Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2133-2140
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212229

加权Bergman空间上的广义Volterra型积分算子

施业成

岭南师范学院，广东 湛江

收稿日期：2022年11月24日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月29日

摘 要

近年来解析函数空间上的广义 **Volterra** 型积分算子的有界性和紧性引起众多学者的兴趣。然而，加权 **Bergman** 空间上的广义 **Volterra** 型算子的研究尚未完善。本论文讨论加权**Bergman**空间之间的广义 **Volterra** 型积分算子的有界性和紧性问题，利用 **Bergman Carleson** 测度和 **Littlewood-Paley** 公式给出了加权 **Bergman** 空间之间的广义 **Volterra** 型积分算子的有界性和紧性的刻画，完善了加权 **Bergman** 空间上的广义 **Volterra** 型算子的性质。

关键词

Bergman 空间，广义 **Volterra** 型积分分算子，有界性，紧性

Generalized Volterra Type Integral Operators between Weighted Bergman Spaces

Yecheng Shi

School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: Nov. 24^{th}, 2022; accepted: Dec. 22^{nd}, 2022; published: Dec. 29^{th}, 2022

文章引用: 施业成. 加权Bergman空间上的广义Volterra型积分算子[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2133-2140.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212229

Abstract

In recent years, the boundedness and compactness of generalized Volterra-type integral operators on analytic function spaces have attracted many scholars' interests, but the study of the generalized Volterra-type integral operators on weighted Bergman space is not yet complete. In this paper, we consider the boundedness and compactness of Generalized Volterra type integral operators between weighted Bergman spaces. Using the Bergman Carleson measure and Littlewood-Paley formula, we characterized the boundedness and compactness of generalized Volterra-type operators weighted Bergman space, and the properties of generalized Volterra-type operators were further improved.

Keywords

Bergman Spaces, Generalized Volterra Type Integral Operators, Boundedness, Compactness

1. 引言

设D是复平面C上的单位圆盘, 即 $D := \{z \in C : |z| < 1\}$. $H(D)$ 是D 上的解析函数全体. 当$0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ 时, 加权Bergman空间 A^p_α 定义为所有 $L^p(D, dA_\alpha)$ 范数有限的解析函数全体, 即:

$$A^p_\alpha = \{f \in H(D) : \|f\|^p_{A^p_\alpha} := \int |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty\}.$$

这里$dA_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha+1}(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$, $dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$ 是D 上的标准Lebanese测度.

设 $\varphi \in H(D)$ 且 φ 为单位圆盘 D 上的解析自映射, 复合算子 C_φ 定义为

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \ \ z \in D, \ \ f \in H(D).$$

加权复合算子 uC_φ 定义为

$$uC_\varphi(f)(z)=u(z)f(\varphi(z)),\ \ z\in D,\ \ f\in H(D).$$

这里 $a\asymp b$ 表示存在常数 $C>0$ 使得 $C^{-1}b\le a\le Cb$.

设 $g\in H()$, 定义 Volterra 积分算子 T_g 为

$$T_gf(z)=\int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta,\ \ f\in H(D).$$

另外定义积分算子 S_g 为

$$(S_gf)(z)=\int_0^z f'(\zeta)g(\zeta)d\zeta,\ \ f\in H(D).$$

Pommerenke [1]在1977年, 首先研究了积分算子T_g在 Hardy 空间H^2的有界性问题.在此之后,许多学者研究了其他不同解析函数空间上的 Volterra 积分算子. Li 和Stević 在文献 [2]中引入并研究了广义 Volterra 型积分算子 $T_g^\varphi=C_\varphi\circ T_g, T_{g,\varphi}=T_g\circ C_\varphi, S_g^\varphi=C_\varphi\circ S_g,\ \ S_{g,\varphi}=S_g\circ C_\varphi$. 随后, 广义 Volterra 型积分算子吸引了众多学者的关注和研究 [3–9]. 但对于加权 Bergman 空间上的刻画竟然尚未被研究. 本文我们主要考虑加权 Bergman 空间A^p_α 上的广义 Volterra 型积分算子的有界性和紧性问题. 本文第二节介绍了证明本文主要结果所需要的 Littlewood-Paley 公式、Bergman Carleson 测度和 Nevalinna 型计数函数的相关结论. 第三节, 给出本文主要结果及其证明.

