Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2163-2169
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212232

Lorentz 空间中超曲面上的 Ricci 孤立子

杨　阳*, **杨　超**†

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年11月25日；录用日期：2022年12月21日；发布日期：2022年12月30日

摘　要

本文研究 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 中超曲面上以它的位置向量的切向为势向量场的 Ricci 孤立子。在超曲面的形状算子可对角化的假定下，得到超曲面至多有两个不相同的主曲率。

关键词

Ricci 孤立子，超曲面，Lorentz 空间，形状算子，主曲率

Ricci Solitons on Hypersurfaces of Lorentz Space

Yang Yang*, **Chao Yang**†

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 25th, 2022; accepted: Dec. 21st, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

In this paper, we study Ricci solitons on hypersurfaces of Lorentz space $\mathbb{E}_1^{n+1}$ by

∗ 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 杨阳, 杨超. Lorentz 空间中超曲面上的 Ricci 孤立子[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2163-2169.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212232

taking the potential vector field as the tangent component of the position vector of the hypersurfaces. Under the assumption that the hypersurfaces have diagonalizable shape operators, we prove that the hypersurfaces have at most two distinct principal curvatures.

Keywords

Ricci Solitons, Hypersurfaces, Lorentz Space, Shape Operator, Principal Curvatures

1. 引言

设 (M, g) 为伪黎曼流形, 若存在 M 上的光滑切向量场 ξ , 及 $\lambda \in R$, 使得

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + \mathrm{Ric} = \lambda g, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{L}_\xi g$ 是度量 g 沿 ξ 方向的 Lie 导数, Ric 是 M 上的 Ricci 曲率张量, 则称 (M, g, ξ, λ) 为 Ricci 孤立子, ξ 为孤立子 (M, g, ξ, λ) 的势向量场, λ 为孤立子常数. 当 $\lambda > 0$ ($= 0$, 或 < 0)时, 称 Ricci 孤立子 (M, g, ξ, λ) 为收缩的 (稳定的, 或扩张的). 特别地, 如果 $\mathcal{L}_\xi g = 0$, 则称 Ricci 孤立子是平凡的.

Ricci 孤立子的几何结构受到了几何学家的广泛关注 [1–15], Chen [7]和 Deshmukh [8]研究了欧氏空间中超曲面上以它的位置向量的切向部分为势向量场的 Ricci 孤立子, 证得超曲面至多有两个不同的主曲率, 且对此类 Ricci 孤立子进行了分类. 近期, Demirci [11]考察了 Minkowski 空间 $\mathbb{E}_1^4$ 中超曲面上的此类 Ricci 孤立子, 在超曲面的形状算子可对角化的假定下, 同样证得超曲面至多有两个不同主曲率, 自然要问. 这个结论在一般维数的 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 中是否成立.

本文研究 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 中形状算子可对角化的超曲面 M 上以它的位置向量场的切向部分为势向量场的一类 Ricci 孤立子, 对上述问题给出肯定的回答, 也就是, 用文献 [11]的方法, 即将定义得到的关于 Ricci 曲率张量的式子和该类 Ricci 孤立子存在的充要条件进行计算对比, 得到在一般维数的 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 中, 当超曲面的形状算子可对角化的假定下, 同样可以证得超曲面至多有两个不同主曲率. 这个结果不用限制维数, 在一些相关计算及一些几何结构中都有重要意义.

本文大致安排如下: 先介绍相关基础知识, 其次引入证明本文结果需要的两个引理, 最后给出本文的主要定理及证明.

