$的充要条件是：对任意的网 $\{x_\alpha\}\subseteq X$ 满

足 $x_\alpha \to x_0$，对任意的网 $\{y_\alpha\}$ 且 $y_\alpha \in F(x_\alpha)$，存在某个 $y_0 \in F(x_0)$ 以及 $\{y_\alpha\}$ 的某个子网 $\{y_\beta\}$，使得 $y_\beta \to y_0$；

3) F 在 $x_0 \in X$ 点是 $l.s.c.$的充要条件是：对任意的 $y_0 \in F(x_0)$ 和任意的网 $\{x_\alpha\} \subseteq X$ 且 $x_\alpha \to x_0$，存在网 $\{y_\alpha\}$，使得 $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ 且 $y_\alpha \to y_0$；

4) 如果 X, Y 是两个 Hausdorff 拓扑线性空间且 Y 是紧的，F 有非空闭值，那么 F 在 X 上为 $u.s.c.$的充要条件是 F 为闭映射。

定义 2 [12]设 X 和 Y 是两个实的 Hausdorff 拓扑线性空间，K 是 X 中的非空子集，C 为 Y 中的非空闭凸锥，称向量值映射 $f: K \to Y$。

1) 在 $x_0 \in K$ 处是 C-上半连续的(简记为 C-$u.s.c.$)，如果对于 Y 中零元的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 U，使得

$$f(x) \in f(x_0) + V - C, \forall x \in U \cap K.$$

若 f 在 K 中的每一点都是 C-$u.s.c.$，则称 f 在 K 中是 C-$u.s.c.$；

2) 在 $x_0 \in K$ 处是 C-下半连续的(简记为 C-$l.s.c.$)，如果对于 Y 中零元的任意邻域 V，都存在 x_0 的邻域 U，使得

$$f(x) \in f(x_0) + V + C, \forall x \in U \cap K.$$

若 f 在 K 中的每一点都是 C-$l.s.c.$，则称 f 在 X 中是 C-$l.s.c.$；

3) 如果 f 在 K 上既是 C-$u.s.c.$的又是 C-$l.s.c.$的，则称 f 在 K 上是 C-连续的。

注 1 由定义易知，f 在 $x_0 \in K$ 处是 C-上半连续的充要条件是-f 在 x_0 处是 C-下半连续的，进而可知 f 在 K 上是 C-连续的充要条件是-f 在 K 上是 C-连续的。

定义 3 [10]设 Z 是一实的 Hausdorff 拓扑线性空间，K 是 X 中的非空子集，C 为 Y 中的非空闭凸锥。

1) 给定集合 $E \subseteq Z$，记 $u\_comper(E) := E + C$，并称之为 E 的上方集。

2) 如果有 $u\_comper = E$，那么称 E 是 Z 中的上全集。

3) 进一步，若上全集 E 满足 $0 \notin E$，则称 E 是一个改进集。

下面给出几个改进集的引理，这在第三节——主要结果中起到了重要的作用。。

引理 2 [12]假设 $E \subseteq Z$ 是改进集，若 $0 \notin cl(E) \subseteq C$，则有 $int(C) \subseteq E \subseteq C \setminus 0$。

引理 3 [13]改进集有下述基本性质：

1) $int(C) + E \subseteq int(E)$ 且 $int(E) \neq \varnothing$。进一步，$C + int(E) \subseteq int(E)$；

2) $int(C) + cl(E) \subseteq int(E)$；

3) $C + cl(E) \subseteq cl(E)$。

3. 主要结果——改进集下双层强向量均衡问题解的存在性

在本节中，假设 X, Y, Z 是三个实的 Hausdorff 拓扑线性空间，并用 $int(K)$ 和 $cl(K)$ 分别表示一个集合 K 的内部和闭包。再设 A 是 X 中的一个非空闭凸子集，C 是 Z 中的闭凸点锥且内部非空，即 $int(C) \neq \varnothing$。

考虑下述的双层强向量均衡问题：分别求 $\bar{x} \in S_s$，使得

$$\text{(BSVEP)} \quad g(\bar{x}, y) \in E, \forall y \in S_s;$$

其中 S_s 是下面向量均衡问题的解集：求 $\bar{z} \in A$ 使得

$$\text{(SVEP)} \quad f(\bar{z}, z) \in E, \forall z \in A;$$

当 $Z = R, C = [0, +\infty), E = (0, +\infty)$，(BSVEP)退化为双层向量均衡问题：

求 $\bar{x} \in S$，使得

$$g(\bar{x}, y) > 0, \forall y \in S$$

其中 $S = \{\bar{z} \in K : f(\bar{z}, z) > 0, \forall z \in K\}$。

接下来将借助于向量 Thikhonov-type 正则化过程来考虑双层强向量均衡问题解的存在性。为此，我们引入对应的混合向量均衡问题：$\forall \varepsilon > 0$，求 $\bar{x}_\varepsilon \in A$，使得

