Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 233-239
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122027

完全二部图$K_{p,p}$的边传递亚循环正则覆盖

黄兆红

鲁东大学数学与统计科学学院，山东 烟台

收稿日期：2021年12月20日；录用日期：2022年1月22日；发布日期：2022年1月29日

摘 要

刻画对称图的正则覆盖是代数图论的基本问题之一，它常常是刻画一般对称图的关键环节。完全二部图作为典型的对称图类，作为正规商图出现在很多传递图类的研究中。本文利用有限群论的技巧和陪集图的相关性质，刻画了2p阶完全二部图的边传递部分亚循环覆盖，并且构造了一类完全二部图的边传递初等交换覆盖。本文的结果将部分亚循环群的覆盖归为幂零群的覆盖问题，将对一般亚循环覆盖的研究起到一定的促进作用。

关键词

完全二部图，正则覆盖，边传递图

Edge-Transitive Metacyclic Regular Covers of the Complete Bipartite Graph $K_{p,p}$

Zhaohong Huang

School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai Shandong

Received: Dec. 20th, 2021; accepted: Jan. 22nd, 2022; published: Jan. 29th, 2022

Abstract

Characterizing regular covers of symmetric graphs is one of the fundamental topics in the field of algebra graph theory, and is often a key step for approaching general symmetric graphs. Complete bipartite graphs, as typical symmetric graphs and normal quotient graphs, appear in many studies of transitive graphs. In this paper, we characterize the edge transitive partial metacyclic covers of complete bipartite graphs of order 2p, and we construct the edge transitive elementary abelian cover of complete bipartite graphs by using the techniques of finite group theory and the related properties of coset graphs. The results of this paper classify the cover of some metacyclic groups as the cover problem of nilpotent groups, which will promote the study of the general metacyclic cover.

文章引用: 黄兆红. 完全二部图 $K_{p,p}$ 的边传递亚循环正则覆盖[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 233-239.
DOI: 10.12677/pm.2022.122027

Keywords

The Complete Bipartite Graph, Regular Cover, Edge-Transitive Graph

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

1938 年，R. Frucht 证明了对于任意给定的抽象群，都存在一个图以它为自同构群。此项工作揭开了群与图(代数图论)研究的帷幕。近几十年来，代数图论的研究出现了快速的发展，并在计算机网络、密码学、原子物理学、结构化学等众多学科中有很好的应用。研究传递图的一个典型方法是利用图的自同构群的正规子群做正规商图。而基图的覆盖的研究常常成为刻画一般传递图类的“关键”环节，成为了代数图论学科最重要的、最根本的研究方向。经过众多学者的研究，逐渐形成了一套建立在电压图技术上的图的“覆盖理论”。应用这些理论，一系列小阶数对称图的循环和初等交换正则覆盖被完全确定。

经过众多学者的研究，逐渐丰富基图的覆盖图的研究方法和研究成果。应用电压图技术，一些小阶数对称图的循环和初等交换正则覆盖被完全确定。文献[1] [2] [3]等得到一些小阶数小度数对称图的初等交换覆盖。此外，文献[4] [5]等分类了完全图 K_n 和 $K_{n,n}-nK_2$ (完全二部图去掉一个完全匹配)的 2-弧传递循环和一些初等交换覆盖，其中 n 为任意大于等于 4 的正整数，并发现 2 类非常有趣的电压图类。

本文主要是刻画二倍素数阶完全二部图图类的边传递亚循环正则覆盖。

2. 已有结论及相关准备

2.1. 抽象群和群作用

设 G 是群，对任意的 $a,g\in G$，用 $a^g := g^{-1}ag$ 表示 a 在 g 下的共轭。对于 G 的子群 H，用 $H^g := g^{-1}Hg$ 表示 H 在 g 下的共轭子群。

我们用 $End(G)$表示 G 的全体自同态作成的环，用 $Aut(G)$表示 G 的全体自同构作成的自同构群，用 $Inn(G)$表示 G 的全体内自同构作成的群。众所周知：$Inn(G)$为 $Aut(G)$的正规子群，且 $Inn(G)\cong G/Z(G)$，其中 $Z(G)$为 G 的中心。