2. 预备知识

Lorentz 空间是指负指标为 1 的伪欧氏空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$, 其上赋予了指标为 1 的标准伪欧氏度量

$$\tilde{g} = -dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_n^2.$$

设 $x : (M, g) \to (\mathbb{E}_1^{n+1}, \tilde{g})$ 是一个等距浸入, N 是超曲面 M 的一个单位法向量场, $\varepsilon = \tilde{g}(N, N) = \pm 1$. 用 $\tilde{\nabla}$ 表示 E_1^{n+1} 上的 Levi-Civita 联络, 则对 M 上任意的光滑切向量场 X, 有

$$\tilde{\nabla}_X x = X. \tag{2}$$

用 ∇ 表示 M 上的 Levi-Civita 联络, A 表示超曲面 M 沿 N 方向的形状算子, 则对 M 上任意的光滑切向量场 X, Y, 有

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon g(AX, Y)N,\ \tilde{\nabla}_X N = -AX. \tag{3}$$

由上式得

$$Ric(X, Y) = nHg(AX, Y) - g(AX, AY), \tag{4}$$

其中 $H = \frac{1}{n} trA$ 为超曲面 M 的平均曲率.

超曲面 M 上的 Codazzi 方程为: 对流形 M 上任意的光滑切向量场 X, Y, 有

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X), \tag{5}$$

其中 $(\nabla A)(X, Y) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y)$.

设 X 是流形 M 上的光滑切向量场, 度量 g 沿 X 方向的 Lie 导数定义为 [16]

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]), \tag{6}$$

其中 Y, Z 是 M 上任意的光滑切向量场.

设 ∇f 表示 f 的梯度, 则

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f).$$

若超曲面 M 的形状算子可对角化,

则存在 M 上的局部标准正交标架 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 即

$$g(e_1, e_1) = -\varepsilon,\ g(e_i, e_i) = 1,\ i = 2, \cdots, n,$$

$$g(e_i, e_j) = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, n,\ i \neq j,$$

使得 $Ae_i = a_i e_i$, $i = 1, 2 \cdots n$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 M 上的光滑函数.

3. 主要结果

证明本文的主要结果需要一些计算作为铺垫, 其中很重要的一个式子是一类 Ricci 孤立子存在的充要条件, 且这类 Ricci 孤立子是欧氏空间中超曲面上以它的位置向量的切向部分为势向量场, 故为了完成定理的证明, 我们需要以下引理 1 和引理 2.

引理 1 设 $x:(M,g)\to(\mathbb{E}_1^{n+1},\tilde{g})$ 是从 n 维伪黎曼流形 M 到 $n+1$ 维 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 的等距浸入, 则对流形 M 上任意的光滑切向量场 X, 有

$$\nabla_X x^T = X+\varepsilon\rho AX,\ \ \nabla\rho=-Ax^T, \tag{7}$$

其中 x^T 是 x 的切向部分, $\rho=\tilde{g}(x,N)$, $\nabla\rho$ 是 ρ 的梯度.

证明 位置向量 x 可以被分解为

$$x=x^T+\varepsilon\rho N, \tag{8}$$

其中 x^T 是 x 的切向部分, $\rho=\tilde{g}(x,N)$, $\varepsilon=\tilde{g}(N,N)$.

将 (8) 式代入 (2) 式, 结合 (3) 式得

$$\begin{aligned}X &= \tilde{\nabla}_X(x^T+\varepsilon\rho N)\\ &= \tilde{\nabla}_X x^T+\varepsilon(X(\rho)N+\rho\tilde{\nabla}_X N)\\ &= \nabla_X x^T+\varepsilon g(AX,x^T)N+\varepsilon X(\rho)N-\varepsilon\rho AX\\ &= \nabla_X x^T-\varepsilon\rho AX+\varepsilon g(X,Ax^T)N+\varepsilon g(\nabla\rho,X)N,\end{aligned}$$

其中 X 为 M 上的任意光滑切向量场. 观察上式中的切向部分和法向部分得

$$\nabla_X x^T = X+\varepsilon\rho AX,\ g(\nabla\rho,X)=-g(X,Ax^T).$$

又因上式对任意的 X 成立, 所以 $\nabla\rho=-Ax^T$.

引理 2 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 中超曲面 M 上存在 Ricci 孤立子 (M,g,x^T,λ) 当且仅当 M 的 Ricci 曲率张量满足

$$Ric(X,Y)=(\lambda-1)g(X,Y)-\varepsilon\rho g(AX,Y), \tag{9}$$

其中 X, Y 为流形 M 上的任意光滑切向量场.

