

# 关于某些连续函数线性组合的分形维数估计

刘沛智\*, 杜雨萌, 叶子秦, 梁永顺

南京理工大学, 数学与统计学院, 江苏 南京

收稿日期: 2022年3月5日; 录用日期: 2022年4月7日; 发布日期: 2022年4月14日

## 摘要

本文主要研究了某类分形函数线性组合的分形维数。讨论了具有不同上、下Box维数分形函数线性组合的上、下Box维数估计, 得到如下结果。一些情形下, 线性组合函数具有与原函数相关的上Box维数或下Box维数。而其他情形下, 线性组合函数的上、下Box维数数值均是不确定的。

## 关键词

分形函数, Box维数, 线性组合

## A Remark on the Fractal Dimensions Estimation of the Linear Combination of Continuous Functions

Peizhi Liu\*, Yumeng Du, Ziqin Ye, Yongshun Liang

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Mar. 5<sup>th</sup>, 2022; accepted: Apr. 7<sup>th</sup>, 2022; published: Apr. 14<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

In the present paper, we mainly investigate the fractal dimensions of the linear combination of certain fractal functions. We discuss the estimation of Upper and Lower Box dimension of the linear combination of fractal functions having different Upper and Lower Box dimension, and have obtained the following results. In some cases, the linear combination function has Upper or Lower Box dimension that is related to the original function. In other cases, Upper and Lower Box dimension of the linear combination function is uncertain.

\*通讯作者。

## Keywords

Fractal Function, Box Dimension, Linear Combination

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在经典的微积分理论研究中, 我们知道单位区间上两个连续函数的任意线性组合一定还是一个连续函数。而很多连续函数具有一定的分形维数。因此我们感兴趣的是, 连续函数线性组合的分形维数变化情况。

过去的研究已经发现了许多具有分形维数的连续函数。典型的例子有 Weierstrass 函数[1]、自仿射函数[1]、线性分形插值函数[2]、Bush 函数[3]等。此外, 参考文献[4]和[5]中分别给出了具有 Box 维数为 2 和 1 的连续函数的示例。

关于函数图像的分形维数估计的技巧与方法已经建立, Hu 讨论了 Weierstrass 类函数的分形维数和奇点[6]。梁永顺研究了连续函数分数阶微积分的分形维数估计问题[5]。Hyde 对典型连续函数图像的 Box 维数进行了研究[7], 证明了对于一个典型的一致连续函数  $f(x)$ , 其图像的下 Box 维数可以尽可能小, 而图像的上 Box 维数可以尽可能大。

许多学者们已经注意到分形函数线性组合的分形维数估计。这些研究具有十分重要的意义。[8]中, 作者对具有不同 Box 维数分形函数的线性组合进行了初步讨论。[9]和[10]中, 作者进一步研究了具有相同 Box 维数的分形函数线性组合情形, 证明了: 1) 所有具有 Box 维数 1 的分形函数是一个分形线性空间; 2) 所有具有相同 Box 维数  $s(1 < s \leq 2)$  的分形函数不是一个线性空间。在此研究基础上, 可以对上述问题进行进一步讨论, 并给出进一步的研究成果。

然而, 我们仍然有持续关注的问题。如果  $f(x)$  的 Box 维数存在, 而  $g(x)$  没有 Box 维数, 我们可以研究  $f(x)$  和  $g(x)$  的线性组合 Box 维数是否存在。当  $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$  的 Box 维数不存在时,  $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$  的上 Box 维数和下 Box 维数取值如何计算。我们还可以考虑两个 Box 维数不存在的连续函数线性组合的上、下 Box 维数。该研究对于丰富分形函数理论以及在其它学科的应用有着重要的实际意义。

在本文中, 我们主要研究两个 Box 维数不存在的连续函数线性组合的分形维数。我们首先给出了上、下 Box 维数和 Box 维数的定义与有关引理, 然后根据两个连续函数上、下 Box 维数的关系进行分类讨论, 对其中的一些情形给出了理论推导与证明, 最后补充的函数图像与数值模拟进一步证明了我们得到的一些结论。

