Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 514-524
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124057

Hans汉斯

解析拉格朗日乘数法求条件极值

贾瑞玲，张冬燕，孙铭娟

信息工程大学，河南 郑州

收稿日期：2022年3月2日；录用日期：2022年4月5日；发布日期：2022年4月12日

摘 要

拉格朗日乘数法作为一种解决条件极值问题的优化算法，在实际问题中占有重要地位，各类数学分析教程中都介绍了该方法。尽管学生可以很快掌握它，但绝大多数人对其始末缘由处于一知半解的状态。本文站在初学者的角度，首先从极值的必要条件入手，利用微分法，由浅入深地探讨条件极值的必要条件，进而引出拉格朗日乘数法；其次，结合极值点的充分条件，利用二阶微分的正负号判断该点是否为极值点；最后，介绍了拉格朗日乘数法在一些典型问题中的应用。旨在帮助学生透彻地理解和掌握该方法。因其具有较强的实用性，故它有利于培养学生的发散性思维和创新性思维，能有效提高学生分析问题、解决问题的能力。

关键词

条件极值，拉格朗日乘数法，不等式，二阶微分

Analytic Lagrange Multiplier Method to Obtain Conditional Extremum

Ruiling Jia, Dongyan Zhang, Mingjuan Sun

Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Mar. 2nd, 2022; accepted: Apr. 5th, 2022; published: Apr. 12th, 2022

Abstract

As an optimization algorithm to solve conditional extremum problem, Lagrange multiplier method plays an important role in practical problems. This method is introduced in various mathematical analysis tutorials. Although learners can quickly grasp the method, most people are in a state of half-understanding of its cause and effect. From a beginner's point of view, firstly this paper discusses the necessary conditions of conditional extremum problem using differential method, based on the necessary conditions of extremum problem. Then, the Lagrange multiplier me-

文章引用: 贾瑞玲, 张冬燕, 孙铭娟. 解析拉格朗日乘数法求条件极值[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 514-524.
DOI: 10.12677/pm.2022.124057

thod is discussed. Secondly, combined with the sufficient conditions of extremum point, the positive or negative signs of the second-order differential are used to judge whether the point is an extremum point. Finally, the application of Lagrange multiplier method in some typical problems is presented. The purpose is to help learners understand and master the method thoroughly. This method has strong practicability, so it is helpful to cultivate students' divergent thinking and innovative thinking, and can effectively improve students' ability to analyze and solve problems.

Keywords

Conditional Extremum, Lagrange Multiplier Method, Inequality, The Second-Order Differential

1. 引言

在一元函数微积分学中，我们讨论了在只有一个自变量的情况下，如何解决诸如用料最省、路程最短、收益最大等问题；但实际问题一般总受多个因素的制约，因此有必要讨论多元函数的最值问题。与一元函数类似，多元函数的最值与极值有着密切联系，故先引入极值。

自变量都是在函数定义域内取值的，除此之外对自变量没有“额外”限制，这样的极值问题称为(无条件)极值。对自变量除定义域限制外，还有其他“附加条件”的极值问题称为条件极值。对于(无条件)极值，学生较容易理解和接受；对于条件极值，当约束条件的形式较为简单时可采用消元法，将条件极值转化为极值问题。但当问题的维数增加以及约束条件变得较复杂时，消元法常常失效，这就需要寻求新的方法，即拉格朗日乘数法；它对于求解条件极值问题非常有效，在约束优化问题中起着举足轻重的作用。

关于拉格朗日乘数法有许多研究成果。如陈建发[1]利用梯度和方向导数的概念讨论函数在曲线和曲面上的变化率，从而给出拉格朗日乘数法的一个直观解释；周淑娟等[2]结合几何直观给出拉格朗日乘数法的诞生历程；叶正麟等[3]借助线性代数理论介绍了拉格朗日乘数法的导出思路，以帮助初学者深入理解该方法；贾迪媛等[4]探讨了拉格朗日乘数法在几何及偏微分方程中的应用。但他们都侧重研究拉格朗日乘数法的几何意义及其在几何上的应用。尽管绝大多数人较容易掌握该方法，但对其推导过程知之者甚少。鉴于此，在前人研究的基础上，本文从初学者角度出发，基于极值问题的必要条件，利用微分法，层层递进，详细介绍拉格朗日乘数法的来龙去脉；并通过典型例题的分析演示该方法的使用。以期能帮助学生更好地理解和掌握极值这部分内容，为后续课程的学习打下坚实基础。