2. 预备知识

首先, 我们需要下面的 Littlewood-Paley 公式, 可见于 [10]的定理 4.28.

引理2.1 假设 $0<p<\infty, -1<\alpha<\infty$. 若$f\in A^p_\alpha$, 则

$$\|f\|_{A^p_\alpha}\asymp|f(0)|+\|f'\|_{A^p_{\alpha+p}}.$$

定义2.2 假设 $0<p,q<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, 记 $\lambda:=\frac{p}{q}$. 设 μ 为单位圆盘 D 上的正 Borel 测度, 若嵌入映射

$$I:A^p_\alpha\to L^q(d\mu)$$

是有界的,则称 μ 是 $(\lambda,\alpha)-$ Bergman Carleson 测度. 若 μ 为单位圆盘 D 上的正 Borel 测度, 对所有 $\{f_n\}\subset A^p_\alpha$, 且满足 $\{f_n\}$ 在 D 上的任意紧子集一致收敛于0的函数列 $\{f_n\}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^q(d\mu)}=0,$$

我们则称 μ 是 消灭 $(\lambda,\alpha)-$ Bergman Carleson 测度.

设 $z\in D, 0<r<1$, 用 $\triangle(z,r)$ 表示以 z 为圆心, r 为半径的拟双曲圆盘. 我们需要下面众所周知的 Bergman 空间嵌入算子的 Carleson 型测度刻画, 可见文献 [11].

引理2.3 假设 $-1<\alpha<\infty,\ 0<p,q<\infty$, 令 μ 为 D 上的正 Borel 测度,则

(1) 当 $0<p\le q<\infty$ 时,

(a)$I: A_\alpha^p \to L^q(d\mu)$ 是有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\frac{q}{p}(\alpha+2)}}<\infty.$$

(b) $I: A_\alpha^p \to L^q(d\mu)$ 是紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\frac{q}{p}(\alpha+2)}}=0.$$

(2) 当 $0<q<p<\infty$ 时, $\frac{1}{s}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. $I: A_\alpha^p \to L^q(d\mu)$ 是有界(紧)算子当且仅当

$$\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\in L^s(dA_\alpha).$$

注： 定义微分算子 D 为 $Df=f'$. 由引理 2.1, 微分算子 $D: A_\alpha^p \to L^q(\mu)$ 有界(紧)当且仅当嵌入算子 $I: A_{\alpha+p}^p \to L^q(\mu)$ 有界(紧).

假设 $-1<\alpha<\infty$, φ 是单位圆盘 D 上的解析自映射, 定义 Nevanlinna 型计数函数 $N_{\varphi,\alpha+2}(w)=\sum\limits_{z\in\varphi^{-1}(w)}\log(\frac{1}{|z|})$, 这里 $w\in\varphi(D)$ 且 $w\neq\varphi(0)$. 并令 $N_{\varphi,\alpha+2}(w)=0, w\notin\varphi(D)$. 由引理2.1, 我们马上有下面引理.

引理2.4 假设 $-1<\alpha<\infty, \varphi: D\to D$ 是解析映射, $g\in B$, $f\in A_\alpha^2$. 则

$$\|T_g^\varphi f\|_{A_\alpha^2}^2 \asymp |(T_g f)(\varphi(0))|^2+\int_D |f(w)|^2|g'(w)|N_{\varphi,\alpha+2}(w)dA(w).$$

3. 有界性和紧性刻画

利用以上引理, 我们现在证明本文的主要定理.