## 2. 定义及符号

令  $I$  为单位区间  $[0, 1]$ ,  $C(I)$  为  $I$  上所有连续函数的集合。不做特别说明时, 本文讨论的函数都是  $I$  上的连续函数。 $f(x)$  的图像记作

$$\Gamma(f, I) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

本文使用的分形维数是上、下 Box 维数和 Box 维数。

**定义 2.1 [1].**

令  $f(x) \in C(I)$  为  $I$  上的有界子集,  $N_\delta \Gamma(f, I)$  是可以覆盖  $f$  集的最少的  $\delta$  网立方体个数, 则函数图像上、下 Box 维数分别定义为

$$\underline{\dim}_B \Gamma(f, I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, I)}{-\log \delta} \tag{2.1}$$

和

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f, I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, I)}{-\log \delta}. \tag{2.2}$$

如果这两个值相等, 则称这共同的值为  $f$  的 Box 维数, 记为

$$\dim_B \Gamma(f, I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(f, I)}{-\log \delta}. \tag{2.3}$$

令  $D_s(I)$  是所有在  $I$  上具有 Box 维数  $s(1 \leq s \leq 2)$  的函数的集合, 令  $D_{s_1}^{s_2}(I)$  是所有在  $I$  上具有上 Box 维数  $s_2$ , 下 Box 维数  $s_1(1 \leq s_1 \leq s_2 \leq 2)$  的函数的集合。如果  $s_1 = s_2$ , 则  $D_{s_1}^{s_2}(I) = D_{s_1}(I)$ 。

关于分形维数的进一步讨论和其他定义可以在文献[1]和[11][12][13]中找到。根据定义 2.1, 可以得出以下基本结论。

**引理 2.1 [1].**

令  $f(x) \in C(I)$ , 则有

$$1 \leq \underline{\dim}_B \Gamma(f, I) \leq \overline{\dim}_B \Gamma(f, I) \leq 2. \tag{2.4}$$

如果  $\Gamma(f, I)$  的 Box 维数存在, 则有

$$1 \leq \dim_B \Gamma(f, I) \leq 2. \tag{2.5}$$

由引理 2.1 可知, 任意一个闭区间上的连续函数, 总有上 Box 维数的自然上界 2 以及下 Box 维数的自然下界 1。

将  $[a, b]$  上  $f(x)$  最大变化范围写作  $R_f[a, b]$ , 满足

$$R_f[a, b] = \sup_{a \leq x, y \leq b} |f(x) - f(y)|.$$

因为我们在本文中主要讨论连续函数, 所以给出以下引理。

**引理 2.2 [1].**

令  $f(x) \in C(I)$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $m$  是不小于  $\delta^{-1}$  的最小整数。将  $N_\delta \Gamma(f, I)$  表示为与  $\Gamma(f, I)$  相交的  $\delta$  网立方体个数, 则有

$$\sum_{i=0}^{m-1} \max \left\{ \frac{R_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta}, 1 \right\} \leq N_\delta \Gamma(f, I) \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta].$$

**3. 主要结论**

在本节中, 我们将给出 Box 维数不存在的分形函数线性组合的分形维数估计。在有些情形下, 可以算出线性组合函数的分形维数, 并发现其与原函数存在一定的联系, 而在有些情形下可以证明线性组合函数的上(下)Box 维数是不确定的。

令  $f(x) \in D_{s_1}^{s_2}(I)$ ,  $g(x) \in D_{s_3}^{s_4}(I)$ 。若  $a = b = 0$ , 则有

$$\dim_B \Gamma(af + bg, I) = \dim_B \Gamma(0, I) = 1.$$

如果  $a \neq 0, b = 0$ , 有  $af(x) + bg(x) = af(x)$ , 此时  $af(x) + bg(x) \in D_{s_1}^{s_2}(I)$ 。同样的  $a \neq 0, b = 0$ , 则有  $af(x) + bg(x) \in D_{s_3}^{s_4}(I)$ , 现在我们考虑当  $a \cdot b \neq 0$  时,  $f(x)$  和  $g(x)$  的非平凡线性组合的分形维数。