2. 准备知识

本文所用到的极值概念和极值的判断，详细内容可参看文献[5] [6] [7] [8]。

定义 1 设 $f(p)$ 在 p_0 的某邻域内 $U(p_0,\delta)$ 内满足： $f(p)\le f(p_0)$， $\forall p\in U(p_0,\delta)$，则 p_0 是函数的极大值点， $f(p_0)$ 为函数的极大值；类似地，若 $f(p)\ge f(p_0)$， $\forall p\in U(p_0,\delta)$，则 p_0 是函数的极小值点， $f(p_0)$ 为函数的极小值。

定义 2 偏导数同时为零的点称为函数的驻点。

定理 3 (极值点的必要条件)设 p_0 是函数 $f(x,y)$ 的极值点，则：若 $f(x,y)$ 在点 p_0 的偏导数存在，必有 $f_x(p_0)=0$， $f_y(p_0)=0$；或 $f(x,y)$ 在点 p_0 的偏导数 $f_x(p_0)$， $f_y(p_0)$ 至少有一个不存在。

定理 4 (极值点的充分条件) p_0 是函数 $f(x,y)$ 的驻点， $f(x,y)$ 在 p_0 附近具有二阶连续偏导数，记 $A=f_{xx}(p_0)$， $B=f_{xy}(p_0)$， $C=f_{yy}(p_0)$， $H=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$，则

1) 当 H 正定时， p_0 是极小值点， $f(p_0)$ 是极小值；
2) 当 H 负定时， p_0 是极大值点， $f(p_0)$ 是极大值；
3) 当 $|H|<0$ 时， p_0 不是极值点， $f(p_0)$ 不是极值；
4) 当 $|H|=0$ 时，无法判断 p_0 是否为极值点。

3. 条件极值的探讨

研究 $z=f(x,y,u,v)$ 在约束条件 $\begin{cases} g(x,y,u,v)=0 \\ h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 下的极值问题，其中 $\dfrac{D(g,h)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}\neq 0$；

注 以下假设函数满足计算所需要的相应条件。

分析 假设 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 是极值点，先讨论该点成为极值点的必要条件；

因 $\dfrac{D(g,h)}{D(u,v)}\neq 0$，故 $\begin{cases} g(x,y,u,v)=0 \\ h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 可确定隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$；此时 $z=f(x,y,u(x,y),v(x,y))$ 作为 x,y 的二元函数，它在点 (x_0,y_0) 取得极值，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$， $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$；利用隐函数求导，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y+f_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial y}$；即 (x_0,y_0) 满足方程

$$\begin{cases} f_x+f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (1') \\ f_y+f_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 & (2') \end{cases}$$

注意到条件极值点 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 有 4 个坐标分量，方程 $(1')$ 和 $(2')$ 只能确定两个分量，故还需借助约束条件，即若 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 是条件极值点，应满足方程

$$\begin{cases} f_x+f_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (1') \\ f_y+f_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+f_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 & (2') \\ g(x,y,u,v)=0 & (3') \\ h(x,y,u,v)=0 & (4') \end{cases}$$

即该方程组的解为可能的条件极值点。另外注意到，该方程组的求解非常复杂、繁琐，为此进行改进，这里采用微分法。 $(1')\times \mathrm{d}x+(2')\times \mathrm{d}y$ 得，

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_u\mathrm{d}u+f_v\mathrm{d}v=0 \quad (5'),$$