下面介绍群的正规化子和中心化子的概念。

定义 2.1 设 H 为群 G 的子群，则称 $N_G(H)=\{g\in G \mid H^g=H\}$ 为 H 在 G 中的中心化子，称 $C_G(H)=\{g\in G \mid h^g=h,\forall h\in H\}$ 为 H 在 G 中的中心化子。

关于正规化子和中心化子，下面是重要且基础的“N/C”定理。

定理 2.1 [6]设 $H\le G$，则 $N_G(H)/C_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$的一个子群。

定义 2.2 设 G 为一个群，若 G 有一个正规子群 N 使得 $G/N\cong K$，则称 G 为 N 被 K 的扩张，记为 $G=N.K$。如果 G 的两个子群 N，K 满足条件：$G=NK$，$N\lhd G$，$K\le G$ 且 $N\cap K=1$，那么称群 G 为 N 与 K 的半直积，记作 $G=N:K$。特别地，若 K 也是 G 的正规子群，则 G 是子群 N 与 K 的直积，记作 $G=N\times K$。

设 G 为一个有限群，p 为整除群 G 的阶 $|G|$ 的一个素数，若 $p^n \mid |G|$ 但 p^{n+1} 不能整除 $|G|$，则记为 $p^n \parallel |G|$。

定理 2.2 [7]设 p 为素数。

第一 Sylow 定理：设 $p^n \,\|\, |G|$，则 G 中必存在 p^n 阶子群，称为 G 的 Sylow p-子群。

第二 Sylow 定理：G 的任意两个 Sylow} p-子群皆在 G 中共轭。

第三 Sylow 定理：G 中 Sylow p-子群的个数 n_p 是 $|G|$ 的因子，并且 $n_p \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$。

定义 2.3 设 N 是群 G 的子群，称 N 在 G 中有补，如果存在 G 的子群 K 使得 $G = NK$，并且 $N \cap K = 1$，这时称 K 为 N 在 G 中的补群。

定理 2.3 [7]设 N 是 G 的正规 Hall 子群，则

1) N 在 G 中有补；

2) 若 N 或 G/N 可解，H 和 H_1 是 N 在 G 中的两个补群，则在 N 存在元素 u 使 $H^u = H_1$。

定理 2.4 [7]设 G 是有限群，则下述命题等价：

1) G 是幂零群；

2) 若 $H < G$，则 $H < N_G(H)$；

3) G 的每个极大子群 M 都是 G 的正规子群，并且 $|G:M|$ 是素数；

4) G 的每个 Sylow 子群都是正规的，因而 G 是它的诸 Sylow 子群的直积。

定义 2.4 1) 设 G 是有限群，令 $\Phi(G)$ 表示 G 的所有极大子群的交，我们称 $\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群。

2) 设 G 为有限群，G 的所有幂零正规子群的乘积称为 G 的 Fitting 子群，它是 G 的最大幂零正规子群。

易知，群 G 的 Frattini 子群和 Fitting 子群都是 G 的特征子群。

定义 2.5 [7]设 Ω 为一个非空集合，Ω 中的元素称为点，S_Ω 表示 Ω 上的对称群。φ 称为群 G 在 Ω 上的一个作用，如果 φ 是 G 到 S_Ω 的一个同态。即 G 中每个元素 x 对应 Ω 上的一个变换 $\varphi(x):\alpha \to \alpha^x$，并且满足 $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}, x, y \in G, \alpha \in \Omega$。

如果 $Ker\varphi = 1$，称 G 忠实地作用在 Ω，此时 G 可看作 Ω 上的置换群. 如果 $Ker\varphi = G$，称 G 平凡地作用在 Ω 上。