首先, 令  $f(x)$  的下 Box 维数大于  $g(x)$  的上 Box 维数, 即  $s_4 < s_1$ , 我们可以得到如下结论。

**定理 3.1.**

令  $f(x) \in D_{s_1}^{s_2}(I)$ ,  $g(x) \in D_{s_3}^{s_4}(I)$ 。当  $s_3 < s_4 < s_1 < s_2$ , 可以得到

$$\overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \overline{\dim}_B \Gamma(f, I)$$

和

$$\underline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \underline{\dim}_B \Gamma(f, I).$$

**证明.** 令  $\delta \in (0, 1)$ ,  $m$  为大于或等于  $\delta^{-1}$  的最小整数。将  $N_\delta \Gamma(f, I)$  和  $N_\delta \Gamma(g, I)$  分别记作与  $\Gamma(f, I)$  和  $\Gamma(g, I)$  相交的  $\delta$  网立方体个数。将  $N_\delta \Gamma(af + bg, I)$  记作与  $\Gamma(af + bg, I)$  相交的  $\delta$  网立方体个数。

由定理条件知,  $\overline{\dim}_B \Gamma(f, I) = s_2$ ,  $\overline{\dim}_B \Gamma(g, I) = s_4$ 。因此对于  $\forall 0 < \varepsilon_1 < 2 - s_2$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 使得

$$N_\delta \Gamma(f, I) \leq (\delta^{-1})^{s_2 + \varepsilon_1}, \delta \in (-\delta_1, \delta_1).$$

等号成立当且仅当  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 。

对于  $\forall 0 < \varepsilon_2 < s_1 - s_4$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得

$$N_\delta \Gamma(g, I) \leq (\delta^{-1})^{s_4 + \varepsilon_2}, \delta \in (-\delta_2, \delta_2).$$

等号成立当且仅当  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 。

根据引理 2.2,

$$N_\delta \Gamma(af + bg, I) \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_{af+bg} [i\delta, (i+1)\delta].$$

由

$$R_{af+bg} [i\delta, (i+1)\delta] \leq aR_f [i\delta, (i+1)\delta] + bR_g [i\delta, (i+1)\delta],$$

可以得到

$$\begin{aligned} N_\delta \Gamma(af + bg, I) &\leq 2m + a\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta] + b\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_g [i\delta, (i+1)\delta] \\ &\leq 2m + aN_\delta \Gamma(f, I) + bN_\delta \Gamma(g, I) \\ &\leq 2m + a(\delta^{-1})^{s_2 + \varepsilon_1} + b(\delta^{-1})^{s_4 + \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

当  $\delta \in (-\delta_3, \delta_3)$ ,  $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 对任意  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ ,

$$N_\delta \Gamma(af + bg, I) \leq (1+a)(\delta^{-1})^{s_2}, (\varepsilon \rightarrow 0).$$

因此

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta \Gamma(af + bg, I)}{-\log \delta} \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(1+a)(\delta^{-1})^{s_2}}{-\log \delta} \\ &= s_2. \end{aligned}$$

另一方面, 对于  $\forall 0 < \varepsilon_2 < s_4 - s_3, \forall \delta_2 > 0$ , 存在  $\delta \in (-\delta_2, \delta_2)$ , 使得

$$N_\delta \Gamma(g, I) \geq (\delta^{-1})^{s_4 - \varepsilon_2}.$$

由引理 2.2,

$$N_\delta \Gamma(af + bg, I) \geq \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_{af+bg} [i\delta, (i+1)\delta].$$

易知

$$\sum_{i=0}^{m-1} R_{af+bg} [i\delta, (i+1)\delta] \geq \left| a \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta] - b \sum_{i=0}^{m-1} R_g [i\delta, (i+1)\delta] \right|.$$