对 $g(x,y,u,v)=0$ 和 $h(x,y,u,v)=0$ 同时微分得，

$$g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y+g_u\mathrm{d}u+g_v\mathrm{d}v=0 \quad (6'),$$

$$h_x\mathrm{d}x+h_y\mathrm{d}y+h_u\mathrm{d}u+h_v\mathrm{d}v=0 \quad (7'),$$

DOI: 10.12677/pm.2022.124057

由$(5')+(6')\times\lambda+(7')\times\beta$，$\forall\lambda,\beta\in R$，得

$$\left(f_x+\lambda g_x+\beta h_x\right)\mathrm{d}x+\left(f_y+\lambda g_y+\beta h_y\right)\mathrm{d}y+\left(f_u+\lambda g_u+\beta h_u\right)\mathrm{d}u+\left(f_v+\lambda g_v+\beta h_v\right)\mathrm{d}v=0 \quad (8'),$$

假设f关于u和v不恒为常数，结合$\begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}=\dfrac{D(g,h)}{D(u,v)}\neq 0$，则方程组

$$\begin{cases} f_u+\lambda g_u+\beta h_u=0 & (3) \\ f_v+\lambda g_v+\beta h_v=0 & (4) \end{cases}$$

有唯一非零解$(\lambda,\beta)\neq(0,0)$，故可选取合适的(λ,β)使得$\begin{cases} f_u+\lambda g_u+\beta h_u=0 & (3) \\ f_v+\lambda g_v+\beta h_v=0 & (4) \end{cases}$成立，此时$(8')$变为

$$\left(f_x+\lambda g_x+\beta h_x\right)\mathrm{d}x+\left(f_y+\lambda g_y+\beta h_y\right)\mathrm{d}y=0 \quad (9'),$$

又因为$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}y$线性无关，故必有

$$\begin{cases} f_x+\lambda g_x+\beta h_x=0 & (1) \\ f_y+\lambda g_y+\beta h_y=0 & (2) \end{cases}$$

故若$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是条件极值点，则必满足方程

$$\begin{cases} f_x+\lambda g_x+\beta h_x=0 & (1) \\ f_y+\lambda g_y+\beta h_y=0 & (2) \\ f_u+\lambda g_u+\beta h_u=0 & (3) \\ f_v+\lambda g_v+\beta h_v=0 & (4) \\ g(x,y,u,v)=0 & (5) \\ h(x,y,u,v)=0 & (6) \end{cases}$$

从该方程中求出$M_0'(x_0,y_0,u_0,v_0,\lambda_0,\beta_0)$，则$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是可能的条件极值点。

为此，引入拉格朗日函数$L(x,y,u,v,\lambda,\beta)=f(x,y,u,v)+\lambda g(x,y,u,v)+\beta h(x,y,u,v)$，则

$$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda g_x+\beta h_x \\ L_y=f_y+\lambda g_y+\beta h_y \\ L_u=f_u+\lambda g_u+\beta h_u \\ L_v=f_v+\lambda g_v+\beta h_v \\ L_\lambda=g(x,y,u,v) \\ L_\beta=h(x,y,u,v) \end{cases}。$$

故可能的条件极值点恰好是拉格朗日函数的驻点。构造拉格朗日函数时需要注意

1) 约束条件的形式为$\begin{cases} g(x,y,u,v)=0 \\ h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$，若右端项不为零，需进行移项；

2) 引入参数的个数与约束条件中方程的个数相等，参数λ，β称为拉格朗日乘子；

3) 求L_x，L_y，L_u，L_v时，把x，y，u，v看成相互独立的变量。

接下来讨论驻点成为条件极值点的充分条件。假设拉格朗日函数的驻点$M_0'(x_0,y_0,u_0,v_0,\lambda_0,\beta_0)$，记$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$；因$\begin{cases} g(x,y,u,v)=0 \\ h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$可确定隐函数组$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$；故构造函数

$$\overline{L}(x,y,u,v)=L(x,y,u,v,\lambda_0,\beta_0)=f(x,y,u,v)+\lambda_0 g(x,y,u,v)+\beta_0 h(x,y,u,v),$$

结合$\begin{cases} g(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ h(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$，则$\overline{L}(x,y,u,v)=f(x,y,u(x,y),v(x,y))\triangleq F(x,y)$，此时$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是否为条件极值点转化为判断$(x_0,y_0)$是否为$F(x,y)$的极值点？计算得

