Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2204-2208
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212237

Hans汉斯

一类单边加权移位算子的M-亚正规判断

代沐轩，肖承伯，曾东阳，王一迪

辽宁师范大学，辽宁 大连

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月30日

摘 要

我们一般通过定义判断一个算子是否为M-亚正规算子，但证明过程较复杂。本文基于现有结论及M-亚正规算子的定义，借助谱半径、级数敛散性、矩阵乘积运算、范数计算等基础知识，得出了以有界正数序列$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}=\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$为权序列的单边加权移位算子不为$M$-亚正规算子的两类情况，结论如下：**1)** 若α,β,γ中有两个数相等且异于第三个数，则T不是M-亚正规算子。**2)** 若序列中的α,β,γ满足$\beta^2-\alpha^2+\left(\gamma^2-\beta^2\right)\beta^2\left(\alpha\beta\gamma\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\beta^2\gamma^2\left(\alpha\beta\gamma\right)^{\frac{4}{3}}<0$，则$T$不是$M$-亚正规算子。本文提出的定理为判断一种特定类型算子是否为M-亚正规算子提供了更简单的方式。

关键词

M-亚正规算子，有界正数周期权序列，加权移位算子

M-Hyponormal Judgment of a Class of Unilateral Weighted Shift Operators

Muxuan Dai, Chengbo Xiao, Dongyang Zeng, Yidi Wang

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

We generally use the definition to judge whether an operator is M-hyponormal operator, but the process of proof is more complicated and difficult. In this paper, based on the existing conclusions and the definition of M-hyponormal operator, using the basic knowledge of spectral radius, series convergence and divergence, matrix product operation, norm calculation, etc., we obtain two kinds of cases in which the unilateral weighted shift operator with bounded positive sequence

文章引用: 代沐轩, 肖承伯, 曾东阳, 王一迪. 一类单边加权移位算子的 M-亚正规判断[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2204-2208. DOI: 10.12677/pm.2022.1212237

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}=\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ **as weight sequence is not *M*-hyponormal operator, the conclusions are as follows: 1) If two numbers in α,β,γ are equal and different from the third number, then *T* is not a *M*-hyponormal operator. 2) If the α,β,γ satisfy $\beta^2-\alpha^2+(\gamma^2-\beta^2)\beta^2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{2}{3}}+(\alpha^2-\beta^2)\beta^2\gamma^2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{4}{3}}<0$, then *T* is not a *M*-hyponormal operator. The theorem presented in this paper provides a more convenient way to judge whether a particular type of operator is *M*-hyponormal operator.**

Keywords

***M*-Hyponormal Operators, Bounded Positive Periodic Weighted Sequence, Weighted Shift Operator**

1. 引言

关于 M-亚正规算子已有不少讨论([1]-[10])。其中，关于 M-亚正规算子的判断，有学者已研究出：若 W_α 是一个以 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为权序列的加权移位算子，W_α 是 M-亚正规算子当且仅当权序列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 最终单调递增[1]。这给出了一种基于单调性判断的 M-亚正规算子判定方式，但若权序列非最终单调递增，M-亚正规算子的判断又变得相对复杂。因此，该学者又进一步研究了一种非最终单调递增权序列对应的加权移位算子，得到了一条新的定理，定理内容是：设 $T=W_\alpha$ 是权序列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的加权移位，如果 α_n 恰好有两个子列极限，且较大的极限与 T 的谱半径 $r(T)$ 不同，则 T 不是 M-亚正规的[1]。基于这个定理，我们考虑单边加权移位算子

$$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&&&&&\\\beta&0&&&&\\&\gamma&0&&&\\&&\beta&\ddots&&\\&&&\gamma&0&\\&&&&\ddots&0\end{pmatrix}$$

易知该单边加权移位算子的权序列恰好有两个子列极限 β,γ，满足定理使用条件。经计算, W_α 的谱半径 $r(W_\alpha)=\sqrt{\beta\gamma}$，因此根据上述定理，$W_\alpha$ 是 M-亚正规算子当且仅当 $r(W_\alpha)=\max\{\beta,\gamma\}$，即 W_α 是 M-亚正规算子当且仅当 $\beta=\gamma$。由此我们得到结论：

结论：$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&&&&&\\\beta&0&&&&\\&\gamma&0&&&\\&&\beta&\ddots&&\\&&&\gamma&0&\\&&&&\ddots&0\end{pmatrix}$ 是 M-亚正规算子当且仅当 $\beta=\gamma$ [1]。