定义 2.6 [7]设群 G 作用在集合 Ω 上，则对每个 $\alpha \in \Omega$，

$$G_\alpha = \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\}$$

是 G 的子群，称为点 α 的稳定子群。并且对任意的 $y \in G$，有 $G_{\alpha^y} = y^{-1} G_\alpha y$。

定义 2.7 1) 如果 G 作用在集合 Ω 上只有一个轨道，那么称 G 在 Ω 上传递。

2) 群 G 作用在集合 Ω 上称为半正则的，如果对每个 $\alpha \in \Omega$ 都有 $G_\alpha = 1$ 成立。传递的半正则群称为正则群。

3) 设 G 作用在集合 Ω 上，Δ 为 Ω 的一个子集，称 $G_\Delta = \{g \in G \mid \Delta^g = \Delta\}$ 为 G 在 Δ 上的稳定子群。

2.2. 图的已有结论

对于无向图 Γ 的两个顶点 u 和 v，用 $u \sim v$ 表示 u 与 v 邻接，用 $\Gamma(u)$ 表示所有与 u 邻接的点作成的集合。在本文分别用 $V\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$ 表示图 Γ 的顶点集，边集和弧集。

定义 2.8 设 L, R 是群 G 的两个子群，且 $L \cap R$ 在 G 中是 core-free 的。定义二部陪集图 $\Gamma = Cos(G, L, R)$，其中顶点集为 $[G:L] \cup [G:R]$ 且

$$\{Lx, Ry\} \in E\Gamma \Leftrightarrow yx^{-1} \in RL.$$

关于二部陪集图我们常用下面的两个引理。

引理 2.5 [8]群 G 的两个子群 L, R 满足 $L\cap R$ 在 G 中是 ore-free 的，则二部陪集图 $\Gamma=Cos(G,L,R)$ 有下列性质：

1) Γ 是连通的当且仅当 $\langle L,R\rangle=G$；

2) $G\le Aut\Gamma$，且 Γ 是 G-边传递和 G-点不传递；

3) $\Gamma(L)=\{Rx\mid x\in L\},\Gamma(R)=\{Lx\mid x\in R\}$；

4) $|\Gamma(u)|=|L:L\cap R|,|\Gamma(\omega)|=|R:L\cap R|$，其中 $u\in[G:L],\omega\in[G:R]$。

反过来，每个 G-边传递但不是 G-点传递图都同构于二部陪集图 $\Gamma=Cos(G,G_u,G_\omega)$，其中 u,ω 是邻接的两个点。

引理 2.6 [7]设 $\Gamma=Cos(G,L,R)$，其中 L,R 为 G 的子群，且 $L\cap R$ 在 G 中是 core-free 的。设存在 $\sigma\in Aut(G)$ 使得 σ 交换 L 和 R，或者稳定 L 和 R，则 σ 可以自然地诱导图 Γ 上的一个自同构。

特别地，如果 σ 交换 L 和 R，那么 Γ 是弧传递图。

定理 2.7 [9]设 Γ 为 X-点传递局部本原图，且 X 有一个正规子群 N 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道，则下列结论成立：

1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则，$X/N\le Aut(\Gamma_N)$，Γ_N 为 X/N-局部本原图，且 Γ 为 Γ_N 的 N-正则覆盖。

2) 为 (X,s)-弧传递图 $(s\ge 2)$ 当且仅当 Γ_N 为 $(X/N,s)$-弧传递图，其中 $1\le s\le 5$ 或 $s=7$；

3) $X_\alpha\cong(X/N)_\delta,\alpha\in V\Gamma,\delta\in V\Gamma_N$；

4) 如果 X 有一个正规子群 $M\subset N$，则 Γ_M 为 Γ_N 的 X/M-局部本原 N/M-正则覆盖。

定理 2.7 [10]设 Γ 是 $2p$ 阶对称图 Σ 的 Z_n-正则覆盖，其中 p 是素数且 $val(\Sigma)=r$ 是奇素数。设保纤群在 Γ 上是弧传递的，则

1) 当 $\Sigma\cong K_4$ 时，有 $n=2$，$\Gamma\cong K_{4,4}-4K_2$，或 $n=4$，$\Gamma\cong P(8,3)$ 是广义 Petersen 图；