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}\overline{L}(x,y,u,v)=\frac{\partial\overline{L}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\overline{L}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2F&=\mathrm{d}(\mathrm{d}F)=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\overline{L}(x,y,u,v)\right)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\overline{L}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\\&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\right)\mathrm{d}v+\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\mathrm{d}^2v\end{aligned}$$

结合$\left.\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\right|_{M_0}=\left[f_u+\lambda_0 g_u+\beta_0 h_u\right]\Big|_{M_0}=0$，$\left.\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\right|_{M_0}=\left[f_v+\lambda_0 g_v+\beta_0 h_v\right]\Big|_{M_0}=0$，则

$$\left.\mathrm{d}^2F\right|_{(x_0,y_0)}=\left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\mathrm{d}\left(\frac{\partial\overline{L}}{\partial v}\right)\mathrm{d}v\right]\Bigg|_{M_0}=\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}$$

利用极值的充分条件定理 3 得，若$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}>0$，则$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是条件极值的极小值点，若$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}<0$，则$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是条件极值的极大值点。

以求$z=f(x,y,u,v)$在约束条件$\begin{cases} g(x,y,u,v)=0 \\ h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$下的极值为例，总结条件极值问题的求法：

方法 1 简单情形，转为为(无条件)极值；

方法 2 拉格朗日乘数法。

第一：构造拉格朗日函数$L(x,y,u,v,\lambda,\beta)=f(x,y,u,v)+\lambda g(x,y,u,v)+\beta h(x,y,u,v)$；

第二：求拉格朗日函数的驻点，解方程$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda g_x+\beta h_x=0 \\ L_y=f_y+\lambda g_y+\beta h_y=0 \\ L_u=f_u+\lambda g_u+\beta h_u=0 \\ L_v=f_v+\lambda g_v+\beta h_v=0 \\ L_\lambda=g(x,y,u,v)=0 \\ L_\beta=h(x,y,u,v)=0 \end{cases}$，得$M_0'(x_0,y_0,u_0,v_0,\lambda_0,\beta_0)$，记$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$；

第三：判断，构造函数$\overline{L}(x,y,u,v)=L(x,y,u,v,\lambda_0,\beta_0)=f+\lambda_0 g+\beta_0 h$；计算函数$\overline{L}(x,y,u,v)$在点$M_0$的二阶微分$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}$，根据$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}$的符号判断点$M_0$是否为极值点。

若$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}>0$，则$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是条件极值的极小值点；

若$\left.\mathrm{d}^2\overline{L}\right|_{M_0}<0$，则$M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$是条件极值的极大值点；

注 也可计算函数$\overline{L}(x,y,u,v)$在点M_0的 Hessian 矩阵 H，则有如下结果：

1) 若 H 是正定矩阵，$\overline{L}(x,y,u,v)$ 在点 M_0 取得极小值；
2) 若 H 是负定矩阵，$\overline{L}(x,y,u,v)$ 在点 M_0 取得极大值；
3) 若 H 是不定矩阵，无法判断 M_0 是否为极值点，需要利用其他方法判断。

拉格朗日乘数法的严格证明，可参考数学分析教材[5]。

4. 实例分析

例 1 求函数 $f(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ 在条件 $xyz=4$ 下的极值。

解 方法 1 转化为无条件极值；

由 $xyz=4$ 得，$z=\dfrac{4}{xy}$，此时转化为求 $f=xy+\dfrac{8}{y}+\dfrac{8}{x}$ 极值。

第一：首先求函数的驻点，解方程 $\begin{cases} f_x=y-\dfrac{8}{x^2}=0 \\ f_y=x-\dfrac{8}{y^2}=0 \end{cases}$，求得驻点 $p(2,2)$；

第二：判断，计算得 $f_{xx}=\dfrac{16}{x^3}$，$f_{xy}=1$，$f_{yy}=\dfrac{16}{y^3}$；记 $H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$；

在点 $p(2,2)$，$H|_p=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 正定，故点 $p(2,2)$ 是极小值点，极小值为点 $f(p)=12$。

方法 2 拉格朗日乘数法

第一：构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-4)$；

第二：求拉格朗日函数的驻点，解方程 $\begin{cases} L_x=y+2z+\lambda yz=0 & (1) \\ L_y=x+2z+\lambda xz=0 & (2) \\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0 & (3) \\ L_\lambda=xyz-4=0 & (4) \end{cases}$，

