Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 368-375
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123040

带参数集值向量优化问题ε-超有效点集的连通性

章　勤，陈剑尘，邢秋菊*

南昌航空大学数学与信息科学学院，江西 南昌

收稿日期：2022年2月8日；录用日期：2022年3月10日；发布日期：2022年3月17日

摘　要

本文主要研究了带参数ε-超有效点集的连通性。首先在局部凸的Hausdorff拓扑线性空间中引进了带参数的ε-超有效点集的概念，然后在可行域为弧连通紧的，目标函数为C-弧连通的集值映射的情况下，证明了ε-超有效点集非空并得到了带参数的ε-超有效点集的连通性。

关键词

连通性，集值映射，带参数ε-超有效点

Connectedness of ε-Super Effective Point Set for Set-Valued Vector Optimization Problems with Parameters

Qin Zhang, Jianchen Chen, Qiuju Xing*

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Feb. 8th, 2022; accepted: Mar. 10th, 2022; published: Mar. 17th, 2022

Abstract

In this paper, we study the connectivity of ε-super effective point sets with parameters. Firstly we introduce the concept of ε-super effective point set with parameters in locally convex Hausdorff topological linear space. Then, under the condition that the feasible region is arcwise connected and compact, and the objective function is C-arcwise connected set-valued mapping, we prove the

*通讯作者。

文章引用：章勤，陈剑尘，邢秋菊．带参数集值向量优化问题 ε-超有效点集的连通性[J]．理论数学，2022，12(3): 368-375. DOI: 10.12677/pm.2022.123040

ε-super effective point set is nonempty and obtain the connectedness of ε-super efficient solution set with parameters.

Keywords

Connectedness, Set-Valued Mapping, ε-Super Effective Points with Parameters

1. 引言

近似有效解一直是学者研究的重要邻域，自凌晨[1]在赋范向量空间引入 ε-超有效解的概念以来，已有众多学者取得了一定的研究成果。邵建英[2]讨论了 ε-超有效点在赋范线性空间的性质并证明了 ε-超有效解集连通性；戎卫东，高彩霞[3]在广义锥次类凸的条件下讨论了赋范向量空间中 ε-超有效点(解)集的连通性；刘涛[4]在目标映射为锥拟凸的条件下研究了 ε-超有效解集的连通性；曹敏，汪洋[5]等在目标映射为 C-弧连通且约束条件下证明了超有效解集的连通性。

可以看出，大部分学者都是研究 ε-超有效解的连通性，且集值映射大多为无约束或由约束映射构成，在参数扰动下连通性的研究目前发现文献[6]有所涉及，本文主要研究在参数扰动下 ε-超有效点集的连通性。文献[3]在近似广义 C-次类凸的条件下建立了 ε-超有效点的标量化定理，文献[6]研究了在参数扰动下强有效点的连通性，故本文借助文献[3] ε-超有效点标量化的建立以及文献[6]如何在参数扰动下证明有效点的连通性，结合两篇文献的基础进行改进，在可行域为弧连通紧的，目标映射为弧连通的情况下且在参数扰动下，证明了带参数的 ε-超有效点集的连通性。本文第一节介绍了几种常见的凸性假设以及所需的定义，第二节证明了 ε-超有效点的标量化定理在参数扰动下仍旧成立并得到了带参数的 ε-超有效点集非空且连通。

2. 基本知识

本文始终假设 X,Y,Z 为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间，$N(0)$ 为 Y 的零点邻域基。$C\subset Y$ 为具有非空内部的点闭凸锥，定义 C 的正对偶锥 $C^*:=\{\varphi\in Y^*:\varphi(y)\geq 0,\forall y\in C\}$，拟内部 $C^\#:=\{\varphi\in Y^*:\varphi(y)>0,\forall y\in C\setminus\{0\}\}$。$D\subset Y$ 为非空子集，$cl(D)$，$\operatorname{int}(D)$，$cone(D)$ 分别为 D 的闭包，内部，生成锥，并定义生成锥 $cone(D):=\{\lambda\theta:\lambda\geq 0,\theta\in D\}$。

锥 C 的凸子集 B 称为 C 的基，若满足两个条件：

(i) $0\neq cl(B)$；

(ii) $C=cone(B)=\{\sigma b:\sigma\geq 0,b\in B\}$。

显然，(i) $C^\#\subset C^*$ 且有基底的锥一定为点锥；

(ii) $C^\#\neq\varnothing\Leftrightarrow C$ 有基；

(iii) $\operatorname{int}(C^*)\neq\varnothing\Leftrightarrow C$ 具有有界基。

接下来介绍几种常见的凸性假设。

定义 1.1 设 $A\subset X$ 为非空子集，$C\subset Y$ 为点闭凸锥且 $\operatorname{int}(C)\neq\varnothing$，集值映射 $F:A\to 2^Y$，

