Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2189-2195
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212235

几类三阶非线性微分方程的解

黄焕鑫，刘玉彬*
惠州学院数学与统计学院，广东 惠州

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月30日

摘 要

本文讨论了几类三阶非线性微分方程的求解问题。通过综合运用变量变换和降阶的思想方法建立了方程的通解表达式。

关键词

三阶微分方程，非线性微分方程，解

Solutions of Several Third-Order Nonlinear Differential Equations

Huanxin Huang, Yubin Liu*
School of Mathematics and Statistics, Huizhou University, Huizhou Guangdong

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

This paper discusses several classes of third-order nonlinear differential equations. By using of variable transformation and order reduction, the general solution expression of the equations is established.

Keywords

Third-Order Differential Equations, Nonlinear Differential Equations, Solution

*通讯作者。

文章引用: 黄焕鑫, 刘玉彬. 几类三阶非线性微分方程的解[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2189-2195.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212235

1. 引言

高阶微分方程的求解是微分方程理论中一个重要的问题。一般情况下无法给出高阶微分方程的通解表达式，特别是对于非线性高阶微分方程。因此，寻找一些可积的非线性高阶微分方程类型是个有趣的课题。至今有不少学者在这方面做出了不少结果，提出了各种有效的方法。如不变量解法[1] [2] [3]、算子解法[4]、常数变易法[5] [6] [7]、降阶法[8] [9] [10] [11] [12]等等。

变量变换是求解微分方程的重要思想方法。文献[13]通过多次运用线性代换，将四阶非微分方程转化成变量分离的微分方程或是一阶非齐次线性微分方程，进而求出方程的通解；文献[14]中，通过两次线性变换，将三阶变系数微分方程转化为变量分离的微分方程或是二阶常系数微分方程。更多运用变量变换的思想方法求解微分方程的工作见文献[15] [16] [17] [18] [19]及其中的参考文献。

本文运用变换思想结合伯努利方程、恰当方程等特殊方程的求解方法，给出了几类新的可积三阶非线性微分方程并给出其通解公式。本文的结构安排如下：第二节考虑 4 类三阶非线性微分方程的求解问题，建立方程的通解表达式；第三节通过例子说明第二节所得结果在具体方程求解中的运用。

2. 主要结果

本节给出几类新的可积的三阶非线性微分方程及其通解表达式。

定理 1 若存在连续函数 $r(x),Q(x)$，及二阶连续可导函数 $p(x)$，使得

$$A(x)=p(x)+Q(x)+1,$$

$$B(x)=2p'(x)+p(x)+p(x)Q(x)+Q(x),$$

$$C(x)=p''(x)+p'(x)+p'(x)Q(x)+p(x)Q(x),$$

$$f(x,y,y',y'')=r(x)\left[y''+\left(p(x)+1\right)y'+\left(p'(x)+p(x)\right)y\right]^n,$$

则方程

$$y'''+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=f(x,y,y',y''). \tag{1}$$

的通解为：

$$y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{x}\left[\mathrm{e}^{\int (n-1)Q(x)\mathrm{d}x}\left(\int (1-n)r(x)\mathrm{e}^{\int (1-n)Q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}\mathrm{d}x+c_2\right]\right\}\mathrm{d}x+c_3\right\},$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数。

证明：将微分方程(1)变形为：

$$\frac{\mathrm{d}\left[\left(y'+p(x)y\right)'+\left(y'+p(x)y\right)\right]}{\mathrm{d}x}+Q(x)\left[\left(y'+p(x)y\right)'+\left(y'+p(x)y\right)\right]$$
$$=r(x)\left[\left(y'+p(x)y\right)'+\left(y'+p(x)y\right)\right]^n.$$

令 $y'+p(x)y=z$，则上述方程可转化为：

$$\frac{\mathrm{d}(z'+z)}{\mathrm{d}x}+Q(x)(z'+z)=r(x)(z'+z)^n.$$

再令 $z'+z=u$，则有

$$u'+Q(x)u=r(x)u^n.$$

该方程是伯努利方程，因此其解可表示为：

$$u=\left[\mathrm{e}^{\int(n-1)Q(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)r(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)Q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

其中 c_1 是任意常数。

再由方程 $z'+z=u$ 及 $y'+p(x)y=z$ 易得方程(1)的通解：

$$y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\left[\int\mathrm{e}^{x}\left[\mathrm{e}^{\int(n-1)Q(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)r(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)Q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}\mathrm{d}x+c_2\right]\right\}\mathrm{d}x+c_3\right\},$$