类似以上讨论可得, 对于足够小的  $\delta$ ,

$$b \sum_{i=0}^{m-1} R_g [i\delta, (i+1)\delta] \leq \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{m-1} R_f [i\delta, (i+1)\delta].$$

则有

$$\underline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \left( \frac{a}{2} \right) (\delta^{-1})^{s_2}}{-\log \delta} = s_2.$$

因此

$$\overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \overline{\dim}_B \Gamma(f, I) = s_2.$$

与上 Box 维数类似的讨论, 可以得到

$$\underline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \underline{\dim}_B \Gamma(f, I).$$

如果  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $I$  上具有相同的上、下 Box 维数, 我们可以得出以下结论。

**定理 3.2.**

令  $f(x) \in D_{s_1}^{s_2}(I)$ ,  $g(x) \in D_{s_3}^{s_4}(I)$ ,  $s_2 = s_4, s_1 = s_3 > 1$ , 那么当  $f(x)$  和  $g(x)$  的非平凡线性组合的分形维数存在时, 它可以是 1 到  $s_1(s_3)$  之间的任意数。

**证明.** 令  $a, b \in \mathbb{R}$  且  $a \cdot b \neq 0$ , 记

$$\overline{\dim}_B \Gamma(f, I) = s_2.$$

令  $g(x) = \frac{-a}{b} f(x)$ , 则有

$$\overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \overline{\dim}_B \Gamma(0, I) = 1.$$

令  $g(x) = \frac{a}{b} f(x)$ , 可以得到

$$\overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \overline{\dim}_B \Gamma(2a \cdot f, I) = s_2.$$

令  $g(x) = \frac{-a}{b} [f(x) + h(x)]$ ,  $h(x)$  定义在  $I$  上且具有上 Box 维数  $s \in (1, s_2)$ , 则有

$$\overline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) = \overline{\dim}_B \Gamma(-a \cdot h, I) = s.$$

以上讨论对于下 Box 维数同样适用。这表明如果  $\Gamma(af + bg, I)$  的上(下) Box 维数存在, 则可以是 0

和  $s_2(s_1)$  间的任意数字。

在定理 3.2 中, 我们假设  $\Gamma(f, I)$  和  $\Gamma(g, I)$  的下 Box 维数大于 1, 现在我们考虑  $\underline{\dim}_B \Gamma(f, I) = \underline{\dim}_B \Gamma(g, I) = 1$  时的情况。由引理 2.1,

$$\underline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) \geq 1.$$

类似定理 3.1 的证明, 可以得到

$$\underline{\dim}_B \Gamma(af + bg, I) \leq 1.$$

因此

$$af + bg \in D_1^s(I).$$

考虑  $\Gamma(f, I)$  和  $\Gamma(g, I)$  具有不同分形维数的情形, 我们可以得到下表 1。

**Table 1.** The fractal dimensions of the linear combination of continuous functions  
**表 1.** 连续函数线性组合的分形维数

$f \in D_{s_1}^{s_2}, g \in D_{s_3}^{s_4}$	$s_4 < s_1$	$s_3 < s_1 < s_4 < s_2$	$s_1 < s_3 < s_4 < s_2$
$af + bg, ab \neq 0$	$D_{s_1}^{s_2}(I)$	$D_s^{s_2}(I)$	$D_s^{s_2}(I)$
$f \in D_{s_1}^{s_2}, g \in D_{s_3}^{s_4}$	$s_1 = s_3, s_2 = s_4$	$s_1 = s_3, s_2 \neq s_4$	$s_1 \neq s_3, s_2 = s_4$
$af + bg, ab \neq 0$	不确定	$D_s^{\max\{s_2, s_4\}}(I)$	不确定
$f \in D_{s_1}^{s_2}, g \in D_{s_3}^{s_4}$	$s_1 = s_4$	$s_1 = s_3 = 1, s_2 \neq s_4$	$s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4$
$af + bg, ab \neq 0$	$D_s^{s_2}(I)$	$D_1^{\max\{s_2, s_4\}}(I)$	$D_1^s(I)$