2) 当 $\Sigma\cong O_2$ 时，有 $n=2$，Γ 是正十二面体或 O_2 的标准双覆盖；

3) 当 $\Sigma\cong K_{2p},p\ge 3,2p-1=r$ 时，有 $n=2$，$\Gamma\cong K_{2p,2p}-2pK_2$；

4) 当 $\Sigma\cong K_{p,p}$ 时，$\Gamma\cong Cos(G,\langle a\rangle,\langle b\rangle),CD(2pn,p,k)$ 或者 $CGD^{(1)}_{2pn,k,l},CGD^{(2)}_{2pn,k,l}$；

5) 当 $\Sigma\cong CD(2p,r),r\mid(p-1)$ 时，有 $n=r^s p_1^{r_1}\cdots p_t^{r_t}$，其中 $s\le 1,t\ge 0,p_1,p_2,\cdots,p_t$ 不相同的素数，使得对每个 $1\le i\le t$，都有 $r\mid p_i-1$，且

i) $\Gamma\cong CD(2pn,r,k)$ 是二面体群 D_{2pn} 上的正规 Cayley 图；或

ii) Γ 是广义二面体群 $Dih(Z_n\times Z_p)$ 上的正规弧传递 Cayley 图，其中 $p\mid n$。

定理 2.8 [11]设 Γ 是 $2p$ 阶对称图 Σ 的 K-正则覆盖，其中 p 是素数且 $val(\Sigma)=r$ 是奇素数，覆盖变换群 $K\cong Z_m.Z_q$ 为亚循环群但非循环群，且 $q<r$ 为素数。设保纤群在 Γ 上是弧传递的，则下述之一成立：

1) $\Sigma\cong K_4,K\cong D_{2m}$，其中 m 是奇数，Γ 如文献

2) $\Sigma\cong CD_{2p}$，其中 $3\mid(p-1),m=2\cdot 3^s p_1^{r_1}\cdots p_t^{r_t},s\le 1,t\ge 0,p_1,\cdots,p_t$ 是互不相同的素数，使得对每个 $1\le i\le t$，都有 $3\mid p_i-1,K\cong Z_{2m}\times Z_2$，且 $\Gamma\cong CGD\left(2,\frac{mp}{2},\lambda\right),\Gamma\cong CGD\left(2,\frac{m}{2p},\lambda\right),p\mid m$。

3) (Γ,K,Σ) 如下所示：

行	Γ	K	Σ	p	s-弧正则
1	CGD_{8p}	D_4	CD_{2p}	$p=3,p\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$	1-弧正则
2	F_{40}	D_4	O_2	$p=5$	3-弧正则
3	F_{60}	D_6	O_2	$p=5$	2-弧正则

Continued

4	F_{80}	Q_8	O_2	$p=5$	3-弧正则
5	F_{120B}	D_{12}	O_2	$p=5$	2-弧正则

3. 完全二部图 $K_{p,p}$ 的边传递亚循环正则覆盖

在这一节，我们将给出本文的主要结果和完全二部图的边传递交换正则覆盖的例子。

设 Γ 是完全二部图 Σ 的边传递 K-正则覆盖，其中 $\Sigma \cong K_{p,p}$， $K := \langle a\rangle.\langle b\rangle \cong Z_m.Z_n$，且 $(|K|, p)=1$。设 $X \le Aut(\Gamma)$， Γ 是 X-弧传递的。令 $Y := X/K \le Aut\Sigma$，且 Y 在 $K_{p,p}$ 上是弧传递的。设 Δ_1, Δ_2 是 $K_{p,p}$ 的两个部， $Y^+ := Y_{\Delta_1} = Y_{\Delta_2}$， $X^+ := K.Y^+$，则 $|X : X^+| = 2, |Y : Y^+| = 2$。设 K_1, K_2 是 Y^+ 分别作用在 Δ_1, Δ_2 上的核，若 Y^+ 忠实作用在 Δ_1, Δ_2 上，则 $Y^+ \le S_p$，且 $Y_\alpha^+ \le S_{p-1}$，矛盾。由此得到 Y^+ 非忠实作用在 Δ_1, Δ_2 上，且 $K_1 \cap K_2 = 1$， $K_1 \times K_2 \lhd Y^+$。令 $P := Y^+/(K_1 \times K_2)$，则 $K_2.P \cong Y^+/K_1$ 是 Δ_1 上的传递置换群， $K_1.P \cong Y^+/K_2$ 是 Δ_2 上的传递置换群。 $K_i.P$ 是 p 个点上的传递置换群，则 $K_i.P$ 是本原置换群。