其中 c_2,c_3 为任意常数。

定理 2 若 $p(x)$ 存在连续二阶导数，n 是一正整数，则三阶微分方程

$$\frac{1}{n}(y'+p(x)y)^{\frac{1}{n}-2}\left\{(y'+p(x)y)\left[y'''+(1+p(x))y''+(2p'(x)+p(x))y'+(p'(x)+p''(x))y\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}-1\right)\left[y''+p(x)y'+p'(x)y\right]^2\right\}=f\left\{\frac{1}{nx}\left[y'+p(x)y\right]^{\frac{1}{n}-1}\left[y''+p(x)y'+p'(x)y\right]+\frac{1}{x}\left[y'+p(x)y\right]^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

通解为：

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int\mathrm{e}^{x}u\mathrm{d}x+c_2\right]^n\mathrm{d}x+c_3\right\}, \\ \int\dfrac{1}{f\left(\dfrac{u}{x}\right)-\dfrac{u}{x}}\mathrm{d}\dfrac{u}{x}=\ln|x|+c_1. \end{cases}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数。

证明：三阶微分方程可变为：

$$\frac{\mathrm{d}\left\{\left[(y'+p(x)y)^{\frac{1}{n}}\right]'+(y'+p(x)y)^{\frac{1}{n}}\right\}}{\mathrm{d}x}=f\left\{\frac{1}{x}\left[(y'+p(x)y)^{\frac{1}{n}}\right]'+\frac{1}{x}(y'+p(x)y)^{\frac{1}{n}}\right\}. \tag{2}$$

令 $y'+p(x)y=z^n$，方程(2)可转化为：

$$\frac{\mathrm{d}(z'+z)}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{1}{x}(z'+z)\right). \tag{3}$$

再令 $z'+z=u$，方程(3)变为：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{u}{x}\right). \tag{4}$$

令 $u = wx$，方程(4)变为：

$$\int \frac{1}{f(w)-w}\mathrm{d}w = \ln|x| + c_1, \text{其中} c_1 \text{为任意常数.}$$

所以：

$$\int \frac{1}{f\left(\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}}\mathrm{d}\frac{u}{x} = \ln|x| + c_1, \text{其中} c_1 \text{为任意常数.}$$

对于方程 $z' + z = u$，求得通解：

$$z = \mathrm{e}^{-x}\left[\int\left(u\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x + c_2\right], \text{其中} c_2 \text{为任意常数.}$$

代入到 $y' + p(x)y = z^n$ 中求得：

$$y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int u\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + c_2\right]^n \mathrm{d}x + c_3\right\}, \text{其中} c_3 \text{为任意常数.}$$

则原方程的解是：

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{f\left(\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}}\mathrm{d}\frac{u}{x} = \ln|x| + c_1, \\ y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\displaystyle\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int u\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + c_2\right]^n \mathrm{d}x + c_3\right\}. \end{cases}$$

定理 3 若 $p(x)$ 有连续二阶导数，$q(x), r(x)$ 是连续函数，n 是一正整数，则三阶微分方程

$$\frac{1}{n}\left(y' + p(x)y\right)^{\frac{1}{n}-2}\left\{\left(y' + p(x)y\right)\left[y''' + \left(1 + p(x)\right)y'' + \left(2p'(x) + p(x)\right)y' + \left(p'(x) + p''(x)\right)y\right]\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left[y'' + p(x)y' + p'(x)y\right]^2\right\}$$
$$= q(x)\left\{\frac{1}{n}\left[y' + p(x)y\right]^{\frac{1}{n}-1}\left[y'' + p(x)y' + p'(x)y\right] + \left[y' + p(x)y\right]^{\frac{1}{n}}\right\} + r(x).$$

的通解是：

$$y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{x}\left[\mathrm{e}^{\int q(x)\mathrm{d}x}\left(\int r(x)\mathrm{e}^{\int -q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_1\right)\right] + c_2\right]\right\}^n + c_3\right\}, \text{其中} c_1, c_2, c_3 \text{为任意常数.}$$

证明：微分方程可转化为：

$$\frac{\mathrm{d}\left\{\left[\left(y' + p(x)y\right)^{\frac{1}{n}}\right]' + \left(y' + p(x)y\right)^{\frac{1}{n}}\right\}}{\mathrm{d}x} = q(x)\left\{\left[\left(y' + p(x)y\right)^{\frac{1}{n}}\right]' + \left(y' + p(x)y\right)^{\frac{1}{n}}\right\} + r(x). \tag{5}$$

令 $y' + p(x)y = z^n$，方程(5)可转化为：

$$\frac{\mathrm{d}(z' + z)}{\mathrm{d}x} = q(x)(z' + z) + r(x). \tag{6}$$

再令 $z' + z = u$，方程(6)变为：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=q(x)u+r(x). \tag{7}$$

求得方程(7)的解：

$$u=\mathrm{e}^{\int q(x)\mathrm{d}x}\left(\int r(x)\mathrm{e}^{\int -q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right),\text{其中}c_1\text{为任意常数.}$$

