Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 240-251
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122028

Hans汉斯

一类n-斑块Lotka-Volterra型竞争系统的定性分析

李　娟

上海理工大学，上海

收稿日期：2022年1月3日；录用日期：2022年2月3日；发布日期：2022年2月10日

摘　要

本文研究了扩散和竞争能力对n个斑块两个物种的Lotka-Volterra竞争系统的动力学行为的联合影响。主要利用单调动力系统理论等方法建立了半平凡稳态解和共存稳态解的渐近稳定性。此外，在论文中还引入了一种新的矩阵主特征值的定义。

关键词

Lotka-Volterra，竞争斑块系统，动力学行为，渐进稳定性

Qualitative Analysis for a Lotka-Volterra n-Patch Competition System

Juan Li

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 3rd, 2022; accepted: Feb. 3rd, 2022; published: Feb. 10th, 2022

Abstract

In this paper, we investigate the joint effects of diffusion and competition ability on the dynamics of a n-patch two-species Lotka-Volterra competition system. The asymptotic stability of semi-trivial and coexistence steady states is established mainly by using the theory of monotone dynamical systems. Moreover, we point out that a new definition of principal eigenvalue of matrix is introduced in this paper.

Keywords

Lotka-Volterra, Competition Patch System, Dynamics, Asymptotic Stability

文章引用: 李娟. 一类 n-斑块 Lotka-Volterra 型竞争系统的定性分析[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 240-251.
DOI: 10.12677/pm.2022.122028

1. 引言

在生态学中生物种群与环境间的相互作用以及种群与种群间的相互作用可以利用动力学方法研究，并由此产生种群动力学。而种群动力学的研究，一直是生态学研究的核心问题之一。生物体的扩散和带有不均匀资源分配的空间异质环境之间的联系在近些年得到广泛关注。对扩散稳定策略的研究已经成为种群动力学的基本研究目标。离散栖息地上两个竞争物种的扩散率对稳定性的影响是种群动力学研究中重要的一方面，且结合数学的微分方程可以合理化的解释种群动力学。近年来，离散栖息地上两个物种的 Lotka-Volterra 竞争系统的全局动力学行为已经得到广泛研究(见[1] [2] [3] [4] [5])。

2019 年，J. Xiang 和 Y. Fang 在[6]中考虑了如下两个斑块的竞争模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = d\left(u_2 - u_1\right) - qu_1 + u_1\left(1 - u_1 - v_1\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = d\left(u_1 - 2u_2\right) + qu_1 - qu_2 + u_2\left(1 - u_2 - v_2\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = D\left(v_2 - v_1\right) - qv_1 + v_1\left(1 - u_1 - v_1\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = D\left(v_1 - 2v_2\right) + qv_1 - qv_2 + v_2\left(1 - u_2 - v_2\right) \end{cases}$$

对如上模型，作者们得出存在一个中间扩散率是进化稳定的。

2020 年，H. Jiang，K.-Y. Lam 和 Y. Lou 在[7]中研究了三个斑块两个竞争物种模型的动力学行为，并说明了定向河流网络模块的拓扑结构是如何影响扩散演变。对带有不同拓扑结构的河流网络模块，物种在斑块间的扩散是双向，沿着河流方向的漂流是单向，这是对流和无对流的结合。模型一假设有两个上游斑块和一个下游斑块，并且两个上游斑块间没有直接联系。模型二假设有上游，中游和下游三个斑块。模型三假设有一个上游斑块和两个下游斑块，并且两个下游斑块间没有直接联系。这三种模型都假定上中下游三个斑块的承载力由大到小，这意味上游斑块承载力更大，更有利于物种生存。

并且证明当对流较小时，对三个模型来说都是两个竞争物种中拥有较低扩散率的物种获胜。当对流较大时，对模型一和二来说没有奇异策略，并且两个竞争物种中拥有较高扩散率的物种获胜。对模型三来说扩散率为零和无穷是收敛稳定策略，并且存在奇异策略。对中间范围的对流来说，模型一和二存在奇异策略。而对模型三这个策略可能不存在。

2021 年，S. Chen 等人在[1]中考虑如下 n 个斑块两个物种的 Lotka-Volterra 竞争模型：

$$\begin{cases} u_i' = d_1 \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}u_j - a_{ji}u_i\right) + u_i\left(p_i - u_i - cv_i\right), & i = 1,2,\cdots,n, t > 0, \\ v_i' = d_2 \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}v_j - a_{ji}v_i\right) + v_i\left(q_i - bu_i - v_i\right), & i = 1,2,\cdots,n, t > 0. \end{cases}$$

在弱竞争以及矩阵 $L = \left(L_{ij}\right)_{n\times n}$ 不可约且其加权有向图是循环平衡的假设下，给出 Lotka-Volterra 竞争斑块模型关于全局动力学行为的分类。

本文在原有结论的基础上，对两个竞争物种在 n 个斑块上分别具有不同资源时，研究扩散率的确切位置，对系统的动力学行为给出更进一步的分类。本文的结果是对以有结论[1]的推广。