1) 若 $\forall x_1,x_2\in A$，$\forall t\in(0,1)$，满足

$$tF(x_1)+(1-t)F(x_2)\subset F(tx_1+(1-t)x_2)+C,$$

则称 F 在 A 上为 C-凸[7]的。

2) 若 $\forall x_1,x_2\in A$，$\forall t\in(0,1)$，满足

$$tF(x_1)+(1-t)F(x_2)\subset F(A)+C,$$

则称 F 在 A 上为 C-类凸[8]的。

3) 若 $\exists\theta\in\operatorname{int}(C)$，$\forall x_1,x_2\in A$，$\forall t\in(0,1)$，$\forall\varepsilon>0$，满足

$$\varepsilon\theta+tF(x_1)+(1-t)F(x_2)\subset F(A)+C,$$

则称 F 在 A 上为 C-次类凸[9]的。

4) 若 $\exists\theta\in\operatorname{int}(C)$，$\forall x_1,x_2\in A$，$\forall t\in(0,1)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，满足

$$\varepsilon\theta+tF(x_1)+(1-t)F(x_2)\subset\eta F(A)+C,$$

则称 F 在 A 上为广义 C-次类凸[10]的。

5) 若 $cl(F(A)+C)$ 为凸集，则称 F 在 A 上为近似 C-类凸[11]的。

6) 若 $cl(cone(F(A)+C))$ 为凸集，则称 F 在 A 上为近似广义 C-次类凸[12]的。

引理 1.1 (i) F 为 C-类凸的 $\Leftrightarrow F(A)+C$ 为凸集[13]。

(ii) F 为 C-次类凸的 $\Leftrightarrow F(A)+\operatorname{int}(C)$ 为凸集[11]。

注 1.1 若 $F(A)+C$ 为凸集，则 C-类凸必为近似广义 C-次类凸，且有以下推导关系：$F(A)+C$ 为凸集 $\Leftrightarrow F$ 为 C-类凸 $\Rightarrow F$ 为 C-次类凸 $\Rightarrow F$ 为近似 C-类凸 $\Rightarrow F$ 为近似 C-次类凸。

证明：因为 $F(A)+C$ 为凸集，由引理 1.1(i)可知 F 为 C-类凸，而 $\operatorname{int}(C)\neq\varnothing$，因此 $F(A)+\operatorname{int}(C)$ 也为凸集，因此 F 为 C-次类凸的(由引理 1.1(ii)可知)。同理，$F(A)+C$ 为凸集可推得 $cl(F(A)+C)$ 为凸集，根据定义 1.1(5)可知 F 为近似 C-类凸，又因为 $cl(F(A)+C)$ 为凸集，因此 $cl(cone(F(A)+C))$ 也为凸集，根据定义 1.1(6)可知 F 为近似广义 C-次类凸。

定义 1.2 [14] 若 $\forall x_1,x_2\in A$，存在连续映射 $\eta_{x_1,x_2}:[0,1]\to A$，使得 $\eta_{x_1,x_2}(0)=x_1$，$\eta_{x_1,x_2}(1)=x_2$，则集合 $A\subseteq X$ 被称为弧连通的。

定义 1.3 [15] 设 $A\subseteq X$ 是非空的弧连通集，若对于 $\forall x_1,x_2\in A$，$t\in[0,1]$，有 $(1-t)F(x_1)+tF(x_2)\subseteq F(\eta_{x_1,x_2}(t))+C$，则集值映射 $F:A\to 2^Y$ 称为 C-弧连通的。

若对于 $\forall x_1,x_2\in A$，$t\in[0,1]$，有 $(1-t)F(x_1)+tF(x_2)\subseteq F(\eta_{x_1,x_2}(t))-C$，则集值映射 $F:A\to 2^Y$ 称为 $(-C)$-弧连通的。

引理 1.2 [16] (i) 若集值映射 $F:A\to 2^Y$ 为 C-弧连通的，则 $F(A)+C$ 为凸集。

(ii) F 为 C-弧连通 $\Rightarrow F$ 为 C-类凸。

引理 1.3 [17] 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均为弧连通空间，则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是弧连通空间。