(1) − (2)得，$(y-x)(1+\lambda z)=0$，即 $y=x$ 或 $z=-\dfrac{1}{\lambda}$；

当 $y=x$ 时，将其代入(3)，得 $x=-\dfrac{4}{\lambda}$ 或 $x=0$ (舍)；再将 $x=-\dfrac{4}{\lambda}$ 和 $y=-\dfrac{4}{\lambda}$ 代入(4)得 $z=\dfrac{\lambda^2}{4}$；解得 $x_0=2$，$y_0=2$，$z_0=1$，$\lambda_0=-2$，；记 $M_0(2,2,1)$；

当 $z=-\dfrac{1}{\lambda}$ 时，将其代入(1)得，$z=0$ (舍)；

第三：判断，构造函数 $\overline{L}(x,y,z)=L(x,y,z,\lambda_0)=xy+2xz+2yz+\lambda_0(xyz-4)$；

则 $\mathrm{d}\overline{L}(x,y,z)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}z++2y\mathrm{d}z+2z\mathrm{d}y+\lambda_0(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)$，

$$\mathrm{d}^2\overline{L}(x,y,z)=(2+2\lambda_0 z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(4+2\lambda_0 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(4+2\lambda_0 x)\mathrm{d}z\mathrm{d}y;$$

当 $\lambda_0=-2$ 时，$\mathrm{d}^2\overline{L}\big|_{M_0}=-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\mathrm{d}x\mathrm{d}z-4\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，此时无法判断 $\mathrm{d}^2\overline{L}\big|_{M_0}$ 的符号；结合条件 $xyz=4$，等式两边同时微分得，$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0$，在点 $M_0(2,2,1)$ 处，$2\mathrm{d}z=-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，将其代入 $\mathrm{d}^2\overline{L}\big|_{M_0}$ 得，

$$\mathrm{d}^2\overline{L}\Big|_{M_0} = -2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\cdot\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-2} = \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+4\mathrm{d}z^2>0,\quad (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\neq(0,0,0);$$

故 $M_0(2,2,1)$ 是极小值点，极小值为 $f(2,2,1)=12$。

注 在教学实践过程中，对于本题，不少学生会计算函数 $\overline{L}(x,y,z)$ 在点 $M_0(2,2,1)$ 处的 Hessian 矩阵 $H=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$，但 H 是不定矩阵，无法判断 M_0 是极大点还是极小值点；这让学生很苦恼。但在本例题中，通过二阶微分法有效地判断出 M_0 是条件极值的极小值点，故在使用拉格朗日乘数法求解条件极值问题时，最好使用二阶微分法判断可疑极值点是否为极值点。

例 2 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值.

解 利用拉格朗日乘数法求条件极值。

第一：构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$；

第二：求拉格朗日函数的驻点，解方程 $\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0 & (1)\\ L_y=-2+\lambda y=0 & (2)\\ L_z=2+\lambda z=0 & (3)\\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 & (4)\end{cases}$，

由(1) − (3)得，$x=-\dfrac{1}{2\lambda}$，$y=\dfrac{1}{\lambda}$，$z=-\dfrac{1}{\lambda}$，将其代入(4)得，$\lambda=\pm\dfrac{3}{2}$；

当 $\lambda_1=\dfrac{3}{2}$ 时，记 $M_1\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$；当 $\lambda_2=-\dfrac{3}{2}$ 时，记 $M_2\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$；

第三：判断，构造函数 $\overline{L}(x,y,z)=L(x,y,z,\lambda_i)=x-2y+2z+\lambda_i(x^2+y^2+z^2-1)$；

则 $\mathrm{d}\overline{L}(x,y,z)=\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+2\mathrm{d}z+\lambda_i(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$，$\mathrm{d}^2\overline{L}(x,y,z)=2\lambda_i(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)$；

当 $\lambda_1=\dfrac{3}{2}$ 时，$\mathrm{d}^2\overline{L}\Big|_{M_1}=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)>0$，$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\neq(0,0,0)$；