2. 预备知识和基本引理

本文主要研究如下 n 个斑块两个物种的 Lotka-Volterra 竞争模型：

$$\begin{cases} u_i' = d_1 \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} u_j - a_{ji} u_i \right) + u_i \left(p_i - u_i - c v_i \right), & i = 1, 2, \cdots, n, t > 0, \\ v_i' = d_2 \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} v_j - a_{ji} v_i \right) + v_i \left(q_i - b u_i - v_i \right), & i = 1, 2, \cdots, n, t > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 和 $v = (v_1, v_1, \cdots, v_n)$ 分别代表两个竞争物种在 n 个斑块的种群密度；$n \ge 2$ 是一个整数；$d_1, d_2 > 0$ 分别是物种 u 和 v 的扩散率；$b, c > 0$ 代表两个物种的种间竞争系数；$p_i, q_i > 0$ 分别代表物种 u_i, v_i 在斑块 i 的承载能力；以及矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 描述斑块间的移动模式，其中 $a_{ij} \ge 0 \, (i \ne j)$ 表示斑块 j 到斑块 i 的移动程度。

在本文中，向量 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) > (\ge) \mathbf{0}$ 表示 u 每个分量都是正的(非负的)。记 $L = (L_{ij})_{n \times n}$ 为模型的连接矩阵，其中

$$L_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \ne j, \\ -\sum_{k \ne i}^{n} a_{ki}, & i = j. \end{cases} \tag{2.2}$$

因此，本文考虑如下改写的模型：

$$\begin{cases} u_i' = d_1 \sum_{j=1}^{n} L_{ij} u_j + u_i \left(p_i - u_i - c v_i \right), & i = 1, 2, \cdots, n, t > 0, \\ v_i' = d_2 \sum_{j=1}^{n} L_{ij} v_j + v_i \left(q_i - b u_i - v_i \right), & i = 1, 2, \cdots, n, t > 0, \\ u(0) = u_0 \ge (\not\equiv) \mathbf{0}, v(0) = v_0 \ge (\not\equiv) \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.3}$$

为了描述本文关于系统(2.3)的结果，我们作出如下基本假设：

(A1) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ (或 L)对称，且对所有的 $i \ne j$，$a_{ij} > 0$；

(A2) $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) > \mathbf{0}$，$q = (q_1, q_2, \cdots, q_n) > \mathbf{0}$。

我们记 $w(d, r) = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是如下方程组的唯一正解：

$$d \sum_{j=1}^{n} L_{ij} w_j + w_i (r_i - w_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.4}$$

(2.4)的全局动力学行为由[8] [9] [10] [11]给出。为了简化符号，以下记

$$u^*(d_1) = w(d_1, p) \text{ 和 } v^*(d_2) = w(d_2, q),$$

其中 $u^*(d_1) = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*), v^*(d_2) = (v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*)$。

显然(2.3)总是有两个半平凡稳态解，以下我们用 $(u^*(d_1), \mathbf{0})$ 和 $(\mathbf{0}, v^*(d_2))$ 表示。为了精确刻画其线性稳定性，对系统(2.3)在 $Q = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ 中定义如下三个子集：

$$\begin{aligned} \Sigma_u &:= \left\{ (d_1, d_2) \in Q \,|\, (u^*(d_1), \mathbf{0}) \text{线性稳定} \right\}, \\ \Sigma_v &:= \left\{ (d_1, d_2) \in Q \,|\, (\mathbf{0}, v^*(d_2)) \text{线性稳定} \right\}, \\ \Sigma_- &:= \left\{ (d_1, d_2) \in Q \,|\, (u^*(d_1), \mathbf{0}) \text{和} (\mathbf{0}, v^*(d_2)) \text{线性不稳定} \right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

定义 2.1 给定一个常数 $d > 0$ 和一个向量 $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$，我们定义 $\mu_1(d, h)$ 为如下特征值问题

的主特征值：

$$d\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\psi_j + h_i\psi_i + \mu\psi_i = 0,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.6}$$

现在我们定义 Q 的另外三个子集：

$$\begin{aligned}
\Sigma_{u,0} &:= \left\{(d_1,d_2)\in Q \mid \mu_1\left(d_2, q-bu^*(d_1)\right)=0\right\},\\
\Sigma_{v,0} &:= \left\{(d_1,d_2)\in Q \mid \mu_1\left(d_1, p-cv^*(d_2)\right)=0\right\},\\
\Sigma_{0,0} &:= \left\{(d_1,d_2)\in Q \mid \mu_1\left(d_2, q-bu^*(d_1)\right)=\mu_1\left(d_1, p-cv^*(d_2)\right)=0\right\}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

受[12]的启发，定义

$$L_u := \inf_{d_1>0}\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^*(d_1)} \in (0,\infty), \qquad S_u := \sup_{d_1>0}\max_{1\le i\le n}\frac{q_i}{u_i^*(d_1)} \in (0,\infty), \tag{2.8}$$

$$L_v := \inf_{d_2>0}\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i^*(d_2)} \in (0,\infty), \qquad S_v := \sup_{d_2>0}\max_{1\le i\le n}\frac{p_i}{v_i^*(d_2)} \in (0,\infty). \tag{2.9}$$

下面我们描述当改变 b (或 c)时，集合 Σ_u 和 $\Sigma_{u,0}$ (或 Σ_v 和 $\Sigma_{v,0}$)在 d_1d_2-平面上如何变化。为了刻画对 $b>0$ 集合 Σ_u 的特征，对每个 $b>0$ 定义，

$$I_b := \left\{ d_1 > 0 \mid \sum_{i=1}^{n}\left(q_i - bu_i^*(d_1)\right) < 0 \right\} = I_b^0 \cup I_b^1, \tag{2.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_b^0 &:= \left\{ d_1 > 0 \mid q - bu^*(d_1) \le (\not\equiv) \mathbf{0} \right\},\\
I_b^1 &:= \left\{ d_1 \in I_b \mid \max_{1\le i\le n}\left(q_i - bu_i^*(d_1)\right) > 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