定义 1.4 [18] 假设 X,Y 为拓扑空间，$F:X\to 2^Y$ 为集值映射，$x\in X$，若对于 Y 中的任意开集 V，都有 $F(x)\subset V$，存在 x 在 X 中的开邻域 U，对于 $\forall x'\in U$ 有 $F(x')\subset V$，则称 F 在 x 处为上半连续的，若 F 对于 X 上每一点都是上半连续的，则称 F 在 X 上是上半连续的。

同理，若对于 Y 中的任意开集 V，且 $V\cap F(x)\neq\varnothing$，存在 x 在 X 中的开邻域 U，对于 $\forall x'\in U$ 有 $V\cap F(x')\neq\varnothing$，则称 F 在 x 处为下半连续的，若 F 对于 X 上每一点都是下半连续的，则称 F 在 X 上是下半连续的。

显然，若 F 在 x 处既为上半连续的又为上半连续的，则称 F 在 x 处为连续的；F 在 X 上每一点都是连续的，则称 F 在 X 上是连续的。

引理 1.4 [18] 假设 F,G 均为集值映射，若 F 和 G 在 X 上都是上半连续的，则 $G\circ F$ 在 X 上也为上半连续的；同理，若 F 和 G 在 X 上都是下半连续的，则 $G\circ F$ 在 X 上也为下半连续的。很显然，若 F 和 G 在 X 上都是连续的，则 $G\circ F$ 在 X 上也为连续的。

引理 1.5 [19] $H(U)$ 为连通集，若满足以下条件：

(i) $U\subseteq X$ 为非空的连通集；

(ii) 对于 $\forall u\in U$，连通集 $H(u)$ 非空；

(iii) 集值映射 $H:U\to 2^Y$ 在 U 上是上半连续的。

引理 1.6 [20] 令 X,Y 是 Hausdorff 拓扑空间，当 X 是紧的，集值映射 $F:X\to 2^Y$ 上半连续，并且对于任意的 $x\in X$，$F(x)$ 为紧的，则 $F(X)$ 是紧的。

引理 1.7 [17] 设 X 是局部凸空间，则 $A\subset X$ 有界的充分必要条件是 $A\subset X_W$ 有界，其中 X_W 为 X 上弱拓扑相应的局部凸空间。

3. 带参数的 ε-超有效点集的连通性

设 $E\subset X$，$\Lambda\subset Z$ 分别为非空子集，$H:\Lambda\to 2^E$ 为集值映射，$F:E\times\Lambda\to 2^Y$ 为含有参数 $\lambda\in\Lambda$ 的集值映射，且对于 $\forall x\in E$，$\forall\lambda\in\Lambda$，$F(x,\lambda)\neq\varnothing$，$H(\lambda)\neq\varnothing$。

考虑以下带参数的集值向量优化问题(SVOP)：

$$\min_{x\in H(\lambda)} F(x,\lambda).$$

令 $F(H(\lambda),\lambda)=\bigcup_{x\in H(\lambda)}F(x,\lambda)$，且无特别说明，$\forall\lambda\in\Lambda$，$F(x,\lambda)$ 均定义在 $H(\lambda)$ 上。

定义 2.1 [4] 设 $\varepsilon\in C$，$\varnothing\neq D\subset Y$，$B$ 是 C 中的有界基，若 $\exists M>0$，$\exists U\in N(0)$，使得

$$cl\left[cone(D+\varepsilon-y)\right]\bigcap(U-C)\subset MU,$$

则称 $y\in D$ 为 D 的关于锥 C 的 ε-超有效点，记为 $y\in\varepsilon-SE(D,C)$。

定义 2.2 设 $x_0\in H(\lambda)$，$C\subset Y$ 且为具有有界基 B 的点闭凸锥，$N(0)$ 为 Y 中的零点邻域基，$y_0\in F(x_0,\lambda)$，若 $\exists U\in N(0)$，$\exists M>0$ 使得

$$cl\Big(cone\big(F(H(\lambda),\lambda)+\varepsilon-y_0\big)\Big)\bigcap(U-C)\subset MU$$

则称 $x_0\in H(\lambda)$ 为(SVOP)中的含参 ε-超有效解，$y_0\in F(x_0,\lambda)$ 为(SVOP)中的含参 ε-超有效点，并且(SVOP)中含参 ε-超有效点全体记作 $\varepsilon-SE\big(F(H(\lambda),\lambda),C\big)$。

接下来考虑由(SVOP)诱导的标量优化问题 $(P)_\varphi$：

$$\min_{x\in H(\lambda)}\varphi\big(F(x,\lambda)\big),\ \ \varphi\in Y^*\setminus\{0\}.$$