定理3.1 假设 $0<p,q<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$. 假设 $g,\varphi\in H()$, $\varphi(D)\subset D$, 定义单位圆盘 D 上的 Borel 测度 $\mu_{g,\varphi}^\beta$ 为

$$\mu(E):=\mu_{g,\varphi}^{q,\beta}(E)=\int_{\varphi^{-1}(E)}|(g\circ\varphi)'(z)|^q dA_{\beta+q}(z),$$

这里 E 为 D 上的任一 Borel 集. 则 $T_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当 μ 是(消灭) $(\frac{p}{q},\alpha)$-Bergman Carleson 测度. 即：

(1) 当 $0<p\le q<\infty$ 时,

(a) $T_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in}\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}<\infty.$$

(b) $T_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是紧算子当且仅当

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}<\infty.$$

(2) 当 $0<q<p<\infty$ 时, 记 $s=\frac{pq}{p-q}$. 则 $T_g^{\varphi}:A_\alpha^p\to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当

$$\frac{\mu(\triangle(z,r))}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\in L^s(D,dA_\alpha)$$

证明: $T_g^{\varphi}:A_\alpha^p\to A_\beta^q$是有界算子等价于

$$\|T_g^{\varphi}f\|_{A_\beta^q}\le C\|f\|_{A_\alpha^p}.$$

不妨设 $\varphi(0)=0$, 则由引理 2.1

$$\begin{aligned}\|T_g^{\varphi}f\|_{A_\beta^q}^q &= \left\|\int_0^{\varphi(z)}f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta\right\|_{A_\beta^q}^q\asymp\|(f\circ\varphi))(g\circ\varphi)'\|_{A_{\beta+q}^q}^q\\ &\asymp \int_D|f(\varphi(z))|^q|(g\circ\varphi)'(z)|^q dA_{\beta+q}\\ &= \int_D|f(z)|^q d\mu_{g,\varphi}^{\beta}(z).\end{aligned}$$

我们有 $T_g^{\varphi}:A_\alpha^p\to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当嵌入算子$I:A_\alpha^p\to L^q(d\mu)$ 是有界(紧)算子. 因此, 由引理 2.3, 定理得证.

定理3.2 假设 $0<p,q<\infty$, $-1<\alpha,\beta<\infty$. 假设 $g,\varphi\in H()$, $\varphi(D)\subset D$, 定义单位圆盘 D 上的 Borel 测度 μ 为

$$\mu(E)=\int_{\varphi^{-1}(E)}|g'(z)|^q dA_{\beta+q}(z),$$

这里 E 为 D 上的任一 Borel 集. 则 $T_{g,\varphi}:A_\alpha^p\to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当 μ 是(消灭) $(\frac{p}{q},\alpha)$-Bergman Carleson 测度.

证明: $T_{g,\varphi}:A_\alpha^p\to A_\beta^q$是有界算子等价于

$$\|T_{g,\varphi}f\|_{A_\beta^q}\le C\|f\|_{A_\alpha^p}.$$

则

$$\begin{aligned}\|T_{g,\varphi}f\|_{A_\beta^q}^q &= \left\|\int_0^{z}f(\varphi(\zeta))g'(\zeta)d\zeta\right\|_{A_\beta^q}^q\asymp\|(f\circ\varphi))g'\|_{A_{\beta+q}^q}^q\\ &\asymp \int_D|f(\varphi(z))|^q|g'(z)|^q dA_{\beta+q}\\ &= \int_D|f(z)|^q d\mu(z).\end{aligned}$$

我们有 $T_{g,\varphi}: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当嵌入算子$I: A_\alpha^p \to L^q(d\mu)$ 是有界(紧)算子. 因此, 由引理 2.3, 定理得证.

定理3.3 假设 $0 < p, q < \infty$, $-1 < \alpha, \beta < \infty$. 假设 $g, \varphi \in H()$, $\varphi(D) \subset D$, 定义单位圆盘 D 上的 Borel 测度 μ 为

$$\mu(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |g(\varphi(z))\varphi'(z)|^q dA_{\beta+q}(z),$$

这里 E 为 D 上的任一 Borel 集. 则 $S_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当 μ 是(消灭) $(\frac{p}{q}, \alpha + p)$-Bergman Carleson 测度.