同样地为了刻画对 $c>0$ 集合 Σ_v 的特征，对每个 $c>0$ 定义，

$$I_c := \left\{ d_2 > 0 \mid \sum_{i=1}^{n}\left(p_i - cv_i^*(d_2)\right) < 0 \right\} = I_c^0 \cup I_c^1, \tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_c^0 &:= \left\{ d_2 > 0 \mid p - cv^*(d_2) \le (\not\equiv) \mathbf{0} \right\},\\
I_c^1 &:= \left\{ d_2 \in I_c \mid \max_{1\le i\le n}\left(p_i - cv_i^*(d_2)\right) > 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

记 $\overline{\Sigma_u}$ 和 $\overline{\Sigma_v}$ 分别为 Σ_u 和 Σ_v 在 Q 中的闭包，则 $\partial\Sigma_u = \overline{\Sigma_u}\setminus\Sigma_u \subset \Sigma_{u,0}$ 且 $\partial\Sigma_v = \overline{\Sigma_v}\setminus\Sigma_v \subset \Sigma_{v,0}$。

如下给出本文需要的基本引理。

引理 2.1 设(A1)成立，且 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)>\mathbf{0}$ 以及 r 的坐标不全相等。则如下结论成立：

i) 对任意 $d>0$，$\sum_{i=1}^{n} r_i \le \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r)$ 当且仅当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$；

ii) $w(d,r)$ 连续依赖于 $d>0$，此外，

$$w_i(d,r) \to \begin{cases} r_i & \text{当 } d \to 0^+, i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} r_i / n & \text{当 } d \to \infty, i = 1,2,\cdots,n; \end{cases}$$

iii) 对任意 $d > 0$，$\max_{1 \le i \le n} w_i(d,r) < \max_{1 \le i \le n} r_i$。

证明：首先证明引理 2.1-(i)。对(2.4)两边乘以 $1/w_i(d,r)$ 并把所有方程相加，可推出

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} L_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} L_{ij} \frac{w_j(d,r)}{w_i(d,r)}\right) + \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r) = 0.$$

由(2.2)和(A1)，有

$$d\left(-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij} \frac{w_j(d,r)}{w_i(d,r)}\right) + \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r) = 0. \tag{2.14}$$

令 $b_{ij} = a_{ij} \frac{w_j(d,r)}{w_i(d,r)}$，易证对于任意 $1 \le i, j \le n$，$b_{ij} + b_{ji} \ge 2a_{ij}$。因此，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij} \frac{w_j(d,r)}{w_i(d,r)} \ge \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij}. \tag{2.15}$$

由(2.14)和(2.15)，我们得出

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \le \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r). \tag{2.16}$$

注意到对任意 $i \ne j$，$b_{ij} + b_{ji} = 2a_{ij}$ 当且仅当 $w_1(d,r) = w_2(d,r) = \cdots = w_n(d,r)$。因此，

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(d,r) \text{当且仅当} r_1 = r_2 = \cdots = r_n.$$

接下来证明引理 2.1-(ii)。$w(d,r)$ 关于 d 的连续依赖性可由隐含函数定理(见[13]，命题 3.6)得到。然后对(2.4)令 $d \to 0^+$，由(2.16)可得 $w_i(d,r) \to r_i$，$i = 1,2,\cdots,n$。

对(2.4)两边乘以 $1/d$ 并令 $d \to \infty$，我们得出

$$0 = \lim_{d \to \infty} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} w_j(d,r) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \left(\lim_{d \to \infty} w_j(d,r)\right), i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.17}$$

由假设(A1)，(2.16)和(2.17)可知，有 $\lim_{d \to \infty} w_1(d,r) = \cdots = \lim_{d \to \infty} w_n(d,r) \ne 0$。注意到对所有 $1 \le j \le n$，有 $\sum_{i=1}^{n} L_{ij} = 0$。然后把(2.4)所有方程相加并令 $d \to \infty$，可得出

$$w_i(d,r) \to \sum_{i=1}^{n} r_i / n, i = 1,2,\cdots,n.$$

最后，我们通过反证法验证引理 2.1-(iii)。若存在某个 i_0 使得

$$w_{i_0}(d,r) = \max_{1 \le i \le n} w_i(d,r) \ge \max_{1 \le i \le n} r_i \ge r_{i_0}, \tag{2.18}$$

则由(2.2)，(2.4)和(2.18)，可得出

$$\sum_{j=1}^{n} L_{i_0 j} w_j(d,r) = -\sum_{j=1, j \ne i_0}^{n} a_{i_0 j} w_{i_0}(d,r) + \sum_{j=1, j \ne i_0}^{n} a_{i_0 j} w_j(d,r) \ge 0,$$

这表明

$$w_{i_0}(d,r)\le\frac{\sum_{j=1,j\ne i_0}^{n}a_{i_0j}w_j(d,r)}{\sum_{j=1,j\ne i_0}^{n}a_{i_0j}}\le\max_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i_0}}w_j(d,r)\le w_{i_0}(d,r).$$