定义 2.3 [21] 设 $\varphi\in Y^*\setminus\{0\}$，$x_0\in A$，$\varepsilon\in C$，$x_0$ 称为 $(P)_\varphi$ 的 ε-最优解，(x_0,y_0) 称为 $(P)_\varphi$ 的 ε-最优元，如果存在 $y_0\in F(x_0)$，使得

$$\varphi(y_0)\le\varphi(y)+\varphi(\varepsilon),\ \ \forall y\in F(A), \tag{1}$$

将所有满足(1)式的点的集合称为(SVOP)的最优点集，用 $\varepsilon-E\big(F(A),(P)_\varphi\big)$ 表示。

引理 2.1 [3] 设 $A\subset X$，$\bar{y}\in F(A)$，B 是 C 的有界基且 C 为点闭凸锥，若 $F+\varepsilon-\bar{y}$ 在 A 上为近似广义 C-次类凸，则

$$\varepsilon-SE(F(A),C)=\bigcup_{\varphi\in\operatorname{int}C^*}\varepsilon-E\big(F(A),(P)_\varphi\big).$$

引理 2.2 [2] 设 $C \subset Y$ 为 C 中有有界基的闭锥，$D \subset Y$ 为非空的弱紧集，则 $\forall \varepsilon \in C$，$\varepsilon - SE(D,C) \neq \varnothing$。

引理 2.3 设 X,Y,Z 是局部凸 Hausdoff 拓扑线性空间，C 为 Y 中的点闭凸锥且具有有界基 B，$E \subset X$，$\Lambda \subset Z$ 均为非空的弧连通集，同时 E 为紧子集。若满足以下条件：

(i) $F: E\times\Lambda \to 2^Y$ 是上半连续的集值映射且在 $E\times\Lambda$ 上取弱紧值。(Y 上的拓扑为弱拓扑 $\sigma(Y^*,Y)$)。

(ii) $H:\Lambda \to 2^E$ 为集值映射，且 $\forall \lambda \in \Lambda$，$H(\lambda)$ 是非空的紧子集。

(iii) F 与 H 均为 C-弧连通的。

则 $\forall \lambda \in \Lambda$，$\varepsilon \in C$，$\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C) = \bigcup_{\varphi\in \mathrm{int}(C^*)} \varepsilon - E(F(H(\lambda),\lambda),(P)_\varphi)$ 且 $\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 非空。

证明：由于 E,Λ 均为弧连通集，根据引理 1.3 可知 $E\times\Lambda$ 为弧连通集，同理 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 也为弧连通集。又因为集值映射 F 在 $E\times\Lambda$ 上为 C-弧连通集，故 F 在 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 也为 C-弧连通集，根据引理 1.2(i)可知 $F(H(\lambda),\lambda)+C$ 为凸集，且 F 在 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 为 C-类凸，再根据注 1.1 可推得 F 在 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 为近似广义 C-次类凸，因此 $F+\varepsilon-\bar{y}$ 在 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 也为近似广义 C-次类凸，根据引理 2.1 可知

$$\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C) = \bigcup_{\varphi\in \mathrm{int}(C^*)} \varepsilon - E(F(H(\lambda),\lambda),(P)_\varphi).$$

再证 $\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 非空。

因为集值映射 $F: E\times\Lambda \to 2^Y$ 为上半连续的，故 $F: H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 也是上半连续的。又因为 F 在 $E\times\Lambda$ 上取弱紧值，故 F 在 $H(\lambda)\times\{\lambda\}$ 上也取弱紧值，根据引理 1.6 可知 $F(H(\lambda),\lambda)$ 为拓扑空间 $\sigma(Y^*,Y)$ 上的弱紧集，又因为 $F(H(\lambda),\lambda)+C$ 为凸集，因此 $F(H(\lambda),\lambda)$ 是 C-凸集，故 $F(H(\lambda),\lambda)$ 非空，即 $F(H(\lambda),\lambda)$ 为非空弱紧集。由引理 2.1 可知 $\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C) \neq \varnothing$，$\forall \lambda \in \Lambda$。

引理 2.4 设 X,Y,Z,F,H,E,Λ,C,B 等均与引理 2.3 一致，则

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$$

为非空的连通集。

证明：引理 2.3 已经证得 $\varepsilon - SE(F(H(\lambda),\lambda),C) \neq \varnothing$，故只需证明其为连通集。

