

# 牛顿公式的两种证明及应用

李旭涵, 姜嘉美

东北大学秦皇岛分校数学与统计学院, 河北 秦皇岛

收稿日期: 2022年2月16日; 录用日期: 2022年3月18日; 发布日期: 2022年3月25日

---

## 摘要

本文首先对牛顿(Newton)公式的两种主流证明方法——多项式的比较系数法和数学归纳法进行总结。其次, 对一个条件恒等式进行反思探究, 利用牛顿公式对其推广, 从理论上给出一类等次幂和式的证明, 最终得到了新的命题。

## 关键词

牛顿公式, 对称多项式, 数学归纳法, 等次幂和式

---

# Two Proofs and Applications of Newton Formula

Xuhan Li, Jiamei Jiang

Faculty of Mathematics and Statistics, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao Heibei

Received: Feb. 16<sup>th</sup>, 2022; accepted: Mar. 18<sup>th</sup>, 2022; published: Mar. 25<sup>th</sup>, 2022

---

## Abstract

This paper first summarizes two mainstream methods of proving Newton Formula—the method of comparing coefficients of polynomials and the method of mathematical induction. Next, a conditional constant equation is explored reflectively, and its generalization using Newton Formula is used to give a theoretical proof of a class of equal powers and equations, which eventually leads to a new proposition.

## Keywords

Newton Formula, Symmetric Polynomial, Mathematical Induction, Equal Powers and Equations

---



## 1. 引言

段学复先生在其《对称》一书中介绍了17世纪大数学家牛顿的一个公式, 即为一元 $n$ 次多项式 $n$ 个根的任一正整数次幂都可以用这 $n$ 个根的对称多项式表示, 该公式被称为牛顿(Newton)公式[1]。该公式在组合数学和数值计算等方面有着重要作用。

前人对牛顿公式的研究以证明为主。顾江永老师从次幂和的角度对Newton公式进行证明及推广, 并给出了一个较为简洁且直观的结论[2]。沈南山老师对Newton公式的条件进行了推广, 使两个结论得到了统一[3]。詹国梁老师使用比较系数法证明Newton公式, 并将其应用于初等数学的经典题目中[4]。

等次幂和式形式工整, 体现了数学之美。作者给出一类等次幂和式的推广命题, 便于对其进行更深层次的研究。

## 2. 预备知识

### 2.1. 对称多项式

对称多项式中任何两个元互换, 所得结果都与原式相同。而初等对称多项式 $\sigma_i$ 为任意 $i$ 元乘积之和, 形如

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \quad \cdots, \quad \sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

### 2.2. 第二数学归纳法

设有一个与自然数 $n$ 有关的命题, 如果

- 1) 当 $n=1$ 时, 命题成立;
- 2) 假设当 $n < k$ 时, 命题成立;
- 3) 证明 $n=k$ 时, 命题也成立。

由1) 2) 3)可知, 命题对于一切自然数 $n$ 都成立。

### 2.3. 多项式因式分解定理

每个次数不小于1的实系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积。

## 3. 牛顿公式及其证明

### 3.1. 牛顿公式[5]

$$\begin{cases} S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^{k-1} S_1\sigma_{k-1} + (-1)^k \cdot k\sigma_k = 0, & 1 \leq k \leq n \\ S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 + \cdots + (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0, & k > n \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

是一类特殊的对称多项式,  $\sigma_k$ 是初等对称多项式,  $n$ 是实系数多项式完全分解后根的个数,  $k$ 是实系数多项式的次数, 特别地,  $S_0 = n$ ,  $S_1 = \sigma_1$ 。

### 3.2. 比较系数法证明

#### 3.2.1. 引出

我们通过证明下面一个式子进而证明牛顿(Newton)公式:

$$x^{k+1}f'(x) = (S_0x^k + S_1x^{k-1} + \cdots + S_{k-1}x + S_k)f(x) + g(x) \quad (2)$$

其中,  $g(x)$  的次数小于  $n$ 。

证明: 设

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

取对数求导, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}$$

$$\therefore f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{x-x_i}$$

$$\therefore x^{k+1}f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1}f(x)}{x-x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1})f(x)}{x-x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$$

设  $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$ , 由此,  $g(x)$  的次数小于  $n$

$$\begin{aligned} \therefore x^{k+1}f'(x) &= \sum_{i=1}^n \left[ (x^k + x_i x^{k-1} + \cdots + x_i^k) f(x) \right] + g(x) \\ &= (S_0x^k + S_1x^{k-1} + \cdots + S_k) f(x) + g(x) \end{aligned}$$

(2)式得证。

#### 3.2.2. 证明

$$\text{又} \because f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

$$\therefore x^{k+1}f'(x) = x^{k+1} \left[ nx^{k-1} - (n-1)\sigma_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \right]$$

由(2)式,

$$\begin{aligned} & (S_0x^k + S_1x^{k-1} + \cdots + S_k) \left[ x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n \right] + g(x) \\ &= x^{k+1} \left[ nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