显然 $w_1(d,r)=w_2(d,r)=\cdots=w_n(d,r)$。根据假设 r 的坐标不全相等可知，这不可能成立。从而完成了引理 2.1 证明。

引理 2.2 假设(A1)成立，则(2.6)的主特征值 $\mu_1(d,h)$ 由如下公式给出

$$\mu_1(d,h)=\inf_{\substack{\psi\in\mathbb{R}^n\\ \psi\ne 0}}\frac{-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i\psi_j-\sum_{i=1}^{n}h_i\psi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\psi_i^2}\tag{2.19}$$

且主特征值 $\mu_1(d,h)$ 的特征向量为正。

证明：为了方便起见，记

$$R(\psi)=\frac{-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i\psi_j-\sum_{i=1}^{n}h_i\psi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\psi_i^2}.$$

注意到

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i\psi_j=-(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)\begin{pmatrix}-\sum_{k\ne1}a_{1k} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & -\sum_{k\ne2}a_{2k} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & -\sum_{k\ne n}a_{nk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}\ge 0.\tag{2.20}$$

则

$$R(\psi)\ge\frac{-\sum_{i=1}^{n}h_i\psi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\psi_i^2}\ge-\max_{1\le i\le n}|h_i|,$$

即对任意 $\psi\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$， $R(\psi)$ 下有界。因此， $\inf_{\substack{\psi\in\mathbb{R}^n\\ \psi\ne\mathbf{0}}}R(\psi)>-\infty$。

步骤 1：定义 $\mu_1(d,h)=\inf_{\substack{\psi\in\mathbb{R}^n\\ \psi\ne\mathbf{0}}}R(\psi)$，证明 $\mu_1(d,h)$ 是特征值。由(2.20)和

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i\psi_j=0\text{当且仅当}\psi_1=\psi_2=\cdots=\psi_n,\tag{2.21}$$

我们在 $\mathbb{R}^n$ 中引入一个内积

$$(\phi,\psi)^*=-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\phi_i\psi_j+\sum_{i=1}^{n}\left(-h_i+2\max_{1\le i\le n}|h_i|\right)\phi_i\psi_i,$$

从而在 $\mathbb{R}^n$ 中产生一个范数 $\|\psi\|^*=\sqrt{(\psi,\psi)^*}$。以及记 $\|\psi\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

现在取极小化序列$\{\psi^m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^n$，我们有当$m\to\infty$时，$R(\psi^m)\to\mu_1(d,h)$。由于$R(\psi^m)=R\left(\frac{\psi^m}{\|\psi^m\|}\right)$，所以不失一般性，我们假设对任意$m\geq 1$，$\|\psi^m\|=1$。因此，

$$R(\psi^m)=-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i^m\psi_j^m-\sum_{i=1}^{n}h_i(\psi_i^m)^2=\left(\|\psi^m\|^*\right)^2-2\max_{1\leq i\leq n}|h_i|.$$

因为$\{R(\psi^m)\}_{m=1}^{\infty}$有界，所以$\left\{\|\psi^m\|^*\right\}_{m=1}^{\infty}$有界，即$\{\psi^m\}_{m=1}^{\infty}$有界。从而存在子列(仍记为$\{\psi^m\}$)，当$m\to\infty$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^m)^2\to\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^\infty)^2 \text{和} \|\psi^m\|^*\to\|\psi^\infty\|^*,$$

其中$\psi^\infty\in\mathbb{R}^n$，$\|\psi^\infty\|=1$。因此，

$$R(\psi^\infty)=\left(\|\psi^\infty\|^*\right)^2-2\max_{1\leq i\leq n}|h_i|\|\psi^m\|^2=\lim_{m\to\infty}\left(\left(\|\psi^m\|^*\right)^2-2\max_{1\leq i\leq n}|h_i|\|\psi^m\|^2\right)=\lim_{m\to\infty}R(\psi^m)$$

这表明$R(\psi^\infty)=\inf_{\substack{\psi\in\mathbb{R}^n\\ \psi\neq\mathbf{0}}}R(\psi)$。

下面我们断言$(\mu_1(d,h),\psi^\infty)$是一个特征对，会完成步骤1的证明。为了证明断言成立，定义对任意$\phi\in\mathbb{R}^n$，$f(s)=R(\psi^\infty+s\phi)$。因此，$f(0)=\inf_{s}f(s)$且$f'(0)=0$。由

$$0=f'(0)=\frac{\left(-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\left(\phi_i\psi_j^\infty+\phi_j\psi_i^\infty\right)-2\sum_{i=1}^{n}h_i\phi_i\psi_i^\infty\right)\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^\infty)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^\infty)^2\right)^2}$$
$$\frac{-2\left(-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i^\infty\psi_j^\infty-\sum_{i=1}^{n}h_i(\psi_i^\infty)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\phi_i\psi_i^\infty}{\left(\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^\infty)^2\right)^2},$$

可以推出

$$-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\phi_i\psi_j^\infty-\sum_{i=1}^{n}h_i\phi_i\psi_i^\infty=\left(-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i^\infty\psi_j^\infty-\sum_{i=1}^{n}h_i(\psi_i^\infty)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\phi_i\psi_i^\infty=\mu_1(d,h)\sum_{i=1}^{n}\phi_i\psi_i^\infty.$$