证明 先证必要性. 设 $x:(M,g)\to(E_1^{n+1},\tilde{g})$ 是等距浸入, (M,g,x^T,λ) 是 Ricci 孤立子. 对于 M 上任意的光滑切向量场 X, Y, 利用 (6) 式考察 $(\mathcal{L}_{x^T}g)(X,Y)$, 结合联络的相容性, 无挠性及 (7)

式得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{x^T}g)(X,Y) &= x^T(g(X,Y)) - g([x^T,X],Y) - g(X,[x^T,Y]) \\ &= g(\nabla_{x^T}X,Y) + g(X,\nabla_{x^T}Y) - g(\nabla_{x^T}X,Y) \\ &\quad + g(\nabla_X x^T,Y) - g(X,\nabla_{x^T}Y) + g(X,\nabla_Y x^T) \\ &= g(\nabla_{x^T}X,Y) + g(X,\nabla_{x^T}Y) - g(\nabla_{x^T}X,Y) \\ &\quad + g(X+\varepsilon\rho AX,Y) - g(X,\nabla_{x^T}Y) + g(X,Y+\varepsilon\rho AY) \\ &= g(X,Y) + \varepsilon\rho g(AX,Y) + g(X,Y) + \varepsilon\rho g(X,AY) \\ &= 2g(X,Y) + 2\varepsilon\rho g(AX,Y).\end{aligned} \tag{10}$$

另一方面, 由孤立子方程知

$$(\mathcal{L}_{x^T}g)(X,Y) = 2\lambda g(X,Y) - 2Ric(X,Y).$$

故

$$Ric(X,Y) = (\lambda-1)g(X,Y) - \varepsilon\rho g(AX,Y).$$

再证充分性. 设对流形 M 上任意的光滑切向量场 X, Y, 有

$$Ric(X,Y) = (\lambda-1)g(X,Y) - \varepsilon\rho g(AX,Y).$$

注意到 (10) 式依然成立, 结合上式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{x^T}g)(X,Y) &= g(X,Y) + \varepsilon\rho g(AX,Y) \\ &= -Ric(X,Y) + \lambda g(X,Y),\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{x^T}g + Ric = \lambda g.$$

从而 (M,g,x^T,λ) 是 Ricci 孤立子.

定理 设 $x:(M,g)\to(\mathbb{E}_1^{n+1},\tilde{g})$ 是从 n 维伪黎曼流形 M 到 $n+1$ 维 Lorentz 空间 $\mathbb{E}_1^{n+1}$ 的等距浸入. 假设 M 具有可对角化的形状算子 A, 且 (M,g,x^T,λ) 是 Ricci 孤立子, 其中 x^T 为位置向量场 x 的切向部分, 则超曲面 M 至多有两个不同的主曲率.

证明 由于超曲面 M 的形状算子可对角化, 故存在局部标准正交标架场 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 使得 $Ae_i = a_ie_i$, $i=1,2,\cdots,n$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 M 上的光滑函数. 计算得 $trA = a_1+a_2+\cdots+a_n$, 结合 $H=\frac{1}{n}trA$, 有 $H=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. 故由 (4) 式得

$$\begin{cases} Ric(e_1,e_1) = -\varepsilon a_1 \Sigma_{k=2}^{n} a_k, \\ \\ Ric(e_i,e_i) = a_i \sum\limits_{k\neq i} a_k,\ i=2,\cdots,n. \end{cases} \tag{11}$$

另一方面, 利用 (9) 式计算得

$$\begin{cases} Ric(e_1,e_1) = \varepsilon(1-\lambda) + \rho a_1, \\ \\ Ric(e_i,e_i) = \lambda - 1 - \varepsilon\rho a_i,\ i=2,\cdots,n. \end{cases} \tag{12}$$

对比 (11) 式及 (12) 式得

$$\lambda - 1 - \varepsilon\rho a_i = a_i \sum_{k\neq i} a_k,\ i=1,\cdots,n.$$

由上式可知

$$(a_i - a_j)(\sum_{k\neq i,j} a_k + \varepsilon\rho) = 0.$$

若超曲面 M 至多具有 3 个或 3 个以上不同主曲率, 不妨设 a_1, a_2, a_3 互不相等, 取上式中 $i=1,\ j=2,3$, 有

$$\sum_{k\neq 1,2} a_k = -\varepsilon\rho, \tag{13}$$

和

$$\sum_{k\neq 1,3} a_k = -\varepsilon\rho. \tag{14}$$

(13) 式等号的左右两侧分别减去 (14) 式等号的左右两侧, 得 $a_2 = a_3$, 矛盾. 故超曲面 M 至多有两个不同的主曲率.