(MSVEP) $f(\bar{x}_\varepsilon, y) + \varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in E, \forall y \in A$。

定理 1 假定向量值映射 $f, g : A \times A \to Z$ 满足下列条件：

1) $\forall y \in A, x \to f(x, y)$ 是 C-上半连续的；

2) $\forall x, y \in A, f(x, y) \in E$ 蕴含着 $f(y, x) \in -E$；

3) $\forall y \in A, x \to g(x, y)$ 是 C-上半连续的；

4) $\forall \varepsilon > 0$，(MSVEP)有解 $\bar{x}_\varepsilon$。

则 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的每一个聚点 $\bar{x}$ 是(BSVEP)的一个解。

证明： 设 $\bar{x}$ 是网 $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个聚点。$\forall \varepsilon > 0$，令 S_ε 为(MSVEP)的解集，即

$$S_\varepsilon := \{\bar{x}_\varepsilon \in: f(\bar{x}_\varepsilon, y) + \varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in E, \forall y \in A\}.$$

证明过程分成两步来完成。

1) $\forall y \in A$ 有 $f(\bar{x}, y) \in E$，也就是 $\bar{x} \in S_s$。

对任意给定的 $y \in A$，由条件(4)，有 $\bar{x}_\varepsilon \in S_\varepsilon$，即 $\bar{x}_\varepsilon \in A$ 且

$$f(\bar{x}_\varepsilon, y) + \varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in E. \tag{1}$$

由条件(3)，函数 $g(x, y)$ 关于 x 是 C-上半连续的。那么对 Z 中零点的任一平衡邻域 V，存在 $\gamma_1 > 0$，$\bar{x}$ 的邻域 U_1，使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \gamma_1)$ 都有 $\bar{x}_\varepsilon \in U_1$ 而且有

$$g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in g(\bar{x}, y) + V - C$$

因为 $\varepsilon \in (0, \gamma)$，不难得到 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in \varepsilon g(\bar{x}, y) + \varepsilon V - \varepsilon C$。

又因为 C 是凸锥，有 $\varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \in \varepsilon g(\bar{x}, y) + \varepsilon V - C \subseteq V - C$。

结合(1)式，我们有

$$f(\bar{x}_\varepsilon, y) \in E - \varepsilon g(\bar{x}_\varepsilon, y) \subseteq E - \varepsilon g(\bar{x}, y) - \varepsilon V + C \subseteq E - V + C \subseteq E - V.$$

再根据 f 的 C-上半连续性，可知对上述的邻域，存在 $\gamma_2 > 0$，$\bar{x}$ 的邻域 U_2，使得对任意的 $\varepsilon \in [0, \gamma_2]$ 都有 $\bar{x}_\varepsilon \in U_2$ 而且有

$$f(\bar{x}_\varepsilon, y) \in f(\bar{x}, y) + V - C.$$

那么对上述的邻域，我们令 $V = -C$，存在 $\gamma > 0$，$\bar{x}$ 的邻域 U，使得对任意的 $\varepsilon \in [0, \gamma]$ 都有 $\bar{x}_\varepsilon \in U$ 而且有

$$f(\bar{x}, y) \in f(\bar{x}_\varepsilon, y) - V + C \subseteq E - V - V + C.$$

注意到 V 是平衡邻域，C 是锥，上式可写成

$$f(\bar{x}, y) \in E + V + C \subseteq E + C + C = E.$$

这也就表明对给定的 $y \in A$，我们有 $f(\bar{x}, y) \in E$。又由 y 的任意性，我们得到 $\forall y \in A$ 有 $f(\bar{x}, y) \in E$，也就是 $\bar{x} \in S_s$。

2) 现在我们需要证明 $g(\overline{x},y)\in E,\forall y\in S_s$，其中 $S_s:=\{x\in K:f(x,z)\in E,\forall z\in A\}$。

注意到 $\overline{x}_\varepsilon\in S_\varepsilon$，又任取一向量 $z\in S_s$，有

$$f(\overline{x}_\varepsilon,z)+\varepsilon g(\overline{x}_\varepsilon,z)\in E.$$

我们断言对任意的 $y\in S_s$ 都有 $\varepsilon g(\overline{x}_\varepsilon,y)\in E$。

注意到 $\overline{x}_\varepsilon\in A,z\in S_s$，我们可以得到 $f(z,\overline{x}_\varepsilon)\in E$。又由条件(2)，可以得到 $f(\overline{x}_\varepsilon,z)\in -E$。