从而由ϕ的任意性，我们有$d\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_j^\infty+h_i\psi_i^\infty+\mu_1(d,h)\psi_i^\infty=0$，($i=1,2,\cdots,n$)。因此断言得证。

步骤2：我们证明$\mu_1(d,h)$的特征向量$\psi^\infty>0$。首先证明$\psi^\infty\geq(\neq)\mathbf{0}$，由(2.2)和$a_{ij}\geq 0\ \ (i\neq j)$，我们得到$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i^\infty\psi_j^\infty\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}|\psi_i^\infty||\psi_j^\infty|$。

因此，

$$\mu_1(d,h)\leq R(|\psi^\infty|)\leq\frac{-d\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_i^\infty\psi_j^\infty-\sum_{i=1}^{n}h_i(\psi_i^\infty)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^\infty)^2}=R(\psi^\infty)=\mu_1(d,h).\tag{2.22}$$

从而由(2.22)和$\left\|\psi^{\infty}\right\|=1$，可推得$\psi^{\infty}\geq(\not\equiv)\mathbf{0}$。接下来我们断言$\psi^{\infty}>\mathbf{0}$。反证法，假设存在某个$i_0$，使得$\psi_{i_0}^{\infty}=0$。注意到$\psi_{i_0}^{\infty}$满足$d\sum_{j=1}^{n}L_{i_0 j}\psi_j^{\infty}+h_{i_0}\psi_{i_0}^{\infty}+\mu_1(d,h)\psi_{i_0}^{\infty}=0$。因此由假设(A1)，我们得到对所有$j\neq i_0$，$\psi_j^{\infty}=0$。由$\psi^{\infty}\not\equiv\mathbf{0}$可知，这不可能成立。从而完成了该引理的证明。

为了进一步刻画主特征值$\mu_1(d,h)$的性质，需引入如下特征值问题：

$$\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\phi_j+\lambda h_i\phi_i=0,\ \ i=1,2,\cdots,n, \tag{2.23}$$

其中$h\in\mathbb{R}^n$，h 的坐标不全相等以及$h_1,h_2,\cdots,h_n$符号不全相同。若(2.23)存在一个正解，我们称λ是主特征值。

引理 2.3 [13]假设(A1)和$\sum_{i=1}^{n}h_i<0$成立。设$\left\{\phi^m\right\}$是$\mathbb{R}^n$中的一个序列且满足$\sum_{i=1}^{n}\left(\phi_i^m\right)^2=1$和$\sum_{i=1}^{n}h_i\left(\phi_i^m\right)^2>0$，则存在一个常数$c_0>0$，使得对所有$m$，$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\phi_i^m\phi_j^m\geq c_0$。

引理 2.4 [13]假设(A1)成立以及$h_1,h_2,\cdots,h_n$的符号不全相同，则问题(2.23)存在正主特征值$\lambda_1=\lambda_1(h)$当且仅当$\sum_{i=1}^{n}h_i<0$，并且正主特征值$\lambda_1(h)$由如下式子决定

$$\frac{1}{\lambda_1(h)}=\sup_{\substack{\phi\in\mathbb{R}^n\\ \sum_{i,j=1}^{n}L_{ij}\phi_i\phi_j\neq0}}\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i\phi_i^2}{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\phi_i\phi_j}. \tag{2.24}$$

该引理的证明与[13]中的证明类似，这里省略。

为了证明命题2.1，我们先给出如下引理。

引理 2.5 [13]假设(A1)成立，λ是一个正参数并且$\sum_{i=1}^{n}h_i<0$，$h_1,h_2,\cdots,h_n$的符号不全相同。则

$\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\psi_j+\lambda h_i\psi_i+\sigma\psi_i=0,\ i=1,2,\cdots,n,$ (2.25)的主特征值$\sigma_1>0$当且仅当$0<\lambda<\lambda_1$，其中$\lambda_1=\lambda_1(h)$是(2.23)的正主特征值。

从而若$\sum_{i=1}^{n}h_i<0$且$h_1,h_2,\cdots,h_n$的符号不全相同，则如下结论成立：

$$\begin{cases}\sigma_1<0 & \text{对所有 } \lambda>\lambda_1,\\ \sigma_1=0 & \text{若 } \lambda=\lambda_1,\\ \sigma_1>0 & \text{对所有 } \lambda<\lambda_1.\end{cases}$$

命题 2.1 假设(A1)成立，则(2.6)的主特征值$\mu_1(d,h)$连续依赖于$d>0$。此外，$\mu_1(d,h)$有如下性质：

i) 若$\sum_{i=1}^{n}h_i\geq0$且$h\not\equiv\mathbf{0}$，则对所有$d>0$，$\mu_1(d,h)<0$；

ii) 若$\sum_{i=1}^{n}h_i<0$且$h_1,h_2,\cdots,h_n$的符号不全相同，则

$$\begin{cases}\mu_1(d,h)<0 & \text{对所有 } d<1/\lambda_1(h),\\ \mu_1(d,h)=0 & \text{若 } d=1/\lambda_1(h),\\ \mu_1(d,h)>0 & \text{对所有 } d>1/\lambda_1(h);\end{cases}$$

iii) 若 $h \le (\ne) \mathbf{0}$，则对所有 $d>0$，$\mu_1(d,h)>0$。

命题 2.1-(i)和(iii)的证明是基本的，这里略去。命题 2.1-(ii)的证明可由引理 2.5 得出。

引理 2.6 [14]系统(2.3)中 $(u^*(d_1),\mathbf{0}),(\mathbf{0},v^*(d_2))$ 和 $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ 的线性稳定性，分别由 $\mu_1(d_2,q-bu^*(d_1)),\mu_1(d_1,p-cv^*(d_2))$ 和 $\min\{\mu_1(d_1,p),\mu_1(d_2,q)\}$ 的符号决定。