表 1 中给出的“不确定”表明相应线性组合的上、下 Box 维数是不确定的。 $s$  也表示不确定的上 Box 维数或下 Box 维数。

从上面给出的表中可以得到, 对于  $\Gamma(f, I)$  和  $\Gamma(g, I)$  的某些分形维数, 其线性组合上、下 Box 维数与  $\Gamma(f, I)$  (或  $\Gamma(g, I)$ ) 保持一致; 一些情形下, 相应线性组合只存在上 Box 维数或下 Box 维数; 当  $\Gamma(f, I)$  和  $\Gamma(g, I)$  的上 Box 维数相等时, 其线性组合的上、下 Box 维数均是不确定的值。

#### 4. 图像

在这一部分, 我们会给出几个图例, 这些例子进一步说明了我们在上一部分得到的结果。

##### 例 4.1 [14].

令  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lambda_j \nearrow +\infty$ , Besicovitch 函数可记为

$$B(x) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^{-\alpha} \sin(\lambda_j x), \quad 0 < \alpha < 1.$$

当  $\lambda$  足够大, 并且  $\lambda_j = (\lambda_j)^{2^j}$ , 可以得到

$$\overline{\dim}_B \Gamma(B, I) = 2 - \alpha; \quad \underline{\dim}_B \Gamma(B, I) = \frac{2}{1 + \alpha}.$$

下面我们给出图例。  $f(x)$  和  $g(x)$  按如上 Besicovitch 函数定义。令  $\lambda = 2, \alpha = 0.2$ , 图 1 表示  $f(x)$ 。令  $\lambda = 2, \alpha = 0.5$ , 图 2 和图 3 分别表示  $g(x)$  和  $f(x) + g(x)$ 。