当 $\lambda_2=-\dfrac{3}{2}$ 时，$\mathrm{d}^2\overline{L}\Big|_{M_2}=-2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)<0$，$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\neq(0,0,0)$；

故 $M_1\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为 $f(M_1)=-3$；$M_2\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 是极大值点，极大值为 $f(M_2)=3$。

例 3 求 $f(x,y,z)=x^m y^n z^p$ 在条件 $x+y+z=a$ 下的极值，其中 $x,y,z,m,n,p,a>0$；

分析 若构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=x^m y^n z^p+\lambda(x+y+z-a)$；求函数的驻点时，需要解方程

$$\begin{cases}L_x=mx^{m-1}y^n z^p+\lambda=0\\ L_y=nx^m y^{n-1}z^p+\lambda=0\\ L_z=px^m y^n z^{p-1}+\lambda=0\\ L_\lambda=x+y+z-a=0\end{cases},$$

考虑到 x,y,z 的幂次较高，求解方程较复杂。另外注意到 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 取得极值当且仅当 $\ln f(x,y,z)$ 在点 M_0 取得极值；为此采用如下做法。

解 第一：构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda(x+y+z-a)$；

第二：求拉格朗日函数的驻点，解方程 $\begin{cases}L_x=\dfrac{m}{x}+\lambda=0\\ L_y=\dfrac{n}{y}+\lambda=0\\ L_z=\dfrac{p}{z}+\lambda=0\\ L_\lambda=x+y+z-a=0\end{cases}$ 得，

$$x_0=\frac{ma}{m+n+p}，\quad y_0=\frac{na}{m+n+p}，\quad z_0=\frac{pa}{m+n+p}，\quad \lambda_0=-\frac{m+n+p}{a}，记 M_0(x_0,y_0,z_0)；$$

第三：判断，构造函数 $\bar{L}(x,y,z)=L(x,y,z,\lambda_0)=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda_0(x+y+z-a)$；则

$$\mathrm{d}\bar{L}(x,y,z)=\frac{m}{x}\mathrm{d}x+\frac{n}{y}\mathrm{d}y+\frac{p}{z}\mathrm{d}z+\lambda_0(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)，$$

$$\mathrm{d}^2\bar{L}(x,y,z)=-\frac{m}{x^2}\mathrm{d}x^2-\frac{n}{y^2}\mathrm{d}y^2-\frac{p}{z^2}\mathrm{d}z^2；$$

此时 $\mathrm{d}^2\bar{L}\big|_{M_0}=\left[-\frac{m}{x^2}\mathrm{d}x^2-\frac{n}{y^2}\mathrm{d}y^2-\frac{p}{z^2}\mathrm{d}z^2\right]\Big|_{M_0}<0$，$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\neq(0,0,0)$；故 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是函数 $f(x,y,z)$ 的极小值点，极小值为 $f(M_0)=x_0^m y_0^n z_0^p=\dfrac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$。

注 通过此例可知，利用拉格朗日乘数法求条件极值时，根据目标函数的特点，适时、适当地对其做一些变形，可使问题的求解变得简单，达到事半功倍的效果。若目标函数中含有绝对值、开根号时，采用平方消去绝对值等技巧，如在本例中，对目标函数取对数；对于常见的目标函数，在构造拉格朗日函数时，还有哪些构造技巧呢？请试着分析并总结？

例 4 (2011 年第二届全国大学生数学(非数学类)竞赛决赛)设椭球面 $\Sigma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$，Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线，求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

分析 首先求出椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面，然后求出原点到切平面的距离，进而利用拉格朗日乘数法求条件极值。

解 椭球面的法向量为：$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x}{a^2},\dfrac{y}{b^2},\dfrac{z}{c^2}\right)$，则椭球面在点 $P(x,y,z)$ 的切平面为：

$$\pi:\frac{x}{a^2}(\xi-x)+\frac{y}{b^2}(\eta-y)+\frac{z}{c^2}(\zeta-z)=0，$$

整理得 $\pi:\dfrac{x}{a^2}\xi+\dfrac{y}{b^2}\eta+\dfrac{z}{c^2}\zeta-1=0$。

切平面到原点的距离为 $d(x,y,z)=\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$。求 $d(x,y,z)$ 在 Γ 上的极大(小)值，等同于求 $u=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}$ 在 Γ 上的极小(大)值。接下来利用拉格朗日乘数法求条件极值。