基于上述结论，本文考虑了以有界正数序列 $\alpha_n:\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 为权序列的单边加权移位算子

$$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0\\ \alpha&0&\cdots&\cdots&0\\ 0&\beta&0&\cdots&0\\ 0&0&\gamma&0&\cdots\\ 0&0&0&\ddots&0\end{pmatrix}$$

并对其是否为 M-亚正规算子进行了研究。

2. 预备知识

设 $L(H)$ 是复可分 Hilbert 空间 H 上有界线性算子构成的代数空间。如果算子 $T\in L(H)$ 满足 $T^*T=TT^*$，则称该算子是正规的。如果算子 $T\in L(H)$ 满足对所有 $\lambda\in C$ 及 $x\in H$ 有 $\exists M,\text{s.t.}\left\|(T-\lambda)^*x\right\|^2\le M^2\left\|(T-\lambda)x\right\|^2$ 成立，则该算子是 M-亚正规的。

定理：设 $T=W_\alpha$ 是权序列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ 的加权移位，如果 α_n 恰好有两个子列极限，且较大的极限与 T 的谱半径 $r(T)$ 不同，则 T 不是 M-亚正规的[1]。

3. 结果

考虑有界正数权序列 $\alpha_n:\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots,T=W_\alpha$ 是以 α_n 为权序列的加权移位，即

$$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0\\ \alpha&0&\cdots&\cdots&0\\ 0&\beta&0&\cdots&0\\ 0&0&\gamma&0&\cdots\\ 0&0&0&\ddots&0\end{pmatrix}$$

关于其是否为 M-亚正规算子，我们得到的主要定理如下：

定理 1：当 $\alpha=\beta\ne\gamma$ 或 $\alpha=\gamma\ne\beta$ 或 $\beta=\gamma\ne\alpha$ 时，W_α 不是 M-亚正规算子。

证明：

如果 $\alpha=\beta\ne\gamma$，简单计算得

$$r(T)=\lim_k\sup_n\left|\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_{n+i}\right|^{\frac{1}{k}}=\alpha^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}<\max\{\alpha,\gamma\}.$$

由预备知识中的定理可得，此时 W_α 不是 M-亚正规算子。

相同方法可得，$\alpha=\gamma\ne\beta$ 及 $\beta=\gamma\ne\alpha$ 时，W_α 均不是 M-亚正规算子。

定理 2：令 $T\equiv W_\alpha$ 是以 $\alpha_n:\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 为权序列的单边加权移位算子，$\alpha\ne\beta\ne\gamma$，如果权序列中的 α,β,γ 满足 $\beta^2-\alpha^2+\left(\gamma^2-\beta^2\right)\beta^2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{2}{3}}+\left(\alpha^2-\beta^2\right)\beta^2\gamma^2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{4}{3}}<0$，那么 T 不是 M-亚正规算子。

证明。

定义 $x_0=1$，$x_n=\frac{1}{\lambda^n}\prod_{j=0}^{n-1}\alpha_j$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|<\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$。

$\left|\frac{1}{\lambda}\right|<\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ 时，$\sum_{n=0}^\infty|x_n|^2$ 收敛，因此对 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|<\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$，$x=\sum_{n=0}^\infty x_ne_n\in l^2$。

简单计算得

$$M^2\|(T-\lambda)x\|^2-\|(T-\lambda)^*x\|^2$$
$$=M^2\left(|\lambda x_0|^2+\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n x_n-\lambda x_{n+1}|^2\right)-\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n x_{n+1}-\bar{\lambda}x_n|^2$$
$$=(M^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n x_n-\lambda x_{n+1}|^2+\alpha_0^2|x_0|^2+(M^2-1)|\lambda x_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n^2-\alpha_{n-1}^2||x_n|^2.$$

进一步化简可得

$$M^2\|(T-\lambda)x\|^2-\|(T-\lambda)^*x\|^2$$
$$=(M^2-1)\lambda^2+\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)\sum_{j=0}^{\infty}|x_{3j+1}|^2+(\gamma^2-\beta^2)\sum_{j=0}^{\infty}|x_{3j+2}|^2+(\alpha^2-\gamma^2)\sum_{j=0}^{\infty}|x_{3j+3}|^2$$
$$=(M^2-1)\lambda^2+\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha\beta\gamma)^j\alpha}{\lambda^{3j+1}}\right|^2+(\gamma^2-\beta^2)\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha\beta\gamma)^j\alpha\beta}{\lambda^{3j+2}}\right|^2+(\alpha^2-\gamma^2)\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha\beta\gamma)^{j+1}}{\lambda^{3j+3}}\right|^2 \quad (1.1)$$
$$=(M^2-1)\lambda^2+\alpha^2+\left[(\beta^2-\alpha^2)+(\gamma^2-\beta^2)\frac{\beta^2}{\lambda^2}+(\alpha^2-\gamma)^2\frac{\beta^2\gamma^2}{\lambda^4}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha\beta\gamma)^j\alpha}{\lambda^{3j+1}}\right|^2.$$