定义集值映射 $T:\mathrm{int}(C^*) \to 2^{F(H(\lambda),\lambda)}$，$T(\varphi) = \varepsilon - E(F(H(\lambda),\lambda),(P)_\varphi)$，则

$$T(\varphi) = \left\{ y^* \in F(H(\lambda),\lambda) : \varphi(y^*) = \min\left\{ \varphi(y)+\varphi(\varepsilon) : y \in F(H(\lambda),\lambda) \right\} \right\}.$$

根据引理 1.5 分以下三部分证明：

(i) 证明 $\mathrm{int}(C^*) \subset Y^*$ 为非空的连通集。

因为凸集一定为连通集，因此证明 $\mathrm{int}(C^*)$ 为连通集，只需证明其为凸集即可。令 $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{int}(C^*)$，$\varepsilon \in C$，$\exists t_1 > 0$，$\exists t_2 > 0$，使得 $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{int}(C^*)$，$\forall b \in B$，有

$$f_1(b) = \varphi_1(b)+\varphi_1(\varepsilon) \geq t_1,\quad f_2(b) = \varphi_2(b)+\varphi_2(\varepsilon) \geq t_2.$$

再令 $t = \min\{t_1,t_2\}$，对于 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\forall b \in B$，有

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2)(b) &= (\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2)(b) + (\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2)(\varepsilon) \\ &= \lambda(\varphi_1(b)+\varphi_1(\varepsilon)) + (1-\lambda)(\varphi_2(b)+\varphi_2(\varepsilon)) \\ &\geq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \geq t\end{aligned}$$

因此 $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \in \mathrm{int}(C^*)$，故 $\mathrm{int}(C^*)$ 为凸集，很显然 $\mathrm{int}(C^*) \neq \varnothing$，故 $\mathrm{int}(C^*) \subset Y^*$ 为非空的连通集。

DOI: 10.12677/pm.2022.123040

(ii) 证明 $\forall\varphi\in\operatorname{int}(C^*)$，$T(\varphi)$ 为连通集。

设 $\forall x_1,x_2\in T(\varphi)$，存在 $y_1\in F(x_1)$，$y_2\in F(x_2)$，使得

$$\varphi(y_1)\le\varphi(y)+\varphi(\varepsilon),\ \varphi(y_2)\le\varphi(y)+\varphi(\varepsilon),\ \forall y\in F(H(\lambda),\lambda). \tag{2}$$

因为 $H(\lambda)$ 是弧连通集，故存在一个连续映射 $\eta_{x_1,x_2}:[0,1]\to H(\lambda)$，使得 $\eta_{x_1,x_2}(0)=x_1$，$\eta_{x_1,x_2}(1)=x_2$。

又因为 $F(x,\lambda)$ 在 $H(\lambda)$ 上是弧连通的，故

$$ty_1+(1-t)y_2\in tF(x_1)+(1-t)F(x_2)\subseteq F(\eta_{x_1,x_2}(t))+C,$$

$\forall t\in[0,1]$，$\exists c\in C$，$y_t\in F(\eta_{x_1,x_2}(t))$，使得 $ty_1+(1-t)y_2=y_t+c$，由 $c\in C$，$\varphi\in Y^*$ 及(2)式可知，$\forall y\in F(H(\lambda),\lambda)$ 有

$$\varphi(y_t)\le\varphi(y_t+c)=t\varphi(y_1)+(1-t)\varphi(y_2)\le\varphi(y)+\varphi(\varepsilon),$$

故 $\forall t\in[0,1]$，有 $\eta_{x_1,x_2}(t)\in l(\varphi)$，因此 $T(\varphi)$ 为凸集，即为连通集。

(iii) 证明集值映射 $T:\operatorname{int}(C^*)\to 2^{F(H(\lambda),\lambda)}$ 是上半连续的(其中 $\operatorname{int}(C^*)$ 的拓扑为强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$)。

由于 $F(H(\lambda),\lambda)$ 为弱紧集，易知对于 $\forall\varphi\in\operatorname{int}(C^*)$，$T(\varphi)\ne\varnothing$。(其中 $\operatorname{int}(C^*)$ 上的拓扑为强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$)，假设 T 在 $\operatorname{int}(C^*)$ 上不是上半连续的，则存在 $\varphi_0\in\operatorname{int}(C^*)$，使得 T 在 φ_0 上不是上半连续的。根据定义 1.4 可知存在 $T(\varphi_0)$ 的邻域 V，使得对 φ_0 的任意邻域 U，都存在 $\varphi\in U\cap\operatorname{int}(C^*)$，满足 $T(\varphi)\not\subset V$。