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (11761061), 甘肃省科技计划项目(20JR5RA515), 西北师范大学青年教师科研能力提升项目(NWNU-LKQN2019-23).

参考文献

[1] Alsodias, H., Alodan, H. and Deshmukh, H. (2015) Hypersurfaces of Euclidean Space as Gradient Ricci Solitons. *Analeleştiinţifice ale Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi. Matematică (Serie nouă)*, **61**, 437-444.

[2] Aquino, C., De Lima, H. and Gomes, J. (2017) Characterizations of Immersed Gradient Almost Ricci Solitons. *Pacific Journal of Mathematics*, **288**, 289-305. https://doi.org/10.2140/pjm.2017.288.289

[3] Brozos-Vazquez, M., Calvaruso, G., Garcia-Rio, E., *et al.* (2012) Three-Dimensional Lorentzian Homogeneous Ricci Solitons. *Israel Journal of Mathematics*, **188**, 385-403. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0124-3

[4] Chen, B.Y. (2002) Geometry of Position Functions of Riemannian Submanifolds in Pseudo-Euclidean Space. *Journal of Geometry*, **74**, 61-77. https://doi.org/10.1007/PL00012538

[5] Chen, B.Y. (2017) Topics in Differential Geometry Associated with Position Vector Fields on Euclidean Submanifolds. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **23**, 1-17. https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2016.08.001

[6] Chen, B.Y. (2017) Euclidean Submanifolds via Tangential Components of Their Position Vector Fields. *Mathematics*, **5**, Article 51. https://doi.org/10.3390/math5040051

[7] Chen, B.Y. and Deshmukh, S. (2014) Classification of Ricci Solitons on Euclidean Hypersurfaces. *International Journal of Mathematics*, **25**, Article ID: 1450104. https://doi.org/10.1142/S0129167X14501043

[8] Chen, B.Y. and Deshmukh, S. (2015) Ricci Solitons and Concurrent Vector Fields. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, **20**, 14-25.

[9] Chen, B.Y. (2015) Some Results on Concircular Vector Fields and Their Applications to Ricci Solitons. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **52**, 1535-1547. https://doi.org/10.4134/BKMS.2015.52.5.1535

[10] Chen, B.Y. and Deshmukh, S. (2014) Geometry of Compact Shrinking Ricci Solitons. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, **19**, 13-21.

[11] Demirci, B.B. (2022) Ricci Solitons on Pseudo-Riemannian Hypersurfaces of 4-Dimensional Minkowski Space. *Journal of Geometry and Physics*, **174**, Article ID: 104451. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104451

[12] Magid, M. (1985) Lorentzian Isoparametric Hypersurfaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **118**, 165-197. https://doi.org/10.2140/pjm.1985.118.165

[13] Huang, S.S. (2020) ε-Regularity and Structure of Four-Dimensional Shrinking Ricci Solitons. *International Mathematics Research Notices*, **5**, 1511-1574. https://doi.org/10.1093/imrn/rny069

[14] Kang, Y.T. and Kim, J.S. (2022) Gradient Ricci Solitons with Half Harmonic Weyl Curvature and Two Ricci Eigenvalues. *Communications of the Korean Mathematical Society*, **37**, 585-594.

[15] Shaikh, A.A. and Mondal, C.K. (2021) Isometry Theorem of Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Journal of Geometry and Physics*, **163**, 393-440. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104110

[16] Willmore, T.J. (1960) The Definition of Lie Derivative. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **12**, 27-29. https://doi.org/10.1017/S0013091500025013