该引理的证明类似于[14]中的推论 2.10，这里省略。

3. 主要结果

本文的主要结果如下：

定理 3.1 假设(A1)和(A2)成立且 p 和 q 的坐标至少有一个不全相等，L_u,S_u,L_v 和 S_v 的定义如(2.8)和(2.9)，以下结论对系统(2.3)成立：

i) 对 Σ_u，我们有如下特征：

$$\Sigma_u=\begin{cases}\varnothing & 若\ 0<b\le L_u,\\ \left\{(d_1,d_2)\,|\,d_1\in I_b,d_2>\widetilde{d_2^*}(d_1)\right\}\subsetneq Q & 若\ L_u<b<S_u,\\ Q & 若\ b\ge S_u,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 I_b,I_b^0 和 I_b^1 定义如(2.10)和(2.11)，且在 I_b 中 $\widetilde{d_2^*}(d_1)$ 定义如下：

$$\widetilde{d_2^*}(d_1):=\begin{cases}0 & 若\ d_1\in I_b^0,\\ \dfrac{1}{\lambda_1(q-bu^*(d_1))}>0 & 若\ d_1\in I_b^1,\end{cases}\tag{3.2}$$

其中 λ_1 定义如(2.24)。因此 $\Sigma_u\ne\varnothing$ 当且仅当 $b>L_u$；

ii) 对 Σ_v，我们有如下特征：

$$\Sigma_v=\begin{cases}\varnothing & 若\ 0<c\le L_v,\\ \left\{(d_1,d_2)\,|\,d_2\in I_c,d_1>\widetilde{d_1^*}(d_2)\right\}\subsetneq Q & 若\ L_v<c<S_v,\\ Q & 若\ c\ge S_v,\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 I_c,I_c^0 和 I_c^1 定义如(2.12)和(2.13)，且在 I_c 中 $\widetilde{d_1^*}(d_2)$ 定义如下：

$$\widetilde{d_1^*}(d_2):=\begin{cases}0 & 若\ d_2\in I_c^0,\\ \dfrac{1}{\lambda_1(p-cv^*(d_2))}>0 & 若\ d_2\in I_c^1,\end{cases}\tag{3.4}$$

其中 λ_1 定义如(2.24)。因此，$\Sigma_v\ne\varnothing$ 当且仅当 $c>L_v$；

iii) 对 $\Sigma_{u,0}$，我们有如下特征：

$$\Sigma_{u,0}=\begin{cases}\varnothing & 若\ 0<b<L_u\ 或\ b\ge S_u,\\ \left\{(d_1,d_2)\,|\,q\equiv L_u u^*(d_1)\right\} & 若\ b=L_u,\\ \partial\Sigma_u\cup\left\{(d_1,d_2)\,|\,q\equiv bu^*(d_1)\right\} & 若\ L_u<b<S_u;\end{cases}\tag{3.5}$$

iv) 对 $\Sigma_{v,0}$，我们有如下特征：

$$\Sigma_{v,0}=\begin{cases}\varnothing & 若 0<c<L_v 或 c\ge S_v,\\ \left\{(d_1,d_2)\mid p\equiv L_v v^*(d_2)\right\} & 若 c=L_v,\\ \partial\Sigma_v\cup\left\{(d_1,d_2)\mid p\equiv cv^*(d_2)\right\} & 若 L_v<c<S_v.\end{cases} \tag{3.6}$$

证明：首先证明定理3.1-(i)成立。由引理2.6可知$\Sigma_u=\left\{(d_1,d_2)\mid \mu_1\left(d_2,q-bu^*(d_1)\right)>0\right\}$。假设$d_1\notin I_b$，其中$I_b$定义如(2.10)，则$\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-bu_i^*(d_1)\right)\ge 0$。由命题2.1-(i)可知对所有$d_2$，有$\mu_1\left(d_2,q-bu^*(d_1)\right)\le 0$，即对所有$d_2>0$，$(d_1,d_2)\notin\Sigma_u$。所以$(d_1,d_2)\in\Sigma_u$表明$d_1\in I_b$。下面刻画对所有$b>0$，集合$I_b$的特征。若$b\le L_u$，则由(2.8)中$L_u$定义可知对所有$d_1>0$，我们有$\sum_{i=1}^{n}\left(q_i-bu_i^*(d_1)\right)\ge 0$。因此$I_b=\varnothing$且$\Sigma_u=\varnothing$。此外，

$$I_b^1\ne\varnothing 当且仅当 L_u<b<S_u. \tag{3.7}$$

若$d_1'\in I_b^1\ne\varnothing$，则存在某个$i_0$使得$L_u<b$和$q_{i_0}-bu_{i_0}^*(d_1')>0$成立。因此

$$L_u<b<\frac{q_{i_0}}{u_{i_0}^*(d_1')}\le S_u.$$

另一方面，若$L_u<b<S_u$，则存在某个$d_1''>0$和j_0使得

$$q_{j_0}-bu_{j_0}^*(d_1'')>0 和 \sum_{i=1}^{n}\left(q_i-bu_i^*(d_1'')\right)<0,$$