证明: $S_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$是有界算子等价于

$$\|S_g^\varphi f\|_{A_\beta^q} \le C\|f\|_{A_\alpha^p}.$$

不妨设 $\varphi(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\|S_g^\varphi f\|_{A_\beta^q} &= \left\| \int_0^{\varphi(z)} f'(\zeta)g(\zeta)d\zeta \right\|_{A_\beta^q}^q \asymp \|(f\circ\varphi)'(g\circ\varphi)\|_{A_{\beta+q}^q}^q \\
&\asymp \int_D |(f\circ\varphi)'(z))|^q |g(\varphi(z))|^q dA_{\beta+q} \\
&= \int_D |f'(z)|^q d\mu(z).
\end{aligned}$$

我们有 $S_g^\varphi: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当微分算子$D: A_\alpha^p \to L^q(d\mu)$ 是有界(紧)算子. 因此, 由引理2.3及其注, 定理得证.

定理3.4 假设 $0 < p, q < \infty$, $-1 < \alpha, \beta < \infty$. 假设 $g, \varphi \in H()$, $\varphi(D) \subset D$, 定义单位圆盘 D 上的 Borel 测度 μ 为

$$\mu(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |g(z)\varphi'(z)|^q dA_{\beta+q}(z),$$

这里 E 为 D 上的任一 Borel 集. 则 $S_{g,\varphi}: A_\alpha^p \to A_\beta^q$ 是有界(紧)算子当且仅当 μ 是(消灭) $(\frac{p}{q}, \alpha + p)$-Bergman Carleson 测度.

证明: $S_{g,\varphi}: A_\alpha^p \to A_\beta^q$是有界算子等价于

$$\|S_{g,\varphi} f\|_{A_\beta^q} \le C\|f\|_{A_\alpha^p}.$$

不妨设 $\varphi(0) = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\|S_{g,\varphi} f\|_{A_\beta^q}^q &= \left\| \int_0^z (f\circ\varphi)'(\zeta)g(\zeta)d\zeta \right\|_{A_\beta^q}^q \asymp \|(f\circ\varphi)'g\|_{A_{\beta+q}^q}^q \\
&\asymp \int_D |(f\circ\varphi)'(z)|^q |g(z)|^q dA_{\beta+q}(z) \\
&= \int_D |f'(z)|^q d\mu(z).
\end{aligned}$$

所以, 我们有 $S_{g,\varphi}: A^p_\alpha \to A^q_\beta$ 是有界(紧)算子当且仅当微分算子$D: A^p_\alpha \to L^q(d\mu)$ 是有界(紧)算子. 因此, 由引理2.3及其注, 定理得证.

回顾 Bloch 空间的定义. 由所有满足

$$\sup_{z\in D} |f'(z)|(1-|z|^2) < \infty$$

的所有解析函数构成的空间, 称为 Bloch空间, 记作B. 由 [12]我们知道：$T_g: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 有界当且仅当 $g \in B$. 当 $g \in B$ 时, 我们使用文献 [13]的方法, 利用 Nevanlinna 型计数函数刻画广义Volterra 型积分算子 T^φ_g 和 $T_{g,\varphi}$ 的有界性和紧性刻画. 限于篇幅,我们只给出 T^φ_g 的紧性刻画.

定理3.5 假设 $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$. 假设 $\varphi \in H()$, $\varphi(D) \subset D$, $g \in B$. 则 $T^\varphi_g: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 是紧算子当且仅当

$$|g'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z)$$

是消灭$(1,\alpha)$-Bergman Carleson 测度.