比较(3)式的左右两边, 由于左右两边  $x^n$  的系数相同, 得

$$\text{当 } 1 \leq k \leq n \text{ 时, } S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1} S_1\sigma_{k-1} + (-1)^k \cdot k\sigma_k = 0$$

$$\text{当 } k > n \text{ 时, } S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0$$

(1)式得证。

### 3.3. 数学归纳法证明

设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n \quad (4)$$

用  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  分别替换  $x$ , 得

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0 \quad (5)$$

(5)式实际上给出了  $n$  个式子。

当  $k \geq n$  时, 用  $x_i^{k-n} (i=1, 2, \dots, n)$  乘(5)式的两边, 并对这  $n$  个式子求和, 得

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0 \quad (6)$$

$\therefore$  当  $k = n$  时,

$$S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot n \sigma_n = 0 \quad (7)$$

根据(7)式猜想  $k < n$  时的情况:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^k \cdot k \sigma_k = 0 \quad (8)$$

记(8)式左端的  $n$  元齐次多项式为  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 它为  $n$  元对称多项式。

下面我们对  $m = n - k$  作数学归纳法来证明  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是零多项式[6]。

由(7)式,  $m = 0$  时, 所证成立。

假设  $n - k < m (m > 0)$  时所证成立, 下证当  $n - k = m$  时所证也成立。

先将不定元的个数设为  $n-1$ , 用  $x_1, \dots, x_{n-1}, 0$  替换  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ , 代入(8)式左端, 可得

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^k \cdot k \sigma_k \quad (9)$$

(9)式即为  $f_{k,n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , 又由于  $n-1-k = m-1 < m$ ,  $f_{k,n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ , 即  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ 。

$$\text{记 } f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + u_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n + \cdots + u_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n^k \quad (10)$$

$$\therefore f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (11)$$

因此  $u_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ , 从而由(10)式得  $x_n \mid f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

所以存在  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  使得

$$f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)x_n \quad (12)$$

由于  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  次对称多项式, 因此对于任一  $n$  元排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  有

$$f_{k,n}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (13)$$

由(12)式和(13)式得

$$h(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})x_{j_n} = f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (14)$$

由(14)式可知  $x_1, x_2, \dots, x_n$  都是  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的因式, 且它们都是不可约的, 由唯一分解定理可得

$$f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15)$$

若  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , 则

$$k = n + \deg[g(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (16)$$

据此,  $\deg[g(x_1, x_2, \dots, x_n)] = k - n = -m < 0$ , 与  $m > 0$  矛盾。因此  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 。

因此, 对一切  $m \geq 0$  有  $f_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , 即当  $1 \leq k \leq n$  时, (8) 式成立。

综上, (1) 式成立。

## 4. 应用

在高等代数及数学竞赛中, 经常会遇到一些等次幂和及其有关的问题, 此类题难度系数较大, 往往无从下手。而牛顿公式可以将这类问题统一化为初等对称多项式进行处理并解决, 解题过程较为简洁清晰。

### 4.1. 引出

现通过一道例题引出牛顿公式的应用。

已知  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ ,

求证:  $\frac{a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5}{5} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3}{3} \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2}$

证明: 由已知得该方程为 4 次方程。

当  $k \leq 4$  时, 有

$$S_1 = \sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2$$

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3\sigma_3$$

$$a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 = S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$$

当  $k > 4$  时, 有

$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 = S_5 = -5\sigma_2\sigma_3$$

$$\therefore \text{所证即为 } \frac{S_5}{5} = \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_2}{2}$$

$$\text{而 } \frac{S_5}{5} = -\sigma_2\sigma_3, \quad \frac{S_3}{3} = \sigma_3, \quad \frac{S_2}{2} = -\sigma_2$$

$$\therefore \frac{S_5}{5} = \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_2}{2} \quad (\text{证毕})$$

### 4.2. 命题及其证明

对于 4.1 这类等式, 我们探讨两个一般性问题:

- 1) 这类等式能否加以推广?
- 2) 这类等式能够推广的条件应该是什么?

针对上述问题, 我们提出如下命题:

对于某一个  $2n-1$  或  $2n$  次方程有  $S_1 = S_3 = \dots = S_{2n-5} = S_{2n-3} = 0$  (其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 那么有

$$\frac{S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{S_{2n-1}}{2n-1} \cdot \frac{S_2}{2}.$$

证明:

- 1) 对于  $2n$  次方程
- 当  $k \leq 2n$  时

有

$$\begin{aligned}
 S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} + x_{2n} = \sigma_1 \\
 S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
 S_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2n-1}^3 + x_{2n}^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\
 &\vdots \\
 S_{2n-1} &= x_1^{2n-1} + x_2^{2n-1} + \cdots + x_{2n-1}^{2n-1} + x_{2n}^{2n-1} = S_{2n-2}\sigma_1 - S_{2n-3}\sigma_2 + \cdots - S_1\sigma_{2n-2} + (2n-1)\sigma_{2n-1} \\
 S_{2n} &= x_1^{2n} + x_2^{2n} + \cdots + x_{2n-1}^{2n} + x_{2n}^{2n} = S_{2n-1}\sigma_1 - S_{2n-2}\sigma_2 + \cdots + S_1\sigma_{2n-1} - 2n\sigma_{2n}
 \end{aligned}$$