这表明$d_1''\in I_b^1\ne\varnothing$。这就完成了(3.7)的证明。

下面我们断言I_b有如下分解：

$$\begin{cases}I_b=\varnothing & 若 b\le L_u,\\ I_b=I_b^0\cup I_b^1\subset\mathbb{R}^+ & 若 L_u<b<S_u,\\ I_b=I_b^0=\mathbb{R}^+ & 若 b\ge S_u.\end{cases} \tag{3.8}$$

为了证明(3.8)成立，我们只需证明若$b\ge S_u$，则$I_b=I_b^0=\mathbb{R}^+$。根据(2.8)中S_u的定义和$b\ge S_u$，我们得出对所有$d_1>0$，有$q-bu^*(d_1)\le\mathbf{0}$。因此为了证明$I_b=I_b^0=R^+$成立，只需证明若$b\ge S_u$，则对所有$d_1>0$，$q-bu^*(d_1)\ne\mathbf{0}$成立。容易得出$b>S_u$结论成立。

接下来，我们只需通过假设$b=S_u$证明对所有$d_1>0$，$q-bu^*(d_1)\ne\mathbf{0}$成立即可。若$p_1=p_2=\cdots=p_n=p^*$，则由假设可知q的坐标不全相等以及对所有$d_1>0$，我们有$u_i^*(d_1)=p^*$ ($i=1,2,\cdots,n$)。因此对所有$d_1>0$，$q-bu^*(d_1)$的坐标不全相等。若$q_1=q_2=\cdots=q_n=q^*$，则由假设可知p的坐标不全相等且对所有$d_1>0$，$u^*(d_1)$的坐标不全相等。因此对所有$d_1>0$，$q-bu^*(d_1)$的坐标不全相等。如果p和q的坐标都不全相等，我们用反证法证明$q-bu^*(d_1)\ne\mathbf{0}$成立。若存在某个$d_1'>0$使得$q-bu^*(d_1')\equiv\mathbf{0}$，则由(2.8)中$S_u$的定义，可得出对所有$i=1,2,\cdots,n$和$d_1>0$，有

$$\frac{q_i}{u_i^*(d_1')}=S_u 和 \frac{q_i}{u_i^*(d_1')}\ge\max_{1\le i\le n}\frac{q_i}{u_i^*(d_1)}.$$

因此对所有$d_1\ne d_1'$，$u^*(d_1')-u^*(d_1)\le(\ne)\mathbf{0}$成立。但由引理2.1可知，这与$\sum_{i=1}^{n}u_i^*(d_1)$不能在某个有限的$d_1'\in(0,\infty)$处达到全局最小相矛盾。从而(3.8)得证。所以由(3.8)和命题2.1-(iii)，我们得出对所有$(d_1,d_2)\in Q$，有

$$b\ge S_u\Rightarrow\mu_1\left(d_2,q-bu^*(d_1)\right)>0. \tag{3.9}$$

下面假设 $L_u < b < S_u$ 和 $d_1 \in I_b = I_b^0 \cup I_b^1$ 成立。若 $d_1 \in I_b^0$，则由命题 2.1-(iii)可知对所有 $d_2 > 0 = \widetilde{d_2^*}(d_1)$，有 $\mu_1(d_2, q - bu^*(d_1)) > 0$。若 $d_1 \in I_b^1$，则由命题 2.1-(ii)可知对所有 $d_2 > 1/\lambda_1(q - bu^*(d_1)) = \widetilde{d_2^*}(d_1)$，有 $\mu_1(d_2, q - bu^*(d_1)) > 0$。因此，$(d_1, d_2) \in \Sigma_u$ 当且仅当 $d_1 \in I_b$ 和 $d_2 > \widetilde{d_2^*}(d_1)$，从而(3.2)得证。由(3.2)和(3.7)，可推出当 $b \in (L_u, S_u)$ 时，有 $\Sigma_u \subsetneq Q$ 成立。这就完成了定理 3.1-(i)的证明。定理 3.1-(ii)的证明与定理 3.1-(i)相似，这里省略。

最后我们证明定理 3.1-(iii)。若 $b \le L_u$，则对所有 $d_1 > 0$，有 $\sum_{i=1}^{n}(q_i - bu_i^*(d_1)) \ge 0$。因此由命题 2.1-(i)，我们得出对所有 $(d_1, d_2) \in Q$，有 $\mu_1(d_2, q - bu^*(d_1)) \le 0$ 并且 $\mu_1(d_2, q - bu^*(d_1)) = 0$ (即 $(d_1, d_2) \in \Sigma_{u,0}$)当且仅当 $b = L_u$ 和 $q \equiv L_u u^*(d_1)$。这表明如果 $b < L_u$，则 $\Sigma_{u,0} = \varnothing$ 成立。因此只需证明 $b = L_u$ 即可。若存在某个 $d_1^* > 0$，使得 $q \equiv L_u u^*(d_1^*)$，则 d_1^* 唯一。事实上，如果 p 的坐标不全相等且这样的 $d_1^* > 0$ 存在，则由 $u_i^*(d_1^*)$ 所满足的方程可得到对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$，

$$d_1^* \equiv -\frac{u_i^*(d_1^*)\left(p_i - u_i^*(d_1^*)\right)}{\sum_{j=1}^{n} L_{ij} u_j^*(d_1^*)} \equiv -\frac{q_i(L_u p_i - q_i)}{L_u \sum_{j=1}^{n} L_{ij} q_j},$$