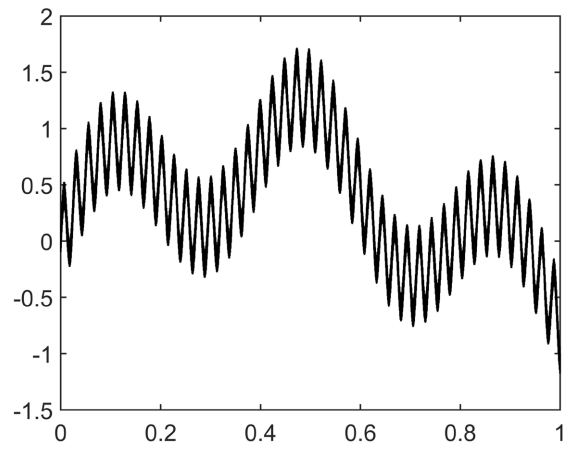


Figure 1.  $f(x)$

图 1.  $f(x)$

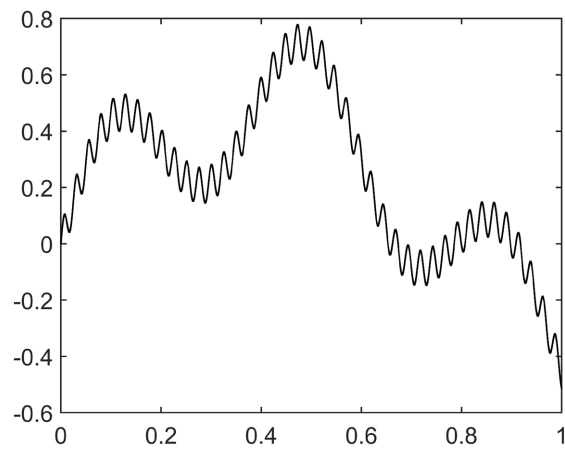


Figure 2.  $g(x)$

图 2.  $g(x)$

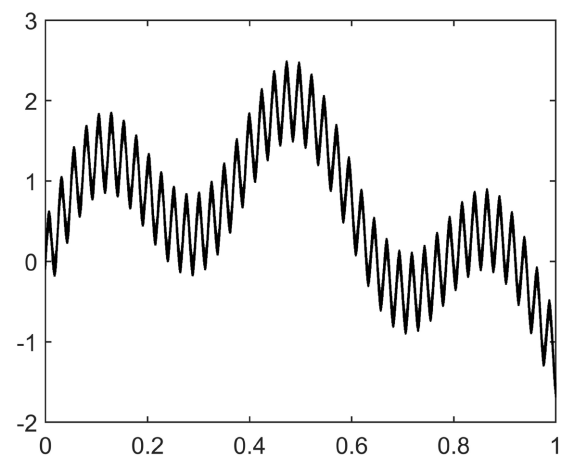


Figure 3.  $f(x) + g(x)$

图 3.  $f(x) + g(x)$

令  $f(x)$  的  $\alpha$  分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4,  $g(x)$  的  $\alpha$  分别为 0.5, 0.6, 0.7, 0.8。表 2 给出了  $\Gamma(f, I)$ ,  $\Gamma(g, I)$ ,  $\Gamma(f+g, I)$  的上、下 Box 维数。

图 4 展示了  $\Gamma(f, I)$  与  $\Gamma(f+g, I)$  的下 Box 维数间的关系; 图 5 展示了  $\Gamma(f, I)$  与  $\Gamma(f+g, I)$  的上 Box 维数间的关系。

Table 2. Numerical results

表 2. 数值结果

$\underline{\dim}_B \Gamma(f, I)$	$\overline{\dim}_B \Gamma(f, I)$	$\underline{\dim}_B \Gamma(g, I)$	$\overline{\dim}_B \Gamma(g, I)$	$\underline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$	$\overline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$
1.8245	1.8835	1.3278	1.4963	1.8314	1.8924
1.6712	1.7847	1.2473	1.4215	1.6808	1.7907
1.5350	1.7021	1.1729	1.3270	1.5387	1.7120
1.4210	1.6231	1.1301	1.1810	1.4401	1.6297

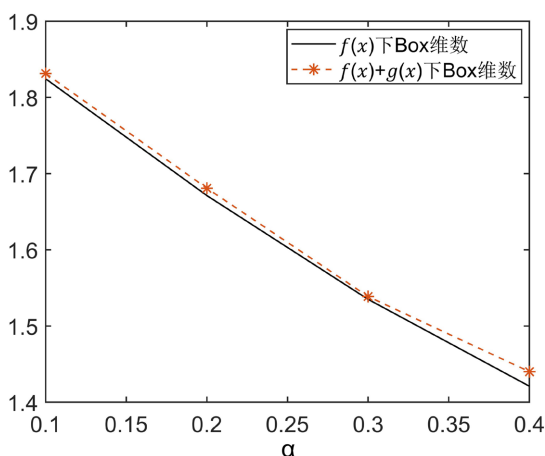


Figure 4. Connection among  $\alpha, \underline{\dim}_B \Gamma(f, I)$  and  $\underline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$

图 4.  $\alpha, \underline{\dim}_B \Gamma(f, I)$  和  $\underline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$  之间的联系

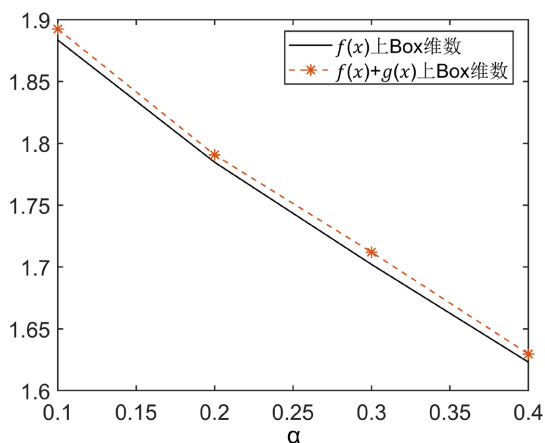


Figure 5. Connection among  $\alpha, \overline{\dim}_B \Gamma(f, I)$  and  $\overline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$

图 5.  $\alpha, \overline{\dim}_B \Gamma(f, I)$  和  $\overline{\dim}_B \Gamma(f+g, I)$  之间的联系