以及存在网 $\{\varphi_\alpha:\alpha\in\upsilon\}\subset\operatorname{int}(C^*)$，使得 $\varphi_\alpha\in U\cap\operatorname{int}(C^*)$，满足 $\varphi_\alpha\to\varphi_0$ (关于强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$)，且有 $T(\varphi_\alpha)\not\subset V$，$\forall\alpha\in\upsilon$。于是存在网 $\{x_\alpha:\alpha\in\upsilon\}$，有 $x_\alpha\in T(\varphi_\alpha)$，且 $x_\alpha\notin V$，$\forall\alpha\in\upsilon$。由于 $T(\varphi_\alpha)\ne\varnothing$ 可以取 $y_\alpha\in T(\varphi_\alpha)\subset F(x_\alpha)$，使得 $y_n\not\subset V$。又因为 $F(H(\lambda),\lambda)$ 为弱紧集，网 $\{y_n\}\subset F(H(\lambda),\lambda)$ 有收敛子序列，故取网 $\{y_n\}$ 收敛，使得 $y_n\to y_0\in F(H(\lambda),\lambda)$。而 V 是开集，故 $y_0\notin V$，由 $y_n\in T(\varphi_n)$ 可知 $y_n\in F(H(\lambda),\lambda)$ 且 $\forall y\in F(H(\lambda),\lambda)$，$n=1,2,3,\cdots$ 有

$$\varphi_n(y_n)\le\varphi_n(y)+\varphi_n(\varepsilon). \tag{3}$$

又因为 $F(H(\lambda),\lambda)$ 在 Hausdoff 空间中为弱紧集，故 $F(H(\lambda),\lambda)$ 是闭集，因此有 $y_0\in F(H(\lambda),\lambda)$。令(3)中的 $n\to+\infty$ 得到

$$\varphi_0(y_0)\le\varphi_0(y)+\varphi(\varepsilon),\ \forall y\in F(H(\lambda),\lambda).$$

故 $y_0\in T(\varphi_0)\subset V$，与 $y_0\not\subset V$ 矛盾，因此 $T(\varphi)$ 在 $\operatorname{int}(C^*)$ 为上半连续。

根据引理 1.5，引理 2.3 及上述证明可以得出 $\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 为非空连通集。

定理 2.1 设 X,Y,Z 是局部凸 Hausdoff 拓扑线性空间，$E\subset X$ 为非空的弧连通紧子集，$\Lambda\subset Z$ 为非空的弧连通集，C 为 Y 中的点闭凸锥且具有有界基 B，若满足以下条件：

(i) $F:E\times\Lambda\to 2^Y$ 是上半连续的集值映射且在 $E\times\Lambda$ 上取弱紧值。(Y 上的拓扑为弱拓扑 $\sigma(Y^*,Y)$)。

(ii) $H:\Lambda\to 2^E$ 为集值映射，且 $\forall\lambda\in\Lambda$，$H(\lambda)$ 是非空的紧子集。

(iii) F 与 H 均为 C-弧连通的。

(iv) $\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)=\bigcup_{\varphi\in C_\Omega}\varepsilon-E(F(H(\lambda),\lambda),(P)_\varphi)$，$\forall\lambda\in\Lambda$，($C_\Omega\subset\operatorname{int}(C^*)$ 为关于强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$ 的紧子集)，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 是非空的连通集。

证明：首先引理 2.3 已证得 $\forall\lambda\in\Lambda$，$\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)\ne\varnothing$，故

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)\ne\varnothing.$$

再证 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 的连通性，定义集值映射 $\omega:\Lambda\to 2^Y$，使得

$$\omega(\lambda)=\varepsilon-SE(F(H(\lambda),\lambda),C).$$

由引理 2.4 已知 $\varepsilon - SE\left(F\left(H(\lambda),\lambda\right),C\right)$ 是连通集，故 $\omega(\lambda)$ 是连通的，又因为 Λ 是弧连通的，因此 Λ 也是连通的，根据引理 1.5 只需再证得 $\omega:\Lambda \to 2^{Y}$ 是上半连续的即可证明 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon - SE\left(F\left(H(\lambda),\lambda\right),C\right)$ 是连通集。

使用反证法证明，假设 $\exists\lambda_0\in\Lambda$，使得映射 ω 不是上半连续的。则存在 $\omega(\lambda_0)$ 的弱开邻域 V' 及网 $\{\lambda_\tau:\tau\in\Gamma\}\subset \operatorname{int}\left(C^*\right)$，且有 $\lambda_\tau\to\lambda_0$，使得

$$\omega(\lambda_\tau)\not\subset V',\ \forall\tau\in\Gamma,$$

因此存在网 $\{y_\tau:\tau\in\Gamma\}$，使得

$$y_\tau\in\omega(\lambda_\tau),\ y_\tau\not\subset V',\ \forall\tau\in\Gamma. \tag{4}$$

因为 C_Ω 是紧的且网 $\{\varphi_\tau\}\subset C_\Omega$，故假设 $\exists\varphi_0\in C_\Omega$ 使得 $\varphi_\tau\to\varphi_0$。由于 $F(x,y)$ 和 $H(\lambda)$ 是连续的集值映射，则 $F(x,y)$ 和 $H(\lambda)$ 均上半连续且下半连续，根据引理 1.4 可知 $\forall\lambda\in\Lambda$，$F\left(H(\lambda),\lambda\right)$ 上半连续且下半连续，因此 $\forall h_0\in F\left(H(\lambda_0),\lambda_0\right)$，$\exists h_\tau\in F\left(H(\lambda_\tau),\lambda_\tau\right)$，满足 $h_\tau\to h_0$。又因为 $y_\tau\in\omega(\lambda_\tau)$，因此 $\exists f_\tau\in C_\Omega$，使 $y_\tau\in\varepsilon - E\left(F\left(H(\lambda_\tau),\lambda_\tau\right),(P)_{\varphi_\tau}\right)$ 成立，根据定义 2.3，$\forall h_\tau\in F\left(H(\lambda_\tau),\lambda_\tau\right)$，有

$$\varphi_\tau(y_\tau)\le\varphi_\tau(h_\tau)+\varphi_\tau(\varepsilon). \tag{5}$$

由引理 2.3 可知 $F\left(H(\lambda),\lambda\right)$ 是弱紧的，故 $F\left(H(\lambda_0),\lambda_0\right)$ 也是弱紧的。又因为 $F\left(H(\lambda),\lambda\right)$ 是上半连续的，因此假设 $\exists y_0\in F\left(H(\lambda_0),\lambda_0\right)$，使得 $y_\tau\to y_0$。设 $Q=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}F\left(H(\lambda),\lambda\right)$，易知 Q 也是弱紧的，且弱有界，由引理 1.7 可知 Q 为有界集。记

$$I_Q\left(y^*\right)=\sup\left\{\left|y^*(h_\tau)+y^*(\varepsilon)\right|:h_\tau\in F\left(H(\lambda),\lambda\right)\right\},\ y^*\in Y^*,$$

其中 I_Q 为 Y^* 上的连续半范。由 $\varphi_\tau\to\varphi_0$ 可知，$\exists\tau_0\in\Gamma$，当 $\forall\tau\ge\tau_0$ 时，有

$$I_Q(\varphi_\tau-\varphi_0)=\sup\left\{\left|\varphi_\tau(h_\tau)+\varphi_\tau(\varepsilon)-\varphi_0(h_\tau)-\varphi_0(\varepsilon)\right|:h_\tau\in F\left(H(\lambda),\lambda\right)\right\}<\theta.$$

故 $\forall h_\tau\in F\left(H(\lambda),\lambda\right)$，$\forall\tau\ge\tau_0$，有 $\left|\varphi_\tau(h_\tau)+\varphi_\tau(\varepsilon)-\varphi_0(h_\tau)-\varphi_0(\varepsilon)\right|<\theta$。由(5)得

$$\left|\varphi_\tau(y_\tau)-\varphi_0(y_\tau)\right|<\theta,\ \forall\tau\ge\tau_0. \tag{6}$$

又由于 $y_\tau\to y_0$，故 $\exists\tau_1\in\Gamma$，使得

$$\left|\varphi_0(y_\tau)-\varphi_0(y_0)\right|<\theta,\ \forall\tau\ge\tau_1. \tag{7}$$

结合(6)和(7)，$\forall\tau\ge\tau_0$，$\forall\tau\ge\tau_1$，有

$$\left|\varphi_\tau(y_\tau)-\varphi_0(y_0)\right|\le\left|\varphi_\tau(y_\tau)-\varphi_0(y_\tau)\right|+\left|\varphi_0(y_\tau)-\varphi_0(y_0)\right|\le\theta+\theta=2\theta,$$

因此有

$$\lim_\tau\varphi_\tau(y_\tau)=\lim_\tau\varphi_0(y_0),$$

同理可得

$$\lim_\tau\varphi_\tau(h_\tau)=\lim_\tau\varphi_0(h_0).$$

对(5)式两边同时取极限可得

$$\varphi_0(y_0)\le\varphi_0(h_0)+\varphi_0(\varepsilon),\ \forall h_0\in F\left(H(\lambda_0),\lambda_0\right),$$

故 $y_0\in\omega(\lambda_0)\subseteq V'$。由于 V_1 是弱开邻域，$y_\tau\to y_0$，因此 $\exists\tau_2\in\Gamma$，使得 $y_\tau\in V'$，$\forall\tau\ge\tau_2$，与(4)式相矛盾，故 ω 在 Λ 上是上半连续的。

综上所述，根据引理 1.5 可知 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varepsilon-SE\left(F\left(H\left(\lambda\right),\lambda\right),C\right)$ 为连通集。

基金项目

国家自然科学基金(11061023)；江西省自然科学基金(2010GZS0176)。

参考文献

[1] 凌晨. 集值映射向量优化问题的 ε-超有效解(英文) [J]. 运筹学学报, 2001, 5(3): 51-56.

[2] 邵建英. 集值向量优化问题 ε-超有效解的性质[J]. 应用数学与计算数学学报, 2003(1): 67-72.

[3] 戎卫东, 高彩霞. 集值映射向量优化问题 ε-超有效解集的连通性(英文) [J]. 运筹学学报, 2005, 9(1): 43-48.

[4] 刘涛. 集值向量优化问题 ε-超有效解集的连通性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(3): 297-299.

[5] 曹敏, 汪洋, 陈剑尘. 含约束集值映射超有效解集的连通性[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(23): 241-246.

[6] 赖遵远, 陈剑尘, 刘富荣. 含参数集值向量优化问题强有效点集的连通性[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(21): 242-249.

[7] Corley, H.W. (1988) Optimality Conditions for Maximizations of Set-Valued Functions. *Journal of Optimization Theory & Applications*, **58**, 1-10. https://doi.org/10.1007/BF00939767

[8] Li, Z.F. (1997) Lagrangian Multipliers, Saddle Points, and Duality in Vector Optimization of Set-Valued Maps. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **215**, 297-316. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5568

[9] Li, Z.F. (1998) Benson Proper Efficiency in the Vector Optimization of Set-Valued Maps. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **98**, 623-649. https://doi.org/10.1023/A:1022676013609

[10] Yang, X.M., Yang, X.Q. and Chen, G.Y. (2000) Theorems of the Alternative and Optimization with Set-Valued Maps. *Journal of Optimization Theory & Applications*, **107**, 627-640. https://doi.org/10.1023/A:1026407517917

[11] Gong, X.H. (2005) Optimality Conditions for Henig and Globally Proper Efficient Solutions with Ordering Cone Has Empty Interior. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **307**, 12-31. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.001

[12] Wang, S.-Y., *et al*. (2011) ε-Super Efficient Solutions of Optimization Problems with Set-Valued Maps in Locally Convex Space. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, No. 1, 26-31.

[13] 仇秋生, 傅万涛. 集值映射最优化问题超有效解集的连通性[J]. 系统科学与数学, 2002, 22(1): 107-114.

[14] Avriel, M. and Zang, I. (1980) Generalized Arcwise-Connected Functions and Characterizations of Local-Global Minimum Properties. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **32**, 407-425. https://doi.org/10.1007/BF00934030

[15] Lalitha, C.S., Dutta, J. and Govil, M.G. (2003) Optimality Criteria in Set-Valued Optimization. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **75**, 221-232. https://doi.org/10.1017/S1446788700003736

[16] 陈剑尘, 高洁. 含约束集值优化问题 Henig 有效解集的连通性[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2012, 26(3): 22-27.

[17] 徐登州. 拓扑线性空间[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1987.

[18] Klein, E. and Thompson, A.C. (1984) Theory of Correspondences: Including Applications to Mathematical Economics. Wiley, Hoboken.

[19] Hiriart-Urruty, J.B. (1985) Images of Connected Sets by Semicontinuous Multifunctions. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **111**, 407-422. https://doi.org/10.1016/0022-247X(85)90225-2

[20] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (2006) Applied Nonlinear Analysis. Dover Publications, New York.

[21] 王淑玉, 刘万里. 局部凸空间中集值优化问题的 ε-超有效解(英文) [J]. 数学季刊, 2011, 26(1): 26-31.