第一：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda\left(z^2-x^2-y^2\right)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

第二：求拉格朗日函数的驻点。解方程

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{2x}{a^4}-2\lambda x-\dfrac{2\mu x}{a^2}=2x\left(\dfrac{1}{a^4}-\lambda-\dfrac{\mu}{a^2}\right)=0 \\ L_y=\dfrac{2y}{b^4}-2\lambda y-\dfrac{2\mu y}{a^2}=2y\left(\dfrac{1}{b^4}-\lambda-\dfrac{\mu}{b^2}\right)=0 \\ L_z=\dfrac{2z}{c^4}+2\lambda z-\dfrac{2\mu z}{c^2}=2z\left(\dfrac{1}{c^4}+\lambda-\dfrac{\mu}{c^2}\right)=0 \\ L_\lambda=z^2-x^2-y^2=0 \\ L_\mu=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)=0 \end{cases}$$

对上述方程组，讨论解的情况：

1) 若 x,y,z 都不为零，则

$$\frac{1}{a^4}-\lambda-\frac{\mu}{a^2}=0，\quad \frac{1}{b^4}-\lambda-\frac{\mu}{b^2}=0，\quad \frac{1}{c^4}+\lambda-\frac{\mu}{c^2}=0，(*)$$

此时必有 $\lambda=-\dfrac{1}{a^2b^2}$， $\mu=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$，且 $a^2b^2=c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$。

由 $xL_x+yL_y+zL_z=2\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)-2\mu=0$，得 $\mu=\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}=u=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$。

这时所有的切平面到原点的距离为常值。

2) 若 x,y,z 至少由一个为零。不妨取 $x=0$，则两个曲面为

$$z^2=y^2，\quad 1-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)z^2=0，$$

于是 $z^2=y^2=\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$， $u_1=\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}=\dfrac{b^4+c^4}{b^2c^2\left(b^2+c^2\right)}$，这时

$$\lambda=\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\mu\right)=\frac{1}{c^2}\left(\mu-\frac{1}{c^2}\right)，\quad \mu=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2\left(b^2+c^2\right)}，$$

类似地，取 $y=0$，可得 $z^2=x^2=\dfrac{a^2c^2}{a^2+c^2}$， $u_2=\dfrac{a^4+c^4}{a^2c^2\left(a^2+c^2\right)}$。若取 $z=0$，结合 Σ_2 可得 $x=y=0$，而原点不在 Σ_1 上。矛盾。

由于 $u_2-u_1=\dfrac{a^4+c^4}{a^2c^2\left(a^2+c^2\right)}-\dfrac{b^4+c^4}{b^2c^2\left(b^2+c^2\right)}$

$$=\frac{\left(a^4+c^4\right)b^2\left(b^2+c^2\right)-\left(b^4+c^4\right)a^2\left(a^2+c^2\right)}{a^2b^2c^4\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)c^2}{a^2b^2c^4\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}>0$$

综上所述，若 $a^2b^2=c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$，所求切平面到原点的距离为常值 $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

若 $a^2b^2\neq c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$，则方程组(*)无解，这时，所求切平面中离原点最近距离和最远距离分别为

$$d_{\min}=ac\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^4+c^4}},\quad d_{\max}=bc\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4}},$$

分别在以下两点取得：$\left(\dfrac{\pm ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\dfrac{\pm ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$，$\left(0,\dfrac{\pm bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\dfrac{\pm bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)$。

例 5 证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2\geq\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$，$a_i>0$，$x_i>0$；

分析 借助拉格朗日乘数法求条件极值的思想，该不等式的证明转化为求目标函数 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2$ 在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=c$ 下的最小值；

证明 第一：构造拉格朗日函数 $L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-c\right)$；