令 $T_i = soc(K_i.P)$， $G := K.(T_1 \times T_2)$。设 T_i 交换， $i = 1, 2$，则 $T_1 \times T_2 \cong Z_p^2$ 在 $K_{p,p}$ 上边传递、点不传递，由此推出 $G := K.(T_1 \times T_2) = (Z_m.Z_n).Z_p^2$ 在 Γ 边传递、点不传递，进一步由引理 2.5 知，$\Gamma \cong Cos(G, G_\alpha, G_\beta)$，其中 α, β 是 Γ 上的相邻接的两个顶点。

引理 3.1 设 $H := (\langle x\rangle \times \langle y\rangle) : \langle \sigma\rangle \cong (Z_p \times Z_p) : Z_2$，其中 $x^\sigma = y$，则 H 由两个 p 阶正规子群 $\langle xy\rangle, \langle xy^{-1}\rangle$。

证明：由于 $x^\sigma = y$，可知 $\sigma : x^i y^j \to y^i x^j$，其中 $0 \le i, j \le p-1$。设 $\langle x^i y^j\rangle$ 是 H 的 p 阶正规子群，则 $y^i x^j \in \langle x^i y^j\rangle$。我们不妨假设 $y^i x^j = (x^i y^j)^k$，则 $y^i x^j = x^{ik} y^{jk}$，由此得到 $x^{ik-j} y^{jk-i} = 1, p \mid (ik-j), p \mid (jk-i)$。设 $ik - j = lp$，则 $j = ik - lp$， $jk - i = (ik - lp)k - i = ik^2 - lpk - i$，由此得到 $p \mid (ik^2 - lpk - i), p \mid (ik^2 - i)$，即 $p \mid i(k^2-1)$。因为 p 不能整除 i，则 $p \mid (k^2-1)$， $k \equiv \pm 1 (\bmod p)$。可知 $y^i x^j = x^i y^j$，或者 $y^i x^j = (x^i y^j)^{-1}$。如果 $y^i x^j = x^i y^j$， $y^{j-i} x^{i-j} = 1, p \mid (j-i)$，即 $i \equiv j (\bmod p)$，可知此时 $\langle x^i y^j\rangle = \langle xy\rangle$。如果 $y^i x^j = (x^i y^j)^{-1}$，则 $y^{j+i} x^{i+j} = 1, p \mid (j+i)$，即 $i \equiv -j (\bmod p)$，可知此时 $\langle x^i y^j\rangle = \langle xy^{-1}\rangle$。

引理 3.2 设 K 是亚循环群，令 F 是 K 的 Fitting 子群，则 K/F 是循环群。

证明：设 $K = \langle a\rangle.\langle b\rangle$，则可知 $K' \le \langle a\rangle$，又因为 $\langle a\rangle \le F$，且 $K/\langle a\rangle$ 是循环群，可知 K/F 也一定是循环群。

定理 3.3 设 $K = \langle a\rangle.\langle b\rangle \cong Z_m.Z_n$，令 $K/F := \langle z\rangle$，若 $(|\langle z\rangle|, p) = 1$，则 $K = F$ 是幂零群。