代入方程 $z'+z=u$，求得：

$$z=\mathrm{e}^{-x}\left\{\int \mathrm{e}^{x}\left[\mathrm{e}^{\int q(x)\mathrm{d}x}\left(\int r(x)\mathrm{e}^{\int -q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)\right]+c_2\right\},\text{其中}c_2\text{为任意常数.}$$

最后代入到 $y'+p(x)y=z^n$ 中求得：

$$y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\mathrm{e}^{-x}\left[\int \mathrm{e}^{x}\left[\mathrm{e}^{\int q(x)\mathrm{d}x}\left(\int r(x)\mathrm{e}^{\int -q(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)\right]+c_2\right]\right\}^n\right\},\text{其中}c_3\text{为任意常数.}$$

定理 4 若 $p(x)$ 存在二阶连续导数，$\dfrac{\partial M(x,u)}{\partial u}=\dfrac{\partial N(x,u)}{\partial x}$ 成立，则三阶微分方程：

$$M\left[x,y''+(p(x)+1)y'+(p(x)+p'(x))y\right]+N\left[x,y''+(p(x)+1)y'+(p(x)+p'(x))y\right]$$
$$\left[y'''+(p(x)+1)y''+(p(x)+2p'(x))y'+(p'(x)+p''(x))y\right]=0.$$

的通解为：

$$\begin{cases}\int M(x,u)\mathrm{d}x+\int\left[N(x,u)-\dfrac{\partial}{\partial u}\int M(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=c_1,\\ y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int u\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c_2\right]\mathrm{d}x+c_3\right\}.\end{cases}\text{其中}c_1,c_2,c_3\text{为任意常数.}$$

证明： 令 $y''+(p(x)+1)y'+(p(x)+p'(x))y=u$，方程可化为：

$$M(x,u)\mathrm{d}x+N(x,u)\mathrm{d}u=0. \tag{8}$$

由于 $\dfrac{\partial M(x,u)}{\partial u}=\dfrac{\partial N(x,u)}{\partial x}$，则方程(8)是恰当微分方程，解为：

$$\int M(x,u)\mathrm{d}x+\int\left[N(x,u)-\frac{\partial}{\partial u}\int M(x,u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=c_1,\ c_1\text{为任意常数.}$$

又因为

$$y''+(p(x)+1)y'+(p(x)+p'(x))y=u. \tag{9}$$

令 $y'+p(x)y=z$，方程(9)变为：

$$z'+z=u. \tag{10}$$

方程(10)的解为：

$$z=\mathrm{e}^{-x}\left[\int\left(u\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x+c_2\right],c_2\text{为任意常数.}$$

代入到 $y'+p(x)y=z$ 中求得：

$$y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int u\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c_2\right]\mathrm{d}x+c_3\right\},$$

c_3 为任意常数。于是原方程解为：

$$\begin{cases}\int M(x,u)\,\mathrm{d}x+\int\left[N(x,u)-\dfrac{\partial}{\partial u}\int M(x,u)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u=c_1,\\ y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x}\int u\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c_2\right]\mathrm{d}x+c_3\right\}.\end{cases}$$

3. 应用例子

例 1 求解方程

$$y'''+\left(\frac{2}{x}+1\right)y''+\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)y'+\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)y=\frac{1}{x}\left[y''+\left(\frac{1}{x}+1\right)y'+\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)y\right]^2.$$

解：取 $p(x)=\frac{1}{x}, Q(x)=\frac{1}{x}, r(x)=\frac{1}{x}, p'(x)=-\frac{1}{x^2}, p''(x)=\frac{2}{x^3}$，显然 $p(x)$ 存在连续二阶导数，$r(x), Q(x)$ 是连续函数，则运用定理 1 求出其解：

$$y=\frac{1}{x}\left[\int x\mathrm{e}^{-x}\left(\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{1-c_1x}\mathrm{d}x+c_2\right)\mathrm{d}x+c_3\right], c_1,c_2,c_3\text{ 是任意常数.}$$

例 2 求解方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(y'+xy)^{-\frac{3}{2}}\left\{(y'+xy)\left[y'''+(1+x)y''+(2+x)y'+y\right]-\frac{3}{2}\left[y''+xy'+y\right]^2\right\}\\&=\frac{1}{x}\left[y'+xy\right]^{-\frac{3}{2}}\left[y''+xy'+y\right]+\frac{2}{x}\left[y'+xy\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

解：取 $p(x)=x, n=2$，由定理 2 得：

$$\begin{aligned}y=&c_1^2x^3-3c_1^2x-4c_1^2x^2+8c_1^2+4c_1^2x+4c_1x-8c_1^2+c_3+\int\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(3c_1^2-4c_1+2c_1c_2x^2\mathrm{e}^{-x}\right.\\&\left.-4c_1c_2x\mathrm{e}^{-x}+42c_1c_2\mathrm{e}^{-x}+c_2^2\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x,\text{ 其中 }c_1,c_2,c_3\text{ 是任意常数.}\end{aligned}$$