第二：求拉格朗日函数的驻点，解方程 $\begin{cases}L_{x_1}=2a_1x_1+\lambda=0 & (1)\\ L_{x_2}=2a_2x_2+\lambda=0 & (2)\\ \quad\vdots & \\ L_{x_n}=2a_nx_n+\lambda=0 & (n)\\ L_{\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-c=0 & (n+1)\end{cases}$，解得 W

$$x_i=-\frac{\lambda}{2a_i},\quad \lambda=-\frac{2c}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}。$$

这唯一驻点就是最小值点，最小值为 $f_{\min}=f\left(-\dfrac{\lambda}{2a_1},-\dfrac{\lambda}{2a_2},\cdots,-\dfrac{\lambda}{2a_n}\right)=\dfrac{c^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$；即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2\geq\frac{c^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

故不等式成立。

结合以上分析，使用拉格朗日乘数法可快速确定可疑的条件极值点，然后计算拉格朗日函数在该点的二阶微分，根据二阶微分的符号(大于零或者小于零)进一步确定该点是否为极值点；但在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。值得注意的是：利用 Hessian 矩阵判定某点是否为条件极值点时，会出现失效情形，故建议初学者采用二阶微分法进行判断。

在求解拉格朗日函数的驻点时，不能墨守常规，一味地利用线性方程组解的理论进行求解，而要善于观察方程的特点，综合运用各种数学技能，选择合适的求解方法。为加强读者对拉格朗日乘数法的理解，并切实体会其应用，以下题目自行练习，不再详述。

练习

1) 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}(x,y,z,c>0)$ 下的极值；

2) 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+4z^2=1\end{cases}$ 上距离原点最远的点和最近的点；

3) 求 $16x^2+4y^2+9z^2=144$ 内接长方体的最大体积，长方体的各面平行于坐标轴；

4) 证明 $\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n(x,y\geq 0)$；

5) 求 $f(x,y,z)=|z|$ 在条件 $\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$ 下的极值。

5. 结束语

本文将知识的发展规律与人类的认知规律相结合，以多元函数极值的必要条件为出发点，探究条件极值问题的必要条件；尽力还原知识的产生、发展过程，将拉格朗日乘数法的来源由表及里、逐层深入地呈现出来，促进学生对拉格朗日乘数法的理解与应用；还可以弥补部分教材中对此问题讨论的不足。在推导过程中设法引导学生观察、探索、发现问题，这对于学生拓宽思路、从被动学习逐步向主动学习转变、提升自主学习能力有很大帮助。这种追根溯源的探究模式还有助于使数学教学成为再发现、再创造的思维过程，有助于培养学生的发散性思维和创新性思维；对学生形成锲而不舍、潜心研究的钻研精神，追求真理、严谨治学的求实精神，勇攀高峰、敢为人先的创新精神，起到了潜移默化的促进作用。探究过程遵循从具体到抽象，从简单到复杂，从特殊到一般的知识发展规律，符合人们对事物的认识发展过程，便于学生形成良好的认知结构，助力学生全面发展。

在典型问题中引入实际案例，让学生体会到拉格朗日乘数法在求解优化问题中的具体应用及其重要地位；进而增强学生运用数学知识解决实际问题的能力，真正将学习到的知识落实到行动上，做到知行合一，在学中知，在行中明，切实体会到数学来源于生活，服务于生活。

欢迎感兴趣的读者继续剖析拉格朗日乘数法求条件极值。

参考文献

[1] 陈建发. 关于拉格朗日乘数法的几何意义[J]. 高等数学研究, 2016, 19(2): 35-36.
[2] 周淑娟, 郭晓沛, 赵玉娥, 等. 拉格朗日乘数法的一个注解[J]. 高等数学研究, 2020, 23(3): 14-15.
[3] 叶正麟, 潘璐璐. 拉格朗日乘数法是怎样导出的[J]. 高等数学研究, 2020, 23(3): 11-13.
[4] 贾迪媛, 常雪. 拉格朗日乘数法在几何及偏微分方程中的应用[J]. 黑龙江科学, 2021, 12(21): 11-13.
[5] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[6] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(下册) [M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[7] 崔国忠, 石金娥, 郭从洲. 数学分析(第三册) [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
[8] 费定晖, 周学圣. 数学分析习题集题解(第五册) [M]. 第六版. 济南: 山东科学技术出版社, 2012.