因此有

$$\varepsilon g(\overline{x}_\varepsilon,z)\in E-f(\overline{x}_\varepsilon,z)\subseteq E-(-E)\subseteq E+C=E.$$

那么对任意的 $y\in S_s$，我们有 $\varepsilon g(\overline{x}_\varepsilon,y)\in E$。进而我们可以得到

$$g(\overline{x}_\varepsilon,y)\in E,\forall y\in S_s. \tag{2}$$

接下来我们证明 $g(\overline{x},y)\in E$，$\forall y\in S_s$。由假设条件向量值映射 $x\to g(x,z)$ 是 C-上半连续的和条件 $\overline{x}$ 是解集 $\{\overline{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个聚点。那么对任意取定的邻域 W，令 $W=-C$，存在 Z 中的零点开邻域 $\tilde{U}$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall\varepsilon<\varepsilon_0$，我们有

$$g(\overline{x}_\varepsilon,z)\in g(\overline{x},z)+W-C.$$

结合(2)式，我们有

$$g(\overline{x},z)\in g(\overline{x}_\varepsilon,z)-W+C\subseteq E+C+C=E+C=E.$$

由此我们得到 $g(\overline{x},y)\in E$，$\forall y\in S_s$。

综上所述，我们已经证得(MSVEP)解集 $\{\overline{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的每一个聚点 $\overline{x}$ 是(BSVEP)的一个解。

下面我们将给出一个例子来说明定理 1 中的条件(2)是可以满足的：

例 1 设 $X=R,Z=R^2,K=(0,+\infty),E=\{(x,y)\in R^2:x>0,y>0\}$。

对任意的 $x,y\in K$，定义向量值映射 $f:K\times K\to Z$ 为 $f(x,y)=(x-y,x(x-y))$。

我们现在来考虑条件(2)是否成立。首先对任意的 $x,y\in K$ 有 $f(x,y)\notin -int(E)$。注意到 $int(E)=E$，也就是 $f(x,y)\notin -E$，那么可以知道其解集是 $\{(x,y)\in Z:x>y>0\}$。进而我们可以得到 $f(y,x)=(y-x,y(y-x))\in -E$。故条件(2)成立。

4. 结论与展望

本文介绍了改进集的一些特性，并在此基础上研究了改进集下的双层强向量均衡问题，借助向量 Thikhonov-type 正则化过程获得了其解的存在性。改进集是一个新兴的研究课题，它可以将向量优化问题的多种有效解概念统一起来，为研究和处理向量优化问题带来极大的方便。可以深入探讨基于改进集的各类向量优化问题。

基金项目

江西省教育厅科学基金项目(GJJ210866、GJJ210827)。

参考文献

[1] Blum, E. and Oettli, W. (1994) From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems. *Mathematica Student*, **63**, 123-145.

[2] Ansari, Q.H. (2000) Vector Equilibrium Problems and Vector Variational Inequalities. In: Giannessi, F., Ed., *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer, Dordrecht, Boston, 1-15. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0299-5_1

[3] Bianchi, M., Hadjisavvas, N. and Schaible, S. (1997) Vector Equilibrium Problems with Generalized Monotone Bifunctions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **92**, 527-542. https://doi.org/10.1023/A:1022603406244

[4] Oettli, W. (1997) A Remark on Vector-Valued Equlibria and Generalized Monotonicity. *Acta Mathematica Vietnamica*, **22**, 213-221.

[5] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[6] Bonnel, H. and Morgan, J. (2006) Semivectorial Bilevel Optimization Problem: Penalty Approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **131**, 365-382. https://doi.org/10.1007/s10957-006-9150-4

[7] Malik, A.S., Boyko, O., Atkar, N. and Young, W.F. (2001) A Comparative Study of MR Imaging Profile of Titanium Pedicle Screws. *Acta Radiologica*, **42**, 291-293. https://doi.org/10.1080/028418501127346846

[8] Capata, A. (2021) Existence of Solutions of Bilevel Strong Vector Equilibrium Problems and Their Applications. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, **5**, 371-389. https://doi.org/10.23952/jnva.5.2021.3.03

[9] Ranjbar, S., Farajzadeh, A., Yao, J.C. and Zhang, T. (2021) Optimality Conditions for Generalized Vector Equilibrium Problems in Vector Spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **22**, 133-147.

[10] Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L. and Tijs, S. (2011) Vector Optimization Problems via Improvement Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, 516-529. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[11] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (1984) Applied Nonlinear Analysis. Wiley, New-York.

[12] Luc, D.T. (1989) Theory of Vector Optimization. In: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Spring-Verlag, New York, Vol. 319. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

[13] Mao, J.Y., Wang, S.H. and Han, Y. (2019) The Stability of the Solution Sets for Set Optimization Problems via Improvement Sets. *Optimization*, **68**, 2168-2190. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1579813