显然 d_1^* 唯一。若 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p^*$，则由假设可知 q 的坐标不全相等并且对所有 $d_1 > 0$，有 $u_i^*(d_1) = p^*$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)。这表明这样的 d_1^* 不存在且 $\Sigma_{u,0} = \varnothing$。若 $b \ge S_u$，则由(3.9)可推出 $\Sigma_{u,0} = \varnothing$。

因此，为了完成定理 3.1-(iii)的证明，我们只需证明当 $L_u < b < S_u$ 时结论成立即可。由定理 3.1-(i)可知当 $L_u < b < S_u$ 时，有 $\varnothing \ne \Sigma_u \subsetneq Q$。假设 $(d_1', d_2') \in \Sigma_{u,0} \setminus \partial\Sigma_u$，我们断言 $q - bu^*(d_1') \equiv \mathbf{0}$。事实上，若 $q - bu^*(d_1') \not\equiv \mathbf{0}$，则由 $\mu_1(d_2', q - bu^*(d_1')) = 0$ 和命题 2.1-(i)和(iii)，可得出 $\sum_{i=1}^{n}(q_i - bu_i^*(d_1')) < 0$ 以及 $q - bu^*(d_1')$ 坐标的符号不全相同。从而根据引理 2.4 和命题 2.1-(ii)，我们推出 $1/d_2' = \lambda_1(q - bu^*(d_1')) > 0$ 且对所有 $d_2 > d_2'$，$\mu_1(d_2, q - bu^*(d_1')) > 0$ (即 $(d_1', d_2) \in \Sigma_u$)。这表明 $(d_1', d_2') \in \partial\Sigma_u$，但这与 $(d_1', d_2') \in \Sigma_{u,0} \setminus \partial\Sigma_u$ 矛盾，因此 $q - bu^*(d_1') \equiv \mathbf{0}$。通过与上述 $b = L_u$ 证明类似的方法，我们可以得到若存在某个 d_1'，使得 $q \equiv bu^*(d_1')$，则 d_1' 唯一。这样就完成了定理 3.1-(iii)的证明。定理 3.1-(iv)的证明与定理 3.1-(iii)相似，这里省略。

参考文献

[1] Chen, S., Shi, J., Shuai, Z. and Wu, Y. (2022) Global Dynamics of a Lotka-Volterra Competition Patch Model. *Nonlinearity*, **35**, 817-842.

[2] Cheng, C.-Y., Lin, K.-H. and Shih, C.-W. (2019) Coexistence and Extinction for Two Competing Species in Patchy Environments. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **16**, 909-946. https://doi.org/10.3934/mbe.2019043

[3] Gourley, S.A. and Kuang, Y. (2005) Two-Species Competition with High Dispersal: The Winning Strategy. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **2**, 345-362. https://doi.org/10.3934/mbe.2005.2.345

[4] Lin, K.-H., Lou, Y., Shih, C.-W. and Tsai, T.-H. (2014) Global Dynamics for Two-Species Competition in Patchy Environment. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **11**, 947-970. https://doi.org/10.3934/mbe.2014.11.947

[5] Slavík, A. (2020) Lotka-Volterra Competition Model on Graphs. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **19**, 725-762. https://doi.org/10.1137/19M1276285

[6] Xiang, J. and Fang, Y. (2019) Evolutionarily Stable Dispersal Strategies in a Two-Patch Advective Environment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **24**, 1875-1887. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018245

[7] Jiang, H., Lam, K.-Y. and Lou, Y. (2020) Are Two-Patch Models Sufficient? The Evolution of Dispersal and Topology of River Network Modules. *Bulletin of Mathematical Biology*, **131**, 1-42. https://doi.org/10.1007/s11538-020-00803-1

[8] Chen, S., Shi, J., Shuai, Z. and Wu, Y. (2019) Spectral Monotonicity of Perturbed Quasi-Positive Matrices with Applications in Population Dynamics.

[9] Cosner, C. (1996) Variability, Vagueness and Comparison Methods for Ecological Models. *Bulletin of Mathematical*

Biology, **58**, 207-246. https://doi.org/10.1007/BF02458307

[10] Li, M.Y. and Shuai, Z. (2010) Global-Stability Problem for Coupled Systems of Differential Equations on Networks. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1-20. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.09.003

[11] Lu, Z.Y. and Takeuchi, Y. (1993) Global Asymptotic Behavior in Single-Species Discrete Diffusion Systems. *Journal of Mathematical Biology*, **32**, 67-77. https://doi.org/10.1007/BF00160375

[12] He, X. and Ni, W.-M. (2016) Global Dynamics of the Lotka-Volterra Competition-Diffusion System: Diffusion and Spatial Heterogeneity I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **69**, 981-1014. https://doi.org/10.1002/cpa.21596

[13] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2003) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 428 p.

[14] Lam, K.-Y. and Ni, W.-M. (2012) Uniqueness and Complete Dynamics in Heterogeneous Competition-Diffusion Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **6**, 1695-1712. https://doi.org/10.1137/120869481