证明：因为 $FcharK \lhd K.H$，故 $F \lhd K.H$。设 $\bar{K} := K.H/F = (K/F).H = \langle z\rangle.(\langle x\rangle \times \langle y\rangle : \langle \sigma\rangle)$，因为 $Aut(\langle z\rangle)$ 是交换群，且 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle) = C_{\bar{K}}(K/F) \lhd \bar{K}$，所以得到

$$C_{\bar{K}}(K/F)/(K/F) = C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle \lhd \bar{K}/\langle z\rangle \cong H \text{。}$$

由引理 3.1 知 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy\rangle$， $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy^{-1}\rangle$ 或者 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$。

情形(1) $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy\rangle$

若 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy\rangle$，则 $\langle xy^{-1}\rangle \notin C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)$。这是因为若 $xy, xy^{-1} \in C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle$，则 $\langle x\rangle \times \langle y\rangle \le C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle$，这种情况将在下面讨论。由此得到若 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy\rangle$，则 $\langle xy^{-1}\rangle \notin C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)$。此时，又因为 $\langle \langle xy^{-1}\rangle : \langle \sigma\rangle\rangle = D_{2p}$，这与 $Aut(\langle z\rangle)$ 是交换群相矛盾。

情形(2) $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy^{-1}\rangle$

若 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle = \langle xy^{-1}\rangle$，且 $\langle xy\rangle \notin C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)$，则可知 xy 不能中心化 $\langle z_r\rangle$，其中 r 是某个素数，并且可知 $\langle z_r\rangle$ 不能中心化 F 的 Sylow q-子群 Q。因为 $F \lhd K.H$，且 $QcharF$，所以 $Q \lhd K.H$。进一步，$\langle Q, z_r, xy\rangle = Q.\langle z_r, xy\rangle = Q.(\langle z_r\rangle.\langle xy\rangle)$，而 $Aut(Q) = Q_0.GL(2,q)$，则 $\langle z_r\rangle.\langle xy\rangle \le GL(2,q)$，这不可能。

情形(3) $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$

若 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)/\langle z\rangle=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$，则 $C_{\bar{K}}(\langle z\rangle)\geq\langle z\rangle\times\langle x\rangle\times\langle y\rangle$。令 $W:=K.H=(\langle a\rangle.\langle b\rangle).((\langle x\rangle\times\langle y\rangle):\langle\sigma\rangle),\bar{W}:=W/K$。

因为 $\bar{K}:=K.H/F=(K/F).H=\langle z\rangle.(\langle x\rangle\times\langle y\rangle:\langle\sigma\rangle)$，且 $FcharK\lhd W$，所以 $F\lhd W$。又因为 $K/F=\langle z\rangle$，$K=F.\langle z\rangle$，所以 $W=(F.\langle z\rangle).((\langle x\rangle\times\langle y\rangle):\langle\sigma\rangle)=F.((\langle z\rangle\times\langle x\rangle\times\langle y\rangle):\langle\sigma\rangle)=(F.\langle x,y\rangle).(\langle z\rangle.\langle\sigma\rangle)$，由此可知 $F.\langle x,y\rangle\lhd W$。令 $N:=F.\langle x,y\rangle$，Γ 是 W-弧传递图，可知 $|V\Gamma|=|K|\cdot 2p$。下面分析 N 作用在 $V\Gamma$ 上的轨道个数。

1) 若 N 作用在 $V\Gamma$ 上是传递的，则 $|\alpha^N|=2p\cdot|K|$，即 $(2p\cdot|K|)\mid(|F|\cdot p^2)$，由此得出 $(2|K|)\mid(|F|\cdot p)$。若 $|K/F|\neq 1$，即 $\langle z\rangle\neq 1$，若 $(\circ(z),p)=1$，则 N 不可能在顶点集上传递。若 $|K/F|=p$，则 $|K|=|F|\cdot p$，此时 $2|K|$ 不能整除 $|F|\cdot p$。若 $|K/F|=p^2$，则 $|K|=|F|\cdot p^2$，此时 $2|K|$ 不能整除 $|F|\cdot p$。