证明: 充分性: 首先考虑 $p=2$ 的情况. 假设 $\{f_n\} \subset A^2_\alpha$, 满足 $\|f_n\|_{A^2_\alpha} \le 1$ 且 f_n 在 D 的紧子集上一致收敛于0. 那么, 当 $n \to \infty$ 时,

$$T_g f_n(\varphi(0)) = \int_0^{\varphi(0)} f_n(w) g'(w) dw \to 0.$$

因此, 若 $|g'|^2 N_{\varphi,\alpha} dA$ 是消灭 $(1,\alpha)-$ Bergman Carleson 测度, 则嵌入映射$A^2_\alpha \to L^2(D, |g'|^2 N_{\varphi,\alpha} dA)$ 是紧的. 于是, 由引理2.4, $\|T^\varphi_g f_n\|_{A^2_\alpha} \to 0$, 当 $n \to \infty$. 所以, $T^\varphi_g: A^2_\alpha \to A^2_\alpha$ 是紧算子.

由于 $g \in B$, 可知：对任意 $0 < p < \infty$, $T^\varphi_g: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 是有界算子, 从而由 Krasnoselskii 插值定理 [14]：$T^\varphi_g: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 是紧算子.

必要性：假设对某个 $p \in (0,\infty)$, 有$C_\varphi T_g: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 是紧算子, 那么由插值理论, T^φ_g 是 A^2_α 上的紧算子. 由引理2.4, 可知嵌入映射$A^2_\alpha \to L^2(D, |g'|^2 N_{\varphi,\alpha} dA)$ 是紧的. 故$|g'|^2 N_{\varphi,\alpha+2} dA$ 是消灭$(1,\alpha)$-Bergman Carleson 测度.

注: 当 $g \in H^\infty$ 时, 算子 $S^\varphi_g, S_{g,\varphi}: A^p_\alpha \to A^p_\alpha$ 也有相应同类型的结论.

基金项目

本论文受岭南师范学院科研项目(1170919634) 资助.

参考文献

[1] Pommerenke, C. (1977) Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **52**, 591-602. https://doi.org/10.1007/BF02567392

[2] Li, S. and Stević, S. (2008) Products of Composition and Integral Type Operators from H^∞ to the Bloch Space. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **53**, 463-474. https://doi.org/10.1080/17476930701754118

[3] Li, S. and Stević, S. (2008) Generalized Composition Operators on Zygmund Spaces and Bloch Type Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 1282-1295. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.013

[4] Li, S. and Stević, S. (2009) Products of Integral-Type Operators and Composition Operators between Bloch-Type Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **349**, 596-610. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.09.014

[5] Mengestie, T. (2014) Product of Volterra Type Integral and Composition Operators on Weighted Fock Spaces. *The Journal of Geometric Analysis*, **24**, 740-755. https://doi.org/10.1007/s12220-012-9353-x

[6] Mengestie, T. (2016) Generalized Volterra Companion Operators on Fock Spaces. *Potential Analysis*, **44**, 579-599. https://doi.org/10.1007/s11118-015-9520-3

[7] Mengestie, T. and Worku, M. (2018) Topological Structures of Generalized Volterra-Type Integral Operators. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, Article No. 42. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1080-5

[8] Tien, P. (2020) Products of Volterra Type Operators and Composition Operators between Fock Spaces. *Results in Mathematics*, **75**, Article No. 104.

[9] Yang, Z. and Zhou, Z. (2022) Generalized Volterra-Type Operators on Generalized Fock Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **295**, 1641-1662. https://doi.org/10.1002/mana.202000014

[10] Zhu, K.H. (2007) Operator Theory in Function Spaces. American Mathematical Society, Providence.

[11] Pau, J. and Zhao, R. (2015) Carleson Measures and Toeplitz Operators for Weighted Bergman Spaces on the Unit Ball. *Michigan Mathematical Journal*, **64**, 759-796. https://doi.org/10.1307/mmj/1447878031

[12] Aleman, A. and Siskakis, A.G. (1997) Integration Operators on Bergman Spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, **46**, 337-356.

[13] Miihkinen, S., Nieminen, P., Saksman, E., *et al.* (2018) Structural Rigidity of Generalised Volterra Operators on H^p. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **148**, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2018.06.005

[14] Krasnoselskii, M. (1960) On a Theorem of M. Riesz. *Soviet Math. Dokl*, **1**, 229-231.