## 5. 结论

本文主要研究  $I$  上具有一定分形维数的两个连续函数线性组合的分形维数估计。这里使用的分形维数主要是 Box 维数和上、下 Box 维数。当连续函数具有不同上 Box 维数时, 具有较大上 Box 维数的函数能够吸收具有较小上 Box 维数的函数。换言之, 连续函数线性组合的上 Box 维数是较大的上 Box 维数。当连续函数具有相同的下 Box 维数 1 时, 线性组合函数的下 Box 维数也为 1。在其他一些情形下, 连续函数线性组合的上、下 Box 维数可能是不确定的值。

除了 Box 维数, 人们还可以研究其它分形维数, 如两个连续函数线性组合的 Hausdorff 维数[1]、Krull 维数[6]、填充维数[1]和维纹[15]等。

这里研究的连续函数是在  $\mathbb{R}$  上的闭区间上定义的。它们的分形维数不超过 2 且不低于 1。在此基础上, 我们可以继续探索定义在  $\mathbb{R}^2$  上的分形曲面的线性组合的分形维数。如果分形曲面的 Box 维数存在, 则必须不超过 3 且不小于 2。然而, 相应的分形曲面线性组合的分形维数的估计要困难得多。

## 基金项目

感谢国家自然科学基金(批准号 12071218)、江苏省自然科学基金(批准号 BK20161492)和中央高校基础研究经费(批准号 30917011340)的支持。

## 参考文献

- [1] Falconer, K.J. (2004) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd., Chichester. <https://doi.org/10.1002/0470013850>
- [2] Barnsley, M.F. (1986) Fractal Functions and Interpolation. *Constructive Approximation*, **2**, 303-329. <https://doi.org/10.1007/BF01893434>
- [3] Bush, K.A. (1952) Continuous Functions without Derivatives. *The American Mathematical Monthly*, **59**, 222-225. <https://doi.org/10.1080/00029890.1952.11988110>
- [4] Xie, T.F. and Zhou, S.P. (2004) On a Class of Fractal Functions with Graph Box Dimension 2. *Chaos, Solitons & Fractals*, **22**, 135-139. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.12.100>
- [5] Liang, Y.S. (2019) Progress on Estimation of Fractal Dimensions of Fractional Calculus of Continuous Functions. *Fractals*, **27**, Article ID: 1950084. <https://doi.org/10.1142/S0218348X17500098>
- [6] Hu, T.Y. and Lau, K.S. (1993) Fractal Dimensions and Singularities of the Weierstrass Type Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **335**, 649-665. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1076614-6>
- [7] Hyde, J., Laschos, V., Olsen, L., Petrykiewicz, I. and Shaw, A. (2012) On the Box Dimensions of Graphs of Typical Continuous Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **391**, 567-581. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.02.044>
- [8] 文志英. 分形几何的数学基础[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [9] Xiao, W. (2021) On Fractal Features and Fractal Linear Space about Fractal Continuous Functions.
- [10] Wang, X.F. and Zhao, C.X. (2020) Fractal Dimensions of Linear Combination of Continuous Functions with the Same Box Dimension. *Fractals*, **28**, Article ID: 2050139. <https://doi.org/10.1142/S0218348X2050139X>
- [11] Falconer, K.J. and Fraser, J.M. (2011) The Horizon Problem for Prevalent Surfaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **151**, 355-372. <https://doi.org/10.1017/S030500411100048X>
- [12] Mandelbrot, B.B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- [13] Besicovitch, A.S. and Ursell, H.D. (1937) Sets of Fractional Dimensions ( $v$ ): On Dimensional Numbers of Some Continuous Curves. *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 18-25. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.45.18>
- [14] Liang, Y.S. and Su, W.Y. (2008) The Relationship between the Box Dimension of the Besicovitch Functions and the Orders of Their Fractional Calculus. *Applied Mathematics and Computation*, **200**, 297-307. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.014>
- [15] Rogers, C.A. (1988) Dimension Prints. *Mathematika*, **35**, 1-27. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006239>