例 3 求解方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(y'+y)^{-\frac{3}{2}}\left\{(y'+y)\left[y'''+(1+x^2)y''+y'\right]-\frac{1}{2}(y''+y')^2\right\}\\&=\left\{\frac{1}{2}(y'+y)^{-\frac{1}{2}}(y''+y')+\frac{1}{x}(y'+y)^{\frac{1}{2}}\right\}+x.\end{aligned}$$

解：取 $p(x)=1, q(x)=1, r(x)=x$，显然 $p(x)$ 有连续二阶导数，$q(x), r(x)$ 是连续函数，则由定理 3 可得方程通解：

$$y=\frac{1}{12}c_1^2\mathrm{e}^{2x}-c_2^2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}c_1\mathrm{e}^{x}-c_2x^2\mathrm{e}^{-x}+c_3\mathrm{e}^{-x}+x^2-2x-\frac{1}{2}c_1x+c_1c_2,\text{ 其中 }c_1,c_2,c_3\text{ 为任意常数.}$$

例 4 求解方程

$$\frac{y''}{x^2}+\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)y'+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)y-1-\left[\frac{y'''}{x^3}+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)y''-\left(\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x^4}\right)y'+\left(\frac{4}{x^6}-\frac{3}{x^5}\right)y\right]=0.$$

解：取 $u=y''+\left(\frac{1}{x}+1\right)y'+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)y$，$M(x,u)=\frac{u}{x^2}-1$，$N(x,u)=-\frac{1}{x}$，且 $\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 成立，

则运用定理 4 求得三阶微分方程的解为：

$$y=-\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{3}c_1x^2-\frac{1}{2}c_1x-c_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{c_2\mathrm{e}^{-x}}{x}+\frac{c_3}{x},(c_1,c_2,c_3\text{是任意常数}).$$

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11601180)，惠州学院自然科学基金项目(hzu201806)。

参考文献

[1] 汤光宋, 原存德, 董巨清. 非线性方程的新不变量组及其应用[J]. 山西师范大学学报, 1993(1): 8-12.
[2] 赵临龙. 三阶变系数线性微分方程的不变量及可积类型[J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 1999, 12(1): 12-15.
[3] 魏春强, 赵临龙. 一类三阶变系数常微分方程解法的推广[J]. 甘肃教育学院学报(自然科学版), 1999, 13(3): 14-16.
[4] 贾尔肯, 沙吾列. 三阶线性微分算子的分解及其应用[J]. 昌吉学院学报, 2005(3): 113-115.
[5] 郭晓晔. 求解三阶非齐次线性微分方程的常数变易法[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2017, 33(2): 92-94.
[6] 胡爱莲. 三阶常系数线性非齐次微分方程的常数变易解法[J]. 喀什师范学院学报, 2015, 36(3): 1-2.
[7] 汤光宋. 一类三阶常系数非齐次线性微分方程特解的求法[J]. 邵阳高专学报, 1995, 8(2): 118-119.
[8] 李文娟, 李书海, 汤获. 三阶常系数线性非齐次微分方程通解的降阶法[J]. 高等数学研究, 2018, 21(4): 59-61.
[9] 汤光宋. 三阶非线性微分方程的某些可积类型[J]. 昭通学院学报, 1991, 13(3): 17-19.
[10] 张敬, 周莉. 几种可降阶的三阶变系数齐次线性微分方程类型[J]. 高师理科学刊, 2007, 27(2): 1-2.
[11] 汤光宋, 徐林. 三阶三次微分方程的可积条件[J]. 承德民族职业技术学院学报, 2001, 6(3): 41-42.
[12] 胡爱莲. 三阶常系数线性非齐次微分方程特解的两种解法[J]. 喀什大学学报, 2017, 38(3): 1-3.
[13] 贾艳萍, 李录苹. 两类四阶非线性微分方程的解法[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2015, 31(4): 12-13.
[14] 李录苹. 三阶变系数常微分方程的三种可积类型[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2008, 24(1): 16-18.
[15] 虞继敏, 郑继明, 关中博. 变系数三阶线性微分方程的一种解法[J]. 高等数学研究, 2010, 13(3): 13-15.
[16] 刘琼. 关于三阶变系数线性微分方程的解[J]. 广西科学院学报, 2003, 19(1): 30-32.
[17] 孙瑞. 变系数微分方程的解法[J]. 九江学院学报(自然科学版), 2015, 30(1): 56-60.
[18] 王通, 赵晓文. 三阶变系数齐线性微分方程的一种可积类型[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 1996, 12(3): 32-34.
[19] 张学元. 变系数三阶线性微分方程的一个新的可解类型[J]. 上海第二工业大学学报, 2003, 20(2): 1-6.