由以上分析知，N 作用在 $V\Gamma$ 上不可能是传递的。

2) 若 N 作用在 $V\Gamma$ 上有两个轨道，则 $|\alpha^N|=p\cdot|F|\cdot|\langle z\rangle|$，此时不可能。

3) N 在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道，由引理 2.7 知，Γ_N 是 W/N-弧传递图，且 $val(\Gamma_N)=p$。因为 $|V\Gamma|=|K|\cdot 2p$，$|V\Gamma_N|=(|K|\cdot 2p)/|\alpha^N|$。因为 $(|\langle z\rangle|,p)=1$，所以经计算可以得到

$|K|\cdot 2p/|N|=2p\cdot|F|\cdot|\langle z\rangle|/(|F|\cdot p^2)=2|\langle z\rangle|/p$，可知 $|V\Gamma_N|=(|K|\cdot 2p)/|\alpha^N|$ 整除 $2|\langle z\rangle|$。

若 $(|\langle z\rangle|,p)=1$，则只有 $\langle z\rangle=1$，即 $K=F$ 是幂零群。

构造 1 设 $G=\left\langle a,b,x,y\mid a^q=b^q=x^p=y^p=1=[a,x]=[b,x]=[x,y],a^y=a^r,b^y=b^{r^i}\right\rangle$，其中 $r=\alpha^{\frac{q-1}{p}}$，而 α 是模 q 的原根。若 q 不能整除 $(r-1)$，$p\mid(r-1)$，则 $G=\langle xy,aby\rangle$，且 $\Gamma\cong Cos(G,G_\alpha,G_\beta)$ 是完全二部图 $K_{p,p}$ 的边传递 Z_q^2-正则覆盖，其中 $G_\alpha=\langle xy\rangle$，$G_\beta=\langle aby\rangle$。

证明：因为 $a^y=a^r$，$b^y=b^{r^i}$，经过计算可知 $(aby)^p=y^pa^{r^p+r^{p-1}+\cdots+r}b^{r^{pi}+r^{(p-1)i}+\cdots+r^i}$，因为 $r=\alpha^{\frac{q-1}{p}}$，而 α 是模 q 的原根，所以 $(aby)^p=y^pa^{r^p+r^{p-1}+\cdots+r}b^{r^{pi}+r^{(p-1)i}+\cdots+r^i}=a^{r^p+r^{p-1}+\cdots+r}b^{r^{pi}+r^{(p-1)i}+\cdots+r^i}=1$，由此可知 aby 是 p 阶元。因为 $(xy)^{-1}(aby)(xy)=a^rb^{r^i}y$，$aby\cdot y^{-1}x^{-1}=abx^{-1}$，$(abx^{-1})^{-1}=xb^{-1}a^{-1}$，而 $(xb^{-1}a^{-1})^r=x^rb^{-r}a^{-r}$，$(x^rb^{-r}a^{-r})(a^rb^{r^i}y)=x^rb^{r^i-r}y$，进一步计算可以得到 $\left[(xy)^r\right]^{-1}\left[x^rb^{r^i-r}y\right]=y^{-r+1}b^{r^{2i}-r^{i+1}}$，