令

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=(\beta^2-\alpha^2)+(\gamma^2-\beta^2)\frac{\beta^2}{\lambda^2}+(\alpha^2-\gamma^2)\frac{\beta^2\gamma^2}{\lambda^4}.$$

此时取 $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}-\delta<\frac{1}{\lambda}<\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ 。

当 $\frac{1}{\lambda}\to\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ 时，$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{(\alpha\beta\gamma)^j\alpha}{\lambda^{3j+1}}\right|^2$ 发散，$f\left(\frac{1}{\lambda}\right)<0$

由(1.1)

$$M^2\|(T-\lambda)x\|^2-\|(T-\lambda)^*x\|^2<0.$$

因此，T 不是 M-亚正规算子。

应用举例：

1. 设

$$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&&&&&&&\\1&0&&&&&&\\&2&0&&&&&\\&&3&0&&&&\\&&&1&0&&&\\&&&&2&0&&\\&&&&&3&0&\\&&&&&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}:l^2\to l^2.$$

由于 $2^2-1^2+(3^2-2^2)2^2(1\times2\times3)^{\frac{2}{3}}+(1^2-2^2)2^23^2(1\times2\times3)^{\frac{4}{3}}<0$ 。

根据定理 2，W_α 不是 M-亚正规算子。

2. 设

$$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&&&&&&&\\9&0&&&&&&\\&3&0&&&&&\\&&1&0&&&&\\&&&9&0&&&\\&&&&3&0&&\\&&&&&1&0&\\&&&&&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}:l^2\to l^2.$$

由于 $3^2-9^2+\left(1^2-3^2\right)3^2\left(9\times3\times1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(9^2-3^2\right)3^2 1^2\left(9\times3\times1\right)^{\frac{4}{3}}>0$。

根据定理 2，W_α 是 M-亚正规算子。

猜想 3：给定一个有界正数序列 $\alpha_n:\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$，$W_\alpha=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0\\\alpha&0&\cdots&\cdots&0\\0&\beta&0&\cdots&0\\0&0&\gamma&0&\cdots\\0&0&0&\ddots&0\end{pmatrix}$ 是以 α_n 为权序列的单边加权移位算子，猜想 W_α 是 M-亚正规的，当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$。

4. 结语

本文得出了以 $\alpha_n:\alpha,\beta,\gamma,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 为权序列的单边加权移位算子是否为 M-亚正规的两种判断方式。并基于所得结论，提出猜想：此类加权移位算子为 M-亚正规算子当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$。关于猜想是否成立，还需要进一步证明。

基金项目

大学生创新训练计划项目(X202210165167)。

参考文献

[1] Ham, J.S., Lee, S.H. and Lee, W.Y. (2003) On M-Hyponormal Weighted Shifts. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **286**, 116-124.

[2] 崔璞玉, 李佳, 冯琳颖. Toeplitz 算子的双正规性和 M-亚正规性[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2022(3): 45.

[3] 葛斌, 周庆梅. M-亚正规权移位算子与可亚正规权移位算子的一些注记[J]. 数学季刊(英文版), 2014, 29(3): 107-113.

[4] Jeon, I.H., Ko, E. and Lee, H.Y. (2001) Weyl's Theorem for f (T) When *T* Is a Dominant Operator. *Glasgow Mathematical Journal*, **43**, 359-363. https://doi.org/10.1017/S0017089501030154

[5] Uchiyama, A. and Yoshino, T. (2001) Weyl's Theorem for *p*-Hyponormal or *M*-Hyponormal Operators. *Glasgow Mathematical Journal*, **43**, 375-381. https://doi.org/10.1017/S0017089501030014

[6] Yang, Y. (1998) Some Results on Dominant Operators. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **21**, 217-220. https://doi.org/10.1155/S0161171298000313

[7] 侯晋川. 关于 M-亚正规算子的一些结果(英文) [J]. 数学研究与评论, 1984, 4(2): 101-103.

[8] 李绍宽, 陈晓漫. 关于 M-亚正常算子[J]. 复旦学报: 自然科学版, 1989, 28(2): 7.

[9] Li, S.K. and Chen, X.M. (1989) M-Hyponormal Operators. *J. Fudan Univ. Nat. Sci*, **28**, 141-147.

[10] Moore, R.L., Rogers, D.D. and Trent, T.T. (1981) A Note on Intertwining *M*-Hyponormal Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **83**, 514-516. https://doi.org/10.2307/2044108