当  $k = 2n + 1$  (即  $k > 2n$ ) 时

$$\begin{aligned}
 S_{2n+1} &= x_1^{2n+1} + x_2^{2n+1} + \cdots + x_{2n-1}^{2n+1} + x_{2n}^{2n+1} = S_{2n}\sigma_1 - S_{2n-1}\sigma_2 + \cdots + S_2\sigma_{2n-1} - S_1\sigma_{2n} \\
 &\therefore S_1 = S_3 = \cdots = S_{2n-5} = S_{2n-3} = 0 \tag{17}
 \end{aligned}$$

$\therefore$  将(17)式代入上述算式中, 得  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = \cdots = \sigma_{2n-3} = 0$

$$\therefore S_2 = -2\sigma_2$$

$$S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$$

$$S_6 = -2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 - 6\sigma_6$$

$\vdots$

$$S_{2n-1} = (2n-1)\sigma_{2n-1}$$

$$S_{2n} = -S_{2n-2}\sigma_2 - S_{2n-4}\sigma_4 - \cdots - S_2\sigma_{2n-2} - 2n\sigma_{2n}$$

$$\begin{aligned}
 S_{2n+1} &= -S_{2n-1}\sigma_2 + S_2\sigma_{2n-1} \\
 &= -(2n-1)\sigma_{2n-1}\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_{2n-1} \\
 &= -(2n+1)\sigma_2\sigma_{2n-1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S_{2n+1}}{2n+1} = -\sigma_2\sigma_{2n-1},$$

$$\frac{S_{2n-1}}{2n-1} = \sigma_{2n-1},$$

$$\frac{S_2}{2} = -\sigma_2$$

$$\therefore \frac{S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{S_{2n-1}}{2n-1} \cdot \frac{S_2}{2}$$

2) 对于  $2n-1$  次方程

当  $k \leq 2n-1$  时

有

$$\begin{aligned}
 S_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} = \sigma_1 \\
 S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n-1}^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
 S_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2n-1}^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$S_{2n-1} = x_1^{2n-1} + x_2^{2n-1} + \cdots + x_{2n-1}^{2n-1} = S_{2n-2}\sigma_1 - S_{2n-3}\sigma_2 + \cdots - S_1\sigma_{2n-2} + (2n-1)\sigma_{2n-1}$$

当  $k > 2n-1$  时

$$S_{2n} = x_1^{2n} + x_2^{2n} + \cdots + x_{2n-1}^{2n} = S_{2n-1}\sigma_1 - S_{2n-2}\sigma_2 + \cdots + S_2\sigma_{2n-2} - S_1\sigma_{2n-1}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n}\sigma_1 - S_{2n-1}\sigma_2 + \cdots + S_2\sigma_{2n-1}$$

$\therefore$  将(17)式代入上述算式中, 得  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = \cdots = \sigma_{2n-3} = 0$

$$\therefore S_2 = -2\sigma_2$$

$$S_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$$

$$S_6 = -2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 - 6\sigma_6$$

$\vdots$

$$S_{2n-1} = (2n-1)\sigma_{2n-1}$$

$$S_{2n} = -S_{2n-2}\sigma_2 - S_{2n-4}\sigma_4 - \cdots - S_2\sigma_{2n-2} - 2n\sigma_{2n}$$

$$S_{2n+1} = -S_{2n-1}\sigma_2 + S_2\sigma_{2n-1}$$

$$= -(2n-1)\sigma_{2n-1}\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_{2n-1}$$

$$= -(2n+1)\sigma_2\sigma_{2n-1}$$

$$\therefore \frac{S_{2n+1}}{2n+1} = -\sigma_2\sigma_{2n-1},$$

$$\frac{S_{2n-1}}{2n-1} = \sigma_{2n-1},$$

$$\frac{S_2}{2} = -\sigma_2$$

$$\therefore \frac{S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{S_{2n-1}}{2n-1} \cdot \frac{S_2}{2} \quad (\text{证毕})$$

## 参考文献

- [1] 段学复. 对称[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964.
- [2] 顾江永. Newton 公式的一个注记及其应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2016, 25(3): 4-6.
- [3] 沈南山. 牛顿(Newton)公式的一个注记及其应用[J]. 数学通报, 2005(3): 38-39.
- [4] 詹国梁. 高等数学指导初等数学偶得(二)——牛顿公式及其应用[J]. 苏州教育学院学报, 1987(1): 8-11+7.
- [5] 北京大学数学系前代数小组, 编. 高等代数[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [6] 丘维声. 高等代数——大学高等代数课程创新教材[M]. 第2版(下). 北京: 清华大学出版社, 2019.