$(xy)^{r-1}\cdot\left(y^{1-r}b^{r^{2i}-r^{i+1}}\right)=x^{r-1}b^{r^{2i}-r^{i+1}}$，因为 $r=\alpha^{\frac{q-1}{p}}$，且 x 是 p 阶元，所以 $\left(x^{r-1}b^{r^{2i}-r^{i+1}}\right)^p=b^{p\left(r^{2i}-r^{i+1}\right)}$。又因为 $r=\alpha^{\frac{q-1}{p}}$，而 α 是模 q 的原根，且假设 q 不能整除 $(r-1)$，$p\mid(r-1)$，可知 $(r^i-r,q)=1$，$(r^i(r^i-r),q)=1$。此时 $b^{r^{2i}-r^{i+1}}\in\langle xy,aby\rangle$，又因为 $(r^i(r^i-r),q)=1$，可知 $b\in\left\langle b^{r^{2i}-r^{i+1}}\right\rangle$，进一步可知 $b^{-1}aby=ay$，$(xy)^{-1}ay(xy)=a^ry$，$(a^ry)(ay)^{-1}=a^{r-1}$。由因为 $(q,r-1)=1$，所以 $a\in\langle xy,aby\rangle$，$a^{-1}b^{-1}aby=y$，进一步可知 $x,y,a,b\in\langle xy,aby\rangle$，这样我们得到 $\langle xy,aby\rangle=G$。此时令 $G_\alpha=\langle xy\rangle$，$G_\beta=\langle aby\rangle$，$\Gamma\cong Cos(G,G_\alpha,G_\beta)$，由引理 2.5 知 $|V\Gamma|=2pq^2$。因为 $R=\langle a,b\rangle\lhd G$，可知 Γ_R 是 $2p$ 阶 p 度图，Γ 是 $K_{p,p}$ 的边传递 Z_q^2-正则覆盖。

4. 结语

本文利用有限群论的技巧和陪集图的相关性质，将部分亚循环群的覆盖归为幂零群的覆盖问题，并且构造了一类完全二部图的边传递初等交换覆盖，将对 $2p$ 阶完全二部图的一般亚循环覆盖的研究起到一定的促进作用。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11801252)。

参考文献

[1] Kuzman, B. (2010) Arc-Transitive Elementary Abelian Covers of the Complete Graph K5. *Linear Algebra and Its Applications*, **433**, 1909-1921. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.07.009

[2] Kwak, J.H. and Oh, J.M. (2009) Arc-Transitive Elementary Abelian Covers of the Octahedron Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 2180-2198. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.06.013

[3] Oh, J.M. (2009) Arc-Transitive Elementary Abelian Covers of the Pappus Graph. *Discrete Mathematics*, **309**, 6590-6611. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.07.010

[4] Xu, W.Q. and Du, S.F. (2014) 2-Arc-Transitive Cyclic Covers of $K_{n,n} \times nK_2$. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **39**, 883-902. https://doi.org/10.1007/s10801-013-0471-8

[5] Xu, W.Q., Zhu, Y.H. and Du, S.F. (2016) 2-Arc-Transitive Regular Covers of $K_{n,n} \times nK_2$ with the Covering Transformation Group Z_p^2. *Ars Mathematica Contemporanea*, **10**, 269-280. https://doi.org/10.26493/1855-3974.560.5be

[6] Huppert, B. (1967) Finite Groups. Springer-Verlag, Berlin.

[7] 徐明耀. 有限群导引(上) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[8] Giudici, M., Li, C.H. and Praeger, C.E. (2003) Analysing Finite Locally "s"-Arc Transitive Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03361-0

[9] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[10] Pan, J.M., Huang, Z.H. and Ding, S.Y. (2017) Arc-Transitive Cyclic Covers of Graphs with Order Twice a Prime. *Discrete Mathematics*, **340**, 811-816. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.11.018

[11] Huang, Z.H. and Pan, J.M. (2018) On Arc-Transitive Metacyclic Covers of Graphs with Order Twice a Prime. *Electronic Journal of Combinatorics*, **25**, P3.9. https://doi.org/10.37236/7146

附　录

符号	意义
$\|G\|$	群 G 的阶
$\circ(x)$	元素 x 的阶
$[G:H]$	子群 H 在 G 中的指数
$H \le G$	群 H 是群 G 的子群
$H \lhd G$	群 H 是群 G 的正规子群
$G.H$	群 G 被群 H 的扩张
$G:H$	群 G 被群 H 的可裂扩张
Γ,Σ	图 Γ,Σ
$V\Gamma, E\Gamma, A\Gamma$	图 Γ 的顶点集、边集、弧集
$\|V\Gamma\|$	图 Γ 的顶点个数
$val(\Gamma)$	图 Γ 的度数
$Aut\Gamma$	图 Γ 的全自同构群
$K_{p,p}$	$2p